PL. ANDRONESCU

BAZELE ELECTROTEHNICII

II

Scanned with OKEN Scanner

MINISTERUL EDUCAȚIEI ȘI ÎNVĂȚĂMÎNTULUI
INSTITUTUL POLITEHNIC TIMIȘOARA

PLAUȚIUS ANDRONESCU
Profesor emerit dr. docent

BAZELE ELECTROTEHNICII

II

EDITURA DIDACTICĂ ȘI PEDAGOGICĂ, BUCUREȘTI

Scanned with OKEN Scanner

P r e f a ț ă

În volumul al II-lea al manualului de electrotehnică se prezintă aplicarea noțiunilor fundamentale obținute din cercetarea fenomenelor electrostatic, electrocinetic, magnetostatic și electromagnetic, la cercetarea circuitelor electrice.

Aplicarea nu constă însă numai din folosirea diferitelor formule determinate în primul volum la calculul circuitelor electrice.

Se menține și în acest al II-lea volum aceeași metodă de cercetare ca în volumul I și anume, cercetarea circuitelor electrice este urmărită mereu sub aspect fenomenologic.

Mereu s-a avut în vedere cum se oglindește fenomenul în formule și cum formulele la rîndul lor reflectă imaginea fenomenului. În felul acesta procesul de gîndire se desfășoară nu în baza unei logici formale, ci în baza unei logici dialectice, dînd naștere la un raționament care într-adevăr se va găsi în deplină concordanță cu evoluția fenomenului cercetat.

Cititorul să evite a memora formulele, deoarece ele trebuie mereu interpretate pentru a reflecta imaginea cît mai clară a fenomenelor.

În acest scop s-a introdus și la acest volum un Adaus de metode de mînuire a matematicilor în cercetarea fenomenelor.

AUTORUL

Scanned with OKEN Scanner

C u p r i n s

Prefață

Circuite electrice 7

1. *Circuite electrice cu parametrii r, L, C, concentrați și constanți în timp* 7
2. *Circuit electric conectat la o tensiune de borne ca funcție sinusoidală de timp* 31
3. *Suma a două funcții sinusoidale* 38
4. *Valori efective* 42
5. *Circuite în serie, în paralel, serie paralel și în conectare complexă* 45
6. *Noțiuni despre metoda complexă* 52
7. *Aplicarea metodei complexe la cercetarea circuitelor electrice* 55
8. *Rezonanța de tensiune și de curent* 79
9. *Circuite electrice cu coeficienți de inducție reciproci* (mutuali) 87
10. *Metoda tensiunilor echivalente* 95
11. *Puterea activă, reactivă și aparentă* 100
12. *Factorul de putere și factorul de defazare la un circuit monofazat* 112
13. *Reprezentarea puterilor în planul complex* 115
14. *Calculul rețelelor cu ajutorul metodei complexe* 116
15. *Generatorul Hall* 117
16. *Măsurări cu generatorul Hall* 128
17. *Generatorul Hall din Ge-p* 129
18. *Eliminarea tensiunilor parazitare la folosirea generatorului Hall pentru curent continuu* 131
19. *Circuite trifazate* 133
    - 19.1. Circuite în conectare stea 133
    - 19.2. Introducerea mărimilor în forma complexă 136
    - 9.3. Aplicarea metodei tensiunilor echivalente la circuitele trifazate în conectare stea 147
    - 19.4. Circuit trifazat în conectare triunghi 154
    - 19.5. Aplicații cu metoda tensiunilor echivalente 156
20. *Măsurarea puterii active și reactive la circuite trifazate în conectare stea* 169
    - 20.1. Puterea activă la circuite trifazate în conectare stea 169
21. *Factorul de putere și factorul de defazare la un circuit trifazat* 175
22. *Transfigurări de circuite din conectarea stea în conectarea poligonală* 182
23. *Descompunerea tensiunilor și a curenților trifazați nesimetrici în tensiuni și curenți simetrici cu secvențe opuse și în componente homopolare* 188
    - 23.1. Descompunerea curenților de linie în curenți simetrici cu secvențe opuse cînd circuitul trifazat este în triunghi 194

Scanned with OKEN Scanner

24. *Puterea electromagnetică totală la un circuit trifazat* 205
25. *Comparație între transportul de energie cu o linie monofazată și cu o linie polifazată* 208
26. *Circuite electrice cu r, L, C concentrate și constante în regim nesinusoidal* 213
26.1. Reprezentarea unei funcții periodice generală de timp cu ajutorul seriei Fourier 213
26.2. Valori efective în regim nesinusoidal 222
26.3 Circuitul electric cu parametri constanți în regim nesinusoidal 225
26.4. Puterea electromagnetică mijlocie în raport cu o perioadă în regim nesinusoidal 233
26.5 Circuite electrice în paralel în regim nesinusoidal 235
26.6. Puterile activă, reactivă, deformantă și aparentă în regim nesinusoidal 242
26.7. Exemple de circuite cu puterile activă, reactivă, deformantă și aparentă în regim nesinusoidal 245
27. *Fenomenul de ferorezonanță* 253
28. *Circuitul trifazat în regim nesinusoidal* 266
29. *Circuite electrice cu r, L, c, g, uniform repartizate* 274
29.1. Circuit cuadripolar infinitezimal 275
29.2. Linia formată dintr-un lanț de circuite cuadripolare infinitezimale..... 278
29.3 Determinarea mărimilor γ^* și z_n 285
28.4. Determinarea constantelor în expresiile mărimilor U și I 288
29.5. Circuite echivalente unui lanț de circuite cuadripolare infinitezimale..... 291
29.6. Circuite cuadripolare finite 295
29.7. Comparația relațiilor obținute pentru cele două feluri de lanțuri formate din circuite cuadripolare infinitezimale și finite 299
29.8. Cercetarea circuitelor cuadripolar de forma II cu expresiile obișnuite pentru U_0 și I_0 cu expresiile pentru U_0 și I_0 obținute din lanț 302
30. *Aplicarea calculului matricial la studiul circuitelor cuadripolare în regim staționar* 308
30.1. Matricele diagonale 316
30.2. Un studiu critic asupra condițiilor de bază la stabilirea ecuației matriciale a unei rețele electrice 325
30.3 Rețeaua generalizată 334
31. *Efectul pelicular* 334
31.1. Efectul pelicular la conductoarele din crestătura unei mașini electrice 349
32. *Curenții electrici turbionari în tola de fier* 357
32.1 Determinarea experimentală a pierderilor în fier 364
33. *Pătrunderea cîmpului electromagnetic în metale* 370
34. *Calculul operațional* 374
34.1. Prima metodă de determinare a constantelor cu ajutorul calculului operațional 378
34.2. Integrala Fourier-Mellin pentru u = const. 383
34.3. Integrala Laplace pentru u const. 388
34.4. Ecuația integrală simbolică 390
34.5. Aplicarea calculului operațional în studiul circuitelor electrice pentru u sinusoidal 392
34.6. Integrala Fourier Mellin pentru u sinusoidal..... 400
34.7. Integrala Laplace și ecuația integrală simbolică pentru u sinusoidal 401
34.8. Ecuația integrală simbolică în cazul cînd u e sinusoidal și exprimat în forma obișnuită 402
34.9. Exemple de determinare a curentului electric cu ajutorul integralei Fourier Mellin 404

Scanned with OKEN Scanner

34.10. Cercetările de circuite electrice în regim tranzitoriu și staționar 406
34.11. Utilizarea calculului operațional la determinarea regimului tranzitoriu, atunci cînd circuitele sînt deconectate de la tensiunea de borne u și puse imediat în scurt-circuit 444
34.12. Folosirea integralei Fourier-Mellin la determinarea curentului electric i, cînd circuitul e deconectat de la tensiunea u și e scurtcircuitat imediat 452
Adaus 454
1. *Cîteva noțiuni despre funcțiile trigonometrice și hiperbolice* 454
2. *Noțiuni fundamentale despre calculul matricial* 458
2.1. Introducerea calculului matricial la rezolvarea sistemului de ecuații liniare 458
2.2. Rezolvarea unui sistem de ecuații liniare cu ajutorul calculului matricial 465
2.3. Matricea caracteristică 470
2.4. Teorema lui Cayley-Hamilton 471
2.5. Folosirea matricelor la cercetarea circuitelor electrice 472
2.6. Aplicarea calculului matricial la circuitul unei triode 479
2.7. Aplicarea calculului matricial la circuitul cu tranzistoare 487
3 *Noțiuni fundamentale ale funcției Bessel* 501
3.2. Funcțiile Bessel de categoria întîia de ordinul zero și de ordinul unu 503
4 *Noțiuni teoretice fundamentale necesare calculului operațional* 505
4.1. Descompunerea raportului a doua polinoame într-o sumă de fracții simple .. 505
4.2. Funcția de variabilă complexă 511
4.3. Continuitatea funcției de variabilă complexă 512
4.4. Derivata funcției de variabilă complexă 513
4.5. Teorema lui Cauchy 516
4.6. Formula lui Cauchy 520
4.7 Aplicații 527
5. *Calculul diferențial simbolic* 532
4.7. Aplicații
6. *Rezolvarea ecuației caracteristice de gradul 4* 535
7. *Considerații generale cu privire la rezolvarea ecuațiilor diferențiale liniare de ordinul întîi și de ordinul doi în electrotehnică* 539

Scanned with OKEN Scanner

CIRCUITE ELECTRICE

1. CIRCUITE ELECTRICE CU PARAMETRII r, L, C CONCENTRAȚI ȘI CONSTANȚI ÎN TIMP

În figura 1.1 se prezintă un circuit electric cu parametrii r, L, C concentrați și constanți în timp.

În oricare circuit electric se formează integrala de linie $\int_{V_a}^{V_b} (\mathrm{d}l\, \mathcal{E})$ în care

$$\mathcal{E} = -\nabla V - 1\frac{1}{„c“}\cdot\frac{\partial \mathcal{A}_B}{\partial t}. \tag{1}$$

În sistemul de măsuri electromagnetice constanta universală „c“ e introdusă în mărimile electrice. Ca urmare, relația (1) ia forma

$$\mathcal{E}_{„c“} = -„c“\cdot\nabla V - \frac{\partial \mathcal{A}_B}{\partial t},$$

sau

$$\mathcal{E}_{\mathrm{elm}} = -\nabla V_{\mathrm{elm}} - \frac{\partial \mathcal{A}_B}{\partial t},$$

în care

$$\mathcal{A}_B^{\mathrm{G\cdot cm}} = \mathcal{A}_B^{\mathrm{Mx/cm}} = i_{\mathrm{elm}}\cdot\mu\oint\frac{\mathrm{d}l}{r}.$$

$$\oint(\mathrm{d}l\,\mathcal{A}_B) = \Phi^{\mathrm{Mx}}.$$

Pentru unitățile practice în sistemul electromagnetic rezultă

$$\mathcal{E}_{\mathrm{elm}}\cdot 10^{-8} = \mathcal{E}^{\mathrm{V/cm}}.$$

$$\oint(\mathrm{d}l^{\mathrm{cm}}\mathcal{A}_B^{\mathrm{Wb/cm}}) = \Phi^{\mathrm{Wb}} = \Phi^{\mathrm{Mx}}\cdot 10^{-8}$$

$$i_{\mathrm{elm}} = \frac{i^{\mathrm{A}}}{10}.$$

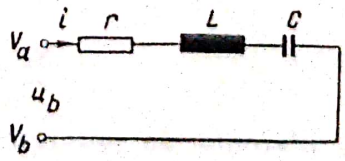


Fig. 1.1. Circuit cu parametrii r, L, C concentrați și constanți în timp.

Scanned with OKEN Scanner

Din

$$Q_{elm} = U_{elm} \cdot C_{elm}$$

$$(Q_{elm} \cdot 10)^{C} = (U_{elm} \cdot 10^{-8})^{V} \cdot C^{F}$$

rezultă

$$C^{F} = C_{elm} \cdot 10^{9}.$$

Din

$$\Phi_{elm} = i_{elm} \cdot L_{elm}$$

$$(\Phi_{elm} \cdot 10^{-8})^{Wb} = (i_{elm} \cdot 10)^{A} \cdot L_{H}.$$

se obține

$$L_{H} = L_{elm} \cdot 10^{-9}.$$

Din

$$U_{elm} = i_{elm} \cdot r_{elm}$$

$$(U_{elm} \cdot 10^{-8})^{V} = (i_{elm} \cdot 10)^{A} \cdot r^{\Omega}$$

rezultă

$$r^{\Omega} = r_{elm} \cdot 10^{-9}.$$

La formarea integralei $\int(\mathrm{d}l\mathcal{E}^{V/cm})$ pentru circuitul dat se obține pe de o parte suma tensiunilor în forma

$$\int_a^b (\mathrm{d}l\mathcal{E}) = (V_a - V_b)^{V} - \frac{\partial}{\partial t}(k\Phi) \cdot w \cdot 10^{-8}.$$

Pe de altă parte, dat fiind că în spațiul ocupat de metal are loc o mișcare de electroni sub acțiunea forței $q\mathcal{E}$ și mai există un cîmp electric între electrozii unui condensator, integrala $\int(\mathrm{d}l\mathcal{E})$ devine

$$\int_a^b (\mathrm{d}l\mathcal{E}) = i^{A} r^{\Omega} + \frac{1}{C^{F}} \int i^{A}\,\mathrm{d}t + \frac{Q_0}{C^{F}}.$$

Introducîndu-se înlănțuirea magnetică $(k\Phi) \cdot w \cdot 10^{-8}$ în forma

$$(k\Phi) \cdot w \cdot 10^{-8} = i^{A} L^{H}$$

integrala $\int(\mathrm{d}l\mathcal{E})$ pentru circuitul dat ne conduce la relația

$$(V_a - V_b)^{V} - L^{H} \frac{\mathrm{d}i^{A}}{\mathrm{d}t} = i^{A} r^{\Omega} + \frac{1}{C^{F}} \int i^{A}\,\mathrm{d}t + \frac{Q_0^{C}}{C^{F}}, \qquad (2)$$

în care

$$\frac{Q_0}{C} = \frac{1}{C} \int i\,\mathrm{d}t + \frac{Q_0}{C}$$

reprezintă diferența de potențial la bornele condensatorului.

Deoarece circuitul din figura 1.1 posedă o inductivitate L, rezultă că în momentul conectării circuitului la tensiunea de borne u_b se obține

$$u_b - L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} - \frac{Q}{C} = ir, \tag{3}$$

de unde se deduce $i = 0$ și $\frac{\partial i}{\partial t} = 0$ cînd condensatorul s-a încărcat, deoarece intensitatea cîmpului electric rezultant $\mathcal{E}_{rez.}$ este nulă.

$$\mathcal{E}_{rez.} = -\nabla V - \frac{\partial \mathcal{A}_B}{\partial t} = 0$$

în care

$$-\nabla V = -\nabla V_1 - \nabla V_2 \text{ și } \mathcal{A}_B = 0$$

$-\nabla V_1$ corespunde cîmpului electric de la bornele sursei, iar $-\nabla V_2$ corespunde cîmpului electric de la condensator.

Admițînd că în momentul încărcării condensatorului avem $\frac{Q_0}{C} = 0$, rezultă

$$u_b = L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} = 0. \tag{4}$$

Relația (4) servește la determinarea curentului electric i.

Ecuația integro-diferențială (2) se reprezintă în forma

$$V_a - V_b = u_b = L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + ir + \frac{1}{C}\int i\,\mathrm{d}t + \frac{Q_0}{C}. \tag{5}$$

La rezolvarea ecuației integro-diferențială (5) deosebim două cazuri, după cum tensiunea de borne u_b e constantă în timp sau reprezintă o funcție sinusoidală de timp.

Cazul u_b constant.

Curentul electric i apare ca o sumă de două componente i_{st} curent staționar și i_{tr} curent tranzitoriu. Curentul staționar i_{st} e constant în timp, datorită tensiunii de borne u_b care e constantă în timp.

Deoarece circuitul electric posedă un condensator C, curentul staționar devine nul. Cînd condensatorul s-a încărcat, diferența de potențial la bornele lui $\left(\frac{Q}{C}\right)$ compensează diferența de potențial de la bornele circuitului sursă u_b.

Curentul electric i_{tr} se obține din ecuația integro-diferențială, considerînd membrul al doilea u_b egal cu zero.

Se cere să se rezolve ecuația

$$L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + ri + \frac{1}{C}\int i\,\mathrm{d}t + \frac{Q_0}{C} = 0, \tag{6}$$

în care $i = i_{tr}$.

Prin derivare în raport cu timpul se obține

$$L\frac{d^2i}{dt^2}+r\frac{di}{dt}+\frac{i}{C}=0$$

sau

$$\frac{d^2i}{dt^2}+\frac{r}{L}\frac{di}{dt}+\frac{i}{LC}=0. \tag{7}$$

Curentul electric i apare ca o funcție exponențială de timp în forma

$$i_{tr}=i=I\,e^{pt}. \tag{8}$$

Introducîndu-se i din (8) în ecuația diferențială (7) se obține

$$\left(p^2+\frac{r}{L}p+\frac{1}{LC}\right)I\,e^{pt}=f(p)\cdot I\,e^{pt}=0. \tag{9}$$

Relația (9) e satisfăcută cînd

$$f(p)=p^2+\frac{r}{L}p+\frac{1}{LC}=0. \tag{10}$$

Relația (10) e denumită ecuația caracteristică.
Soluția ei este

$$p_{1,2}=-\frac{r}{2L}\pm\sqrt{\left(\frac{r}{L}\right)^2-\frac{1}{LC}} \tag{11}$$

în care

$$\Delta_1=\frac{r}{2L};\quad \Delta_2=\sqrt{\left(\frac{r}{L}\right)^2-\frac{1}{LC}} \tag{12}$$

astfel că

$$p_1=-(\Delta_1-\Delta_2);\quad p_2=-(\Delta_1+\Delta_2). \tag{13}$$

Curentul electric i devine

$$i=I_1\,e^{p_1t}+I_2\,e^{p_2t}. \tag{14}$$

Determinarea constantelor I_1, I_2 se face ținîndu-se seama de condițiile inițiale în momentul conectării circuitului.

Condițiile inițiale sînt

pentru $t=0$, avem $i=0$; $\frac{Q}{C}=0$;

pentru $t=\infty$, avem $i=0$; $\frac{Q}{C}=u_b$.

Scanned with OKEN Scanner

S-a relevat în (4) că în momentul conectării circuitului avem

$$u_b - L\frac{di}{dt} = 0.$$

Se relevă că în momentul conectării avem $i = 0$; acest fapt nu înseamnă că și $\frac{di}{dt}$ este nul.

Ca urmare, în momentul conectării rezultă

$$u_b = L\left(\frac{di}{dt}\right)_{t=0}. \tag{15}$$

Din (14) rezultă în momentul conectării $t = 0$

$$i = 0 = I_1 + I_2,$$

astfel că

$$i = I\,(e^{p_1 t} - e^{p_2 t}). \tag{16}$$

Din (16) se obține

$$\frac{di}{dt} = I(p_1 e^{p_1 t} - p_2 e^{p_2 t});$$

pentru $t = 0$ rezultă

$$\left(\frac{di}{dt}\right)_{t=0} = I(p_1 - p_2) = I[-(\Delta_1 - \Delta_2) + (\Delta_1 + \Delta_2)] = 2\Delta_2 I$$

astfel că

$$u_b = L\left(\frac{di}{dt}\right)_{t=0} = LI \cdot 2\Delta_2.$$

$$I = \frac{u_b}{2\Delta_2 L};\quad i = \frac{u_b}{2\Delta_2 L}(e^{p_1 t} - e^{p_2 t}). \tag{17}$$

Se deosebesc trei cazuri

$$\left(\frac{r}{2L}\right)^2 \gtrless \frac{1}{LC}.$$

Cazul $r > 2\sqrt{\frac{L}{C}}$.

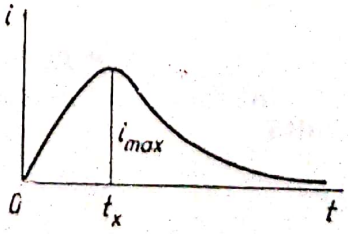


Fig. 1.2. $i = f(t)$ pentru $r > 2\sqrt{\frac{L}{C}}$.

În figura 1.2 se prezintă curentul i pentru $r > 2\sqrt{\frac{L}{C}}$.

Avem

$$i = \frac{u_b}{2\Delta_2 L}(e^{p_1 t} - e^{p_2 t})$$

$$p_1 = -(\Delta_1 - \Delta_2); \quad \Delta_1 > \Delta_2. \qquad (18)$$
$$p_2 = -(\Delta_1 + \Delta_2)$$

Se cere să se determine t_x și i_{max}.

Din

$$\frac{di}{dt} = 0 = \frac{u_b}{2\Delta_2 L}(p_1 e^{p_1 t_x} - p_2 e^{p_2 t_x})$$

rezultă

$$\frac{p_2}{p_1} = e^{(p_1 - p_2)t_x} = e^{2\Delta_2 x}$$

$$2\Delta_2 t_x = 2{,}3 \log \frac{p_2}{p_1}; \quad t_x = \frac{1}{2\Delta_2} \cdot 2{,}3 \log \frac{p_2}{p_1}$$

$$i_{max} = \frac{u_b}{2\Delta_2 L} e^{p_1 t_x}(1 - e^{(p_2 - p_1)t_x})$$

$$i_{max} = \frac{u_b}{2\Delta_2 L} e^{p_1 t_x}\left(1 - \frac{p_1}{p_2}\right) = \frac{u_b}{2\Delta_2 L} e^{p_1 t_x} \cdot \frac{2\Delta_2}{\Delta_1 + \Delta_2} = \frac{u_b}{(\Delta_1 + \Delta_2) L} e^{p_1 t_x}.$$

Determinarea diferenței de potențial u_c de la bornele condensatorului. Avem

$$u_c = \frac{1}{C}\int i\,dt + \frac{Q_0}{C}$$

$$u_c = \frac{u_b}{2\Delta_2 LC}\left(\frac{1}{p_1} e^{p_1 t} - \frac{1}{p_2} e^{p_2 t}\right) + \frac{Q_0}{C}.$$

În momentul conectării $t = 0$ se obține

$$u_c = 0 = \frac{u_b}{2\Delta_2 LC} \cdot \frac{p_2 - p_1}{p_1 p_2} + \frac{Q_0}{C} = -\frac{u_b}{2\Delta_2 LC} \cdot 2\Delta_2 \cdot LC + \frac{Q_0}{C},$$

în care

$$p_1 p_2 = \Delta_1^2 - \Delta_2^2 = \frac{1}{LC},$$

de unde rezultă

$$\frac{Q_0}{C} = u_b.$$

Pentru $t = \infty$ avem

$$u_c = \frac{Q_0}{C} = u_b.$$

Ca urmare

$$u_c = \frac{u_b}{2\Delta_2 LC}\left(\frac{1}{p_1}\,e^{p_1 t} - \frac{1}{p_2}\,e^{p_2 t}\right) + u_b. \qquad (19)$$

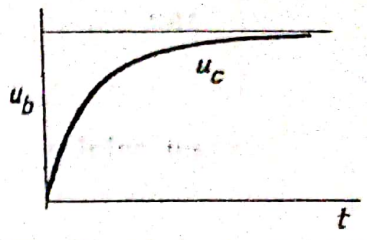


Fig. 1.3. u_c ca funcție de t.

Figura 1.3 reprezintă diferența de potențial u_c la bornele condesatorului ca funcție de timp.

Tot în cazul $r > 2\sqrt{\frac{L}{C}}$ avem și cînd $C = \infty$, adică circuitul nu posedă condensator deci $r > 0$.

La un condensator pus în scurtcircuit, ca în figura 1.4 se obține din

$$u_c = \frac{Q}{C} = \frac{Q}{\infty} = 0$$

diferența de potențial la bornele condensatorului egală cu zero. Q reprezintă sarcina electrică care străbate secțiunea conductorului într-o secundă.

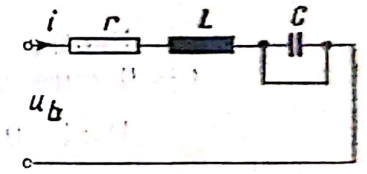


Fig. 1.4. Condensator pus în scurtcircuit.

Pentru $C = \infty$ se obține:

$$\Delta_1 = \Delta_2; \qquad p_1 = 0; \qquad p_2 = -2\Delta_1$$

$$i = \frac{u_b}{2\Delta_1 L}\left(1 - e^{-\frac{r}{L}t}\right) = \frac{u_b}{r}\left(1 - e^{-\frac{r}{L}t}\right). \qquad (20)$$

Figura 1.5 reprezintă curentul electric i, cînd în circuitul electric există numai parametrii r și L.

Se mai poate determina curentul electric și direct din ecuația diferențială obținută pentru cazul cînd circuitul posedă numai parametrii r și L.

Avem

$$u_b = L\frac{di}{dt} + ri,$$

în care

$$i = i_{st} + i_{tr}.$$

Pentru i_{st} avem

$$i_{st} = \frac{u_b}{r}.$$

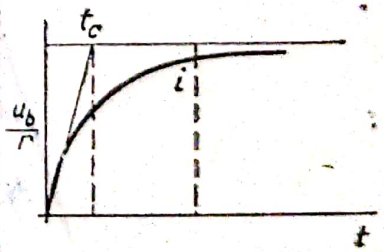


Fig. 1.5. Curentul electric i la circuitul cu r, L.

Pentru i_{tr} se formează ecuația diferențială cu membrul al doilea egal cu zero

$$0 = L\frac{di_{tr}}{dt} + ri_{tr}$$

sau

$$0 = \frac{di_{tr}}{dt} + \frac{r}{L} i_{tr}$$

cu soluția

$$i_{tr} = I e^{pt}$$

și ecuația caracteristică

$$p + \frac{r}{L} = 0; \quad p = -\frac{r}{L}$$

astfel că

$$i_{tr} = I e^{-\frac{r}{L}t}.$$

Curentul electric total devine:

$$i = i_{st} + i_{tr} = \frac{u_b}{r} + I e^{-\frac{r}{L}t}.$$

Pentru determinarea constantei I se consideră la timpul conectării $t = 0$ curentul electric $i = 0$.

Deci $0 = \frac{u_b}{r} + I$ de unde se deduce $I = -\frac{u_b}{r}$.

Astfel că

$$i = \frac{u_b}{r}(1 - e^{-\frac{r}{L}t}).$$

Din figura 1.6 se obțin următoarele trei caracteristici:

Prima caracteristică

Din

$$\frac{di}{dt} = \frac{u_b}{L} e^{-\frac{r}{L}t}$$

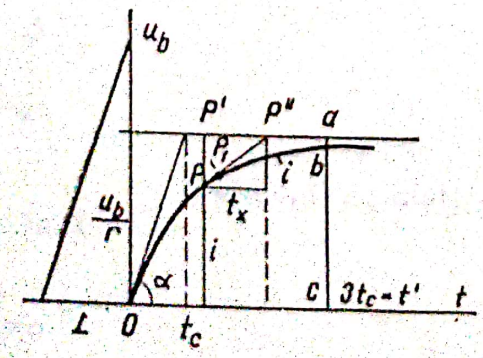


Fig. 1.6. Construirea curbei exponențiale.

Scanned with OKEN Scanner

se obține din figură pentru $t = 0$

$$\left(\frac{di}{dt}\right)_{t=0} = \frac{u_r}{L} = \frac{\frac{u_b}{r}}{t_c},$$

de unde se deduce

$$L = rt_c \text{ sau } t_c = \frac{L}{r},$$

t_c exprimă constanta de timp. Cu cît t_c este mai mare, adică L mai mare ca r, cu atît creșterea curentului i în timp se face mai încet.

A doua caracteristică

Din figură rezultă

$$\frac{\frac{u_b}{r} - \frac{u_b}{r}\left(1 - e^{-\frac{r}{L}t}\right)}{t_x} = \frac{\frac{u_b}{r} e^{-\frac{r}{L}t}}{t_x} = \frac{di}{dt} = \frac{u_b}{L} e^{-\frac{r}{L}t},$$

de unde se deduce $rt_x = L$ ceea ce ne arată că $t_x = t_c = \text{const.}$

Faptul că $P'P'' = t_x$ este constant, rezultă că curba exponențială poate fi ușor construită în felul următor:

Cînd punctul P pe curbă e cunoscut, se fixează $P'P''$ egal cu t_c și în felul acesta tangenta la curba în P devine determinată. Se duce tangenta în P. Se ia pe tangentă o porțiune mică ca și cum ar fi pe curbă. Se construiesc pe asimptotă noi puncte P_1', P_1'', așa fel ca $\overline{P_1', P_1''} = t_c$. Se construiește noua tangentă la curbă în P_1.

A treia caracteristică

Dat fiind că teoretic, pentru $t = \infty$ curentul electric i devine constant, se admite că i a atins valoarea constantă cînd

$$\frac{\overline{ab}}{\overline{ac}} = 0{,}05 \text{ (vezi figura).}$$

Adică:

$$\frac{\overline{ab}}{\overline{ac}} = \frac{\frac{u_b}{r} - \frac{u_b}{r}\left(1 - e^{-\frac{r}{L}t'}\right)}{\frac{u_b}{r}} = e^{-\frac{r}{L}t'} = \frac{1}{e^{\frac{r}{L}t'}} = 0{,}05 = \frac{1}{20}.$$

Se obține

$$\frac{r}{L}t' = 2{,}3 \log 20 = 2{,}3\ (0{,}3 + 1) \cong 3$$

astfel că

$$t' = 3\frac{L}{r} = 3t_e$$

reprezintă durata de timp după care se consideră curentul electric i constant.

Revenim din nou la cazul $r > 2\sqrt{\frac{L}{C}}$.

Se consideră în circuitul cu parametrii r, L, C cazul cînd $r > 2\sqrt{\frac{L}{C}}$ însă L devine nul, ceea ce ne dă $r > 0$.

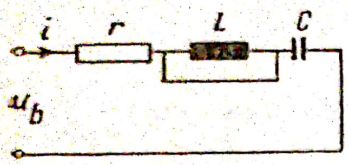


Fig. 1.7. Inductivitatea pusă în scurtcircuit.

În figura 1.7 inductivitatea e pusă în scurtcircuit. Din

$$p_1 = -\frac{r}{2L} + \sqrt{\left(\frac{r}{2L}\right)^2 - \frac{1}{LC}}$$

$$p_2 = -\frac{r}{2L} - \sqrt{\left(\frac{r}{2L}\right)^2 - \frac{1}{LC}}$$

se obţin

$$p_1 = -\frac{rC}{2LC} + \sqrt{\frac{r^2C^2}{4L^2C^2} - \frac{4LC}{4L^2C^2}},$$

$$p_1 = \frac{-rC + \sqrt{(rC)^2 - 4LC}}{2LC}$$

$$p_2 = \frac{-rC - \sqrt{(rC)^2 - 4LC}}{2LC}.$$

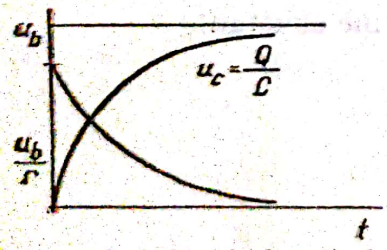


Fig. 1.8. i şi u_c în funcţie de pentru $L = 0$.

Pentru $L = 0$ rezultă $p_1 = \frac{0}{0}$ o nedeterminare.

Se aplică regula lui l'Hôpital.

$$p_1 = \frac{\frac{1}{2}[(rC)^2 - 4LC]^{-\frac{1}{2}}(-4C)}{2C} = -\frac{1}{rC}$$

pentru $L = 0$

$$p_2 = \frac{-2rC}{2LC} = -\infty \text{ pentru } L = 0.$$

Ca urmare

$$i = \frac{u_b}{2\Delta_2 L}(e^{p_1 t} - e^{p_2 t}) = \frac{u_b}{r} e^{-\frac{1}{rC}t} \qquad (21)$$

Scanned with OKEN Scanner

în care

$$\Delta_2 = \sqrt{\left(\frac{r}{2L}\right)^2 - \frac{1}{LC}}; \quad 2\Delta_2 L = \sqrt{r^2 - \frac{4L}{C}}$$

$$(2\Delta_2 L)_{L=0} = r.$$

În figura 1.8 se prezintă curentul electric i în funcție de timp.

Deoarece $L = 0$, rezultă că $t_c = \frac{L}{r} = 0$, astfel că i imediat la conectare devine maximal.

Diferența de potențial la bornele condensatorului ia forma

$$u_c = \frac{Q}{C} = \frac{1}{C}\int i\,dt + \frac{Q_0}{C} = -\frac{u_b rC}{rC} e^{-\frac{1}{rC}t} + \frac{Q_0}{C}.$$

În timpul $t = 0$ (momentul conectării) avem $\frac{Q}{C} = 0$, astfel că

$$-u_b + \frac{Q_0}{C} = 0,$$

de unde se deduce

$$\frac{Q_0}{C} = u_b.$$

Ca urmare, u_c devine

$$u_c = \frac{Q}{C} = u_b\left(1 - e^{-\frac{1}{rC}t}\right). \tag{22}$$

În figura 1.8 se prezintă tensiunea de borne a condensatorului u_c ca funcție de timp.

Din ecuația integro-diferențială a curentului electric i cînd circuitul posedă ca parametrii numai pe r și C, în forma

$$u_b = ri + \frac{1}{C}\int i\,dt + \frac{Q_0}{C}$$

se constată că i_{st} e nul, pentru că atunci cînd condensatorul e încărcat cu tensiunea de borne u_c așa fel ca $u_b = u_c$, curentul i devine nul.

Curentul tranzitoriu i_{tr} se obține din ecuația integro-diferențială făcînd membrul al doilea al ei egal cu zero.

Din

$$0 = ri + \frac{1}{C}\int i\,dt + \frac{Q_0}{C}$$

se obține prin derivare

$$0 = \frac{di_{tr}}{dt} + \frac{i_{tr}}{rC}.$$

Scanned with OKEN Scanner

Introducîndu-se

$$i_{tr} = Ie^{pt}$$

se obține ecuația caracteristică

$$p + \frac{1}{rC} = 0; \quad p = -\frac{1}{rC}$$

astfel că

$$i_{tr} = Ie^{-\frac{1}{rC}t}$$

pentru $t = 0$ se obține

$$i_{tr} = \frac{u_b}{r} = I$$

astfel că

$$i = i_{tr} = \frac{u_b}{r} e^{-\frac{1}{rC}t}.$$

Cazul $r = 2\sqrt{\frac{L}{C}}$

Acest caz corespunde lui

$$\Delta_2 = 0 = \sqrt{\left(\frac{r}{2L}\right)^2 - \frac{1}{LC}};$$

ca urmare rezultă:

$$p_1 = -(\Delta_1 - \Delta_2) = -\Delta_1$$
$$p_2 = -(\Delta_1 + \Delta_2) = -\Delta_1$$

astfel că

$$p_1 = p_2 = -\Delta_1,$$

în care

$$\Delta_1 = \frac{r}{2L}; \quad \Delta_1^2 = \frac{1}{LC}.$$

Curentul electric i ia forma

$$i = I_1 e^{p_1 t} + I_2 te^{p_1 t}.$$

În momentul conectării $t = 0$, avem $i = 0 = I_1$, astfel că

$$i = It\, e^{p_1 t} = It\, e^{-\frac{r}{2L}t}.$$

Pentru determinarea constantei I se formează:

$$\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} = Ie^{p_1 t} - It\frac{r}{2L}e^{p_1 t}$$

pentru $t = 0$;

$$\left(\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}\right)_{t=0} = I.$$

Din

$$u_b = L\left(\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}\right)_{t=0}$$

se obţine

$$u_b = LI$$

astfel că

$$I = \frac{u_b}{L}.$$

Ca urmare

$$i = \frac{u_b}{L} t\, e^{p_1 t}. \tag{23}$$

Figura 1.9 reprezintă curentul electric i pentru cazul $r = 2\sqrt{\frac{L}{C}}$.

Comparînd expresia curentului electric din (23) cu expresia curentului electric din (21) se relevă că Δ_2 din numitor e înlocuit, din punct de vedere dimensional, cu t la numărător; se ţine seama că Δ_2 are dimensiunea de 1/s.

Determinarea tensiunii de borne u_c la bornele condensatorului

Avem

$$u_c = \frac{Q}{C} = \frac{u_b}{LC}\int t\, e^{p_1 t}\cdot \mathrm{d}t + \frac{Q_0}{C}.$$

Se ţine seama de integrala:

$$\int e^{ax}\cdot f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{e^{ax}}{a}\left\{f(x) - \frac{f'(x)}{a} + \frac{f''(x)}{a^2}\cdots\right\}.$$

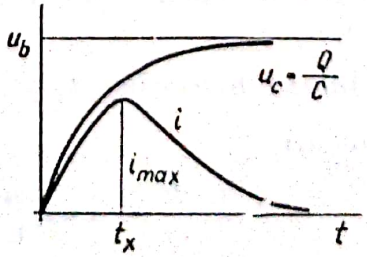


Fig. 1.9. Curentul electric i şi u_c pentru $r = 2\sqrt{\frac{L}{C}}$.

Scanned with OKEN Scanner

Ca urmare

$$u_c = \frac{u_b}{LC}\int t\, e^{p_1 t}dt + \frac{Q_0}{C} = \frac{u_b}{LC}\frac{e^{p_1 t}}{p_1}\left(t - \frac{1}{p_1}\right) + \frac{Q_0}{C},$$

în care

$$p_1 = -\frac{r}{2L} = -\Delta_1$$

astfel că

$$u_c = -\frac{u_b}{LC\Delta_1} e^{-\Delta_1 t}\left(t + \frac{1}{\Delta_1}\right) + \frac{Q_0}{C}.$$

Pentru $t = 0$ avem $u_c = 0$.
Se obține

$$0 = -\frac{u_b}{LC\Delta_1^2} + \frac{Q_0}{C}$$

$$\frac{Q_0}{C} = \frac{u_b}{LC\Delta_1^2} = u_b,$$

în care

$$\Delta_1^2 = \frac{1}{LC}$$

astfel că

$$u_c = \frac{Q}{C} = u_b\{1 - e^{-\Delta_1 t}(\Delta_1 t + 1)\}. \qquad (24)$$

În figura 1.9 se prezintă tensiunea de borne u_c la bornele condensatorului ca funcție de timp.
Din (24) se remarcă că pentru $t = \infty$ se obține nedeterminarea

$$\frac{t}{e^{\Delta_1 t}} = \frac{\infty}{\infty}.$$

Prin aplicarea regulei lui L'Hôpital se obține

$$\frac{1}{\Delta_1 e^{\Delta_1 t}}$$

care pentru $t = \infty$ obține valoarea zero, astfel că $t\, e^{-\Delta_1 t}$ tinde către zero pentru $t = \infty$.

Determinarea mărimilor t_x și i_{max} din figura 1.9.

Se formează

$$\frac{di}{dt} = 0 = \frac{u_b}{L} e^{p_1 t_x} + \frac{u_b}{L} t_x p_1 e^{p_1 t_x}$$

Scanned with OKEN Scanner

astfel că

$$p_1 t_x + 1 = 0$$

$$t_x = -\frac{1}{p_1} = \frac{1}{\Delta_1}.$$

Se obține

$$i_{max} = \frac{u_b}{L} t_x e^{p_1 t_x} = \frac{u_b}{L} \cdot \frac{1}{\Delta_1} e^{-1} = \frac{u_b}{L\Delta_1} \cdot \frac{1}{e}.$$

Ținîndu-se seama de

$$\Delta_1^2 = \frac{1}{LC}; \quad \Delta_1 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

se obține

$$i_{max} = \frac{u_b}{\sqrt{\frac{L}{C}}} \cdot \frac{1}{e}.$$

Cazul $r < 2\sqrt{\frac{L}{C}}$

Deoarece avem $\left(\frac{r}{2L}\right)^2 < \frac{1}{LC}$, înseamnă că radicalul se exprimă în formă imaginară.

Se introduce:

$$\Delta_2 = j\sigma = j\sqrt{\frac{1}{LC} - \left(\frac{r}{2L}\right)^2}$$

astfel că curentul electric i devine

$$i = \frac{u_b}{2j\sigma L} \{e^{-(\Delta_1 - j\sigma)t} - e^{-(\Delta_1 + j\sigma)t}\}$$

sau

$$i = \frac{u_b}{2j\sigma L} e^{-\Delta_1 t} (e^{j\sigma t} - e^{-j\sigma t}) = \frac{u_b}{\sigma L} e^{-\Delta_1 t} \cdot \sin \sigma t, \qquad (25)$$

în care după Euler avem

$$\cos \sigma t + j \sin \sigma t = e^{j\sigma t}; \quad \cos \sigma t - j \sin \sigma t = e^{-j\sigma t}$$

astfel că

$$2j \sin \sigma t = e^{j\sigma t} - e^{-j\sigma t}.$$

Expresia (25) ne arată că curentul electric i apare în formă unei funcții sinusoidale de timp cu amplitudinea amortizată în timp după o funcție exponențială. σ reprezintă frecvența circulară.

Scanned with OKEN Scanner

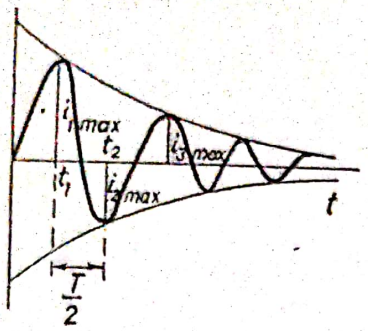


Fig. 1.10. Curentul electric sinusoidal amortizat.

Figura 1.10 reprezintă curentul electric sinusoidal cu amplitudinea amortizată în timp după o funcție exponențială. Determinarea timpului t_1 pentru care i e maxim, în forma i_{max}.

Se formează

$$\left(\frac{di}{dt}\right)_{t=t_1} = -\frac{u_b}{\sigma L}\Delta_1 e^{-\Delta_1 t_1}\cdot \sin \sigma t_1 + \sigma \frac{u_b}{\sigma L} e^{-\Delta_1 t_1}\cdot \cos \sigma t_1 = 0$$

astfel că

$$-\Delta_1 \sin \sigma t_1 + \sigma \cos \sigma t_1 = 0$$

$$\operatorname{tg} \sigma t_1 = \frac{\sigma}{\Delta_1},$$

de unde se determină t_1.

Se mai obține

$$\sin \sigma t_1 = \frac{\operatorname{tg} \sigma t_1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 \sigma t_1}} = \frac{\frac{\sigma}{\Delta_1}}{\sqrt{1+\left(\frac{\sigma}{\Delta_1}\right)^2}} = \frac{\sigma}{\sqrt{\Delta_1^2+\sigma^2}} = \sigma\sqrt{LC},$$

în care

$$\Delta_1^2 + \sigma^2 = \frac{1}{LC}.$$

Ca urmare $i_{1\,max}$ devine

$$i_{1\,max} = \frac{u_b}{\sigma L} e^{-\Delta_1 t_1}\cdot \sin \sigma t_1 = \frac{u_b}{\sqrt{\frac{L}{C}}} e^{-\Delta_1 t_1}.$$

Se formează

$$t_2 = t_1 + \frac{T}{2} = t_1 + \frac{\pi}{\sigma}$$

deoarece avem

$$\frac{1}{f} = T; \quad 2\pi f = \sigma = \frac{2\pi}{T}; \quad \frac{T}{2} = \frac{\pi}{\sigma},$$

astfel că

$$\sigma t_2 = \sigma t_1 + \pi$$

$$\sin \sigma t_2 = \sin (\sigma t_1 + \pi) = -\sin \sigma t_1$$

în mod analog se obține $\sigma t_3 = \sigma t_1 + 2\pi$

$$\sin \sigma t_3 = \sin \sigma t_1.$$

Ca urmare se obține

$$i_{2\,max} = -\frac{u_b}{\sqrt{\frac{L}{C}}} e^{-\Delta_1 t_2}; \quad i_{3\,max} = \frac{u_b}{\sqrt{\frac{L}{C}}} e^{-\Delta_1 t_3},$$

în care

$$t_2 = t_1 + \frac{T}{2}; \quad t_3 = t_1 + T; \quad t_3 - t_1 = T.$$

Se formează raportul

$$\frac{i_{1\,max}}{i_{3\,max}} = e^{\Delta_1 t_1 + \Delta_1 t_3} = e^{\Delta_1 T}$$

exponentul $\Delta_1 T$ este denumit decrementul logaritmic.

Pentru $\sin \sigma t' = 1$ deci $\sigma t' = \frac{\pi}{2}$; $t' = \frac{\pi}{2\sigma} = \frac{T}{2}$ se obține

$$i = \frac{u_b}{\sigma L} e^{-\Delta_1 t'}$$

la timpul t' linia sinusoidală devine tangentă la linia exponențială din figura 1.10.

Exemplu pentru determinarea frecvenței circulare σ pentru $r = 0$.

Fie

$$L = 10^{-5}\ \text{H}; \quad C = 1\,\mu\text{F}$$

se obține

$$\sigma = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \sqrt{10^{11}} = 10^5 \cdot 3{,}3 = 2\pi f.$$

Scanned with OKEN Scanner

Determinarea tensiunii de borne u_c la bornele condensatorului.
Avem

$$\frac{Q}{C} = \frac{u_b}{2\Delta_2 LC}\left(\frac{1}{p_1}e^{p_1 t} - \frac{1}{p_2}e^{p_2 t}\right) + u_b$$

în care se introduce $\Delta_2 = j\sigma$.

Se obține

$$u_c = \frac{Q}{C} = \frac{u_b}{2j\sigma LC}\left(\frac{1}{-\Delta_1 + j\sigma}e^{(-\Delta_1 + j\sigma)t} - \frac{1}{-\Delta_1 - j\sigma}e^{(-\Delta_1 - j\sigma)t}\right) + u_b$$

$$u_c = \frac{Q}{C} = \frac{u_b}{2j\sigma LC}e^{-\Delta_1 t}\left(-\frac{1}{\Delta_1 - j\sigma}e^{j\sigma t} + \frac{1}{\Delta_1 + j\sigma}e^{-j\sigma t}\right) + u_b$$

$$u_c = \frac{Q}{C} = \frac{u_b}{2j\sigma}e^{-\Delta_1 t}\{-\Delta_1(e^{j\sigma t} - e^{-j\sigma t}) - j\sigma(e^{j\sigma t} + e^{-j\sigma t})\} + u_b,$$

în care

$$\Delta_1^2 + \sigma^2 = \frac{1}{LC}.$$

Introducîndu-se formulele lui Euler, se obține

$$u_c = \frac{Q}{C} = \frac{u_b}{\sigma}e^{-\Delta_1 t}(-\Delta_1 \sin \sigma t - \sigma \cos \sigma t) + u_b$$

$$u_c = -u_b e^{-\Delta_1 t}\left(\frac{\Delta_1}{\sigma}\sin \sigma t + \cos \sigma t\right) + u_b.$$

Se introduce

$$\frac{\Delta_1}{\sigma} = \operatorname{tg} \theta$$

astfel că

$$u_c = \frac{Q}{C} = u_b\left\{1 - \frac{1}{\sigma\sqrt{LC}}e^{-\Delta_1 t}\cdot\cos(\sigma t - \theta)\right\},$$

în care

$$\cos\theta = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2\theta}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{\Delta_1^2}{\sigma^2}}} = \sigma\sqrt{LC}.$$

Pentru $t = 0$ se obține $u_c = 0$.

Figura 1.11 reprezintă curentul electric i și tensiunea u_c ca funcțiuni de timp pentru $r < 2\sqrt{\frac{L}{C}}$.

Se vede că apare o supratensiune u_c' față de tensiunea de borne a circuitului electric u_b.

În cazul cînd rezistența electrică r e considerată practic nulă față de $2\sqrt{\frac{L}{C}}$ se obține

$$\Delta_1 = \frac{r}{2L} \cong 0; \quad \frac{\Delta_1}{\sigma} = \operatorname{tg}\theta \cong 0; \quad \theta \cong 0$$

Scanned with OKEN Scanner

astfel că tensiunea de la bornele condensatorului u_c devine

$$u_c = \frac{Q}{C} = u_b\left(1 - \frac{1}{\sigma\sqrt{LC}}\cos \sigma t\right).$$

Din

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{LC} - 0}$$

rezultă:

$$u_c = \frac{Q}{C} = u_b\,(1 - \cos \sigma t).$$

Figura 1.12 reprezintă tensiunea u_c pentru $r = 0$. Din figură se vede că supratensiunea devine egală cu u_b.

Deoarece diferența de tensiune $u_b - u_c$ produce curentul electric în circuitul dat se obține:

$$u_b - u_c = u_b - u_b(1 - \cos\ \sigma t) = u_b \cos \sigma t = u_b \sin\left(\sigma t + \frac{\pi}{2}\right).$$

Într-adevăr pentru $\Delta_1 \cong 0$ se obține

$$i = \frac{u_b}{\sigma L}\sin \sigma t = \frac{u_b}{\sqrt{\frac{L}{C}}}\sin \sigma t,$$

în care

$$\sigma = \frac{1}{\sqrt{LC}}.$$

Ca urmare, din relația

$$u_b = L\frac{di}{dt} + u_c$$

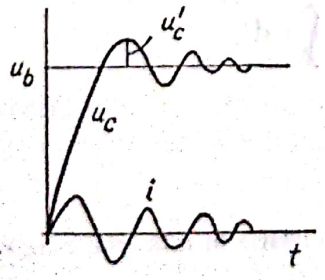


Fig. 1.11. Curentul i și tensiunea u_c pentru $r < 2\sqrt{\frac{L}{C}}$.

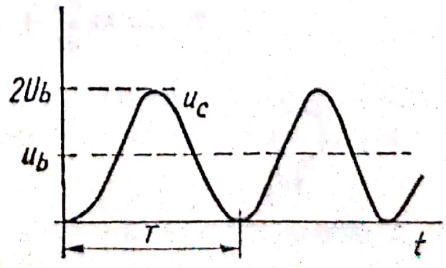


Fig. 1.12. Tensiunea u_c pentru $r = 0$.

Scanned with OKEN Scanner

se deduce

$$u_b - u_c = L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} = \frac{u_b}{\sqrt{\frac{L}{C}}} L\sigma \cos \sigma t = u_b \cos \sigma t,$$

ceea ce verifică relaţia de mai sus. Din punct de vedere energetic se obţine

$$W_e = \frac{u_c^2 C}{2} = \frac{u_b^2 C}{2}(1 - \cos \sigma t)^2$$

$$W_m = \frac{i^2 L}{2} = \frac{u_b^2 C}{2} \sin^2 \sigma t.$$

Ca urmare

$$W_e + W_m = u_b^2 C(1 - \cos \sigma t),$$

ceea ce ne arată că în timp suma energiilor ondulează ca tensiunea de borne u_c de la bornele condensatorului.

Ecuaţia diferenţială a curentului electric i, prezentată mai sus, se poate compara cu ecuaţia mişcării unei mingi care cade pe podea, sub acţiunea forţei gravitaţiei, a forţei frecării aerului şi a forţei de deformaţie a podelei (v. fig. 1.13).

Din momentul în care mingea atinge podeaua, forţa rezultantă exprimată prin acţiunea ei asupra impulsului ia forma

$$m\frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}t} = \mathcal{F}_g - ra - \frac{1}{C}\int a\mathrm{d}t,$$

în care forţa frecării cu aerul este $F_{fr} = ra$.

Forţa datorită deformaţiei podelei $\mathcal{F}_d$ ia forma

$$\mathcal{F}_d = \frac{1}{C}\int a\mathrm{d}t = \frac{1}{C}d,$$

în care d exprimă elementul de deformare a podelei. Ca urmare, ecuaţia mişcării mingii se poate pune în forma

$$\mathcal{F}_g = m\frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}t} + ra + \frac{1}{C}\int a\ \mathrm{d}t.$$

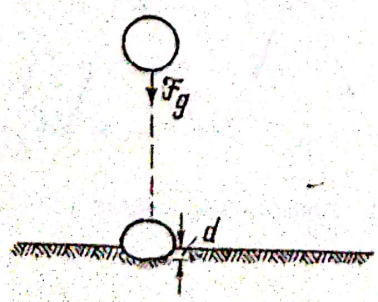


Fig. 1.13. O oscilaţie în mişcarea mingii.

Scanned with OKEN Scanner

care seamănă cu ecuaţia curentului electric din circuitul cu parametrii r, L, C conectat la tensiunea de borne constantă u_b.

Neglijîndu-se forţa frecării $rv \cong 0$ se constată că în cazul cînd

$$|\mathcal{F}_d| > |\mathcal{F}|$$

rezultă din

$$\mathcal{F}_g - \mathcal{F}_d = m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$$

că mingea se urcă în sus, aşa cum curentul electric îşi schimbă sensul în circuit.

Descărcarea condensatorului

În figura 1.14 se prezintă un condensator încărcat care se descarcă peste un circuit format din r şi L. Fie $\mathcal{E}$ intensitatea rezultantă a cîmpului electric din spaţiul ocupat de metal.

Se formează integrala $\int(\mathrm{d}l\,\mathcal{E})$; pe de o parte se obţine

$$\int_a^b (\mathrm{d}l\,\mathcal{E}) = V_a - V_b - L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t},$$

iar pe de altă parte, datorită mişcării electronilor sub acţiunea forţei $q\mathcal{E}$ rezultă

$$\int_a^b (\mathrm{d}l\,\mathcal{E}) = ir.$$

Ca urmare rezultă

$$\int_a^b (\mathrm{d}l\,\mathcal{E}) = V_a - V_b - L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} = ir.$$

În acelaşi timp însă sursa ne dă

$$\int_a^b (\mathrm{d}l\,\mathcal{E}) = V_a - V_b = \frac{Q}{C},$$

astfel că

$$\frac{Q}{C} = L\frac{\mathrm{d}i}{dt} + ri. \tag{26}$$

Nu există componenta staţionară pentru că pentru $t = \infty$ se obţine $Q = 0$.

Ca urmare, curentul i e format numai dintr-o componentă tranzitorie i_{tr}.

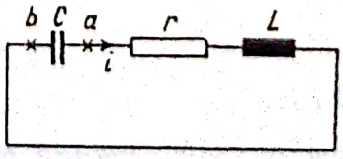


Fig. 1.14. Descărcarea condensatorului.

Scanned with OKEN Scanner

La descărcarea condensatorului se ține seama de: $\frac{dQ}{dt} = -i$ pentru că $dQ < 0$ și i pozitiv.

Ca urmare, rezultă

$$-\frac{i}{C} = L\frac{d^2i}{dt^2} + r\frac{di}{dt}$$

sau

$$\frac{d^2i}{dt^2} + \frac{r}{L}\frac{di}{dt} + \frac{i}{LC} = 0. \tag{27}$$

Ecuația diferențială seamănă cu aceea care corespunde cazului cînd circuitul cu r, L, C e conectat la o tensiune, însă membrul al doilea e făcut egal cu zero.

De data aceasta condițiile de limită sînt următoarele:

Pentru $t = 0$ avem $i = 0$; $\frac{Q}{C} = \frac{Q_1}{C} = u_{c_1}$.

Pentru $t = \infty$ avem $i = 0$; $\frac{Q}{C} = 0$.

Soluția ecuației diferențiale este de forma

$$i = i_{tr} = Ie^{pt}.$$

Ecuația caracteristică devine

$$f(p) = p^2 + \frac{r}{L}p + \frac{1}{LC} = 0$$

cu soluțiile

$$p_1 = -(\Delta_1 - \Delta_2); \quad p_2 = -(\Delta_1 + \Delta_2),$$

în care

$$\Delta_1 = -\frac{r}{2L}; \quad \Delta_2 = \sqrt{\left(\frac{r}{2L}\right)^2 - \frac{1}{LC}}.$$

Se deosebesc de asemenea trei cazuri exprimate în forma

$$\left(\frac{r}{2L}\right)^2 \gtrless \frac{1}{LC} \quad \text{sau} \quad r \gtrless 2\sqrt{\frac{L}{C}}.$$

Curentul electric i devine

$$i = I(e^{p_1 t} - e^{p_2 t}). \tag{28}$$

Primul caz

Deoarece $\Delta_1 > \Delta_2$, rezultă că $p_1 < 0$; $p_2 < 0$.

Pentru determinarea constantei I se ține seama că în momentul conectării avem $i = 0$, iar din (26) rezultă

$$u_{c_1} = \frac{Q_1}{C} = L\left(\frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t}\right)_{t=0}.$$

Avem

$$\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} = I(p_1 \mathrm{e}^{p_1 t} - p_2 \mathrm{e}^{p_2 t}),$$

$$\left(\frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t}\right)_{t=0} = I(p_1 - p_2) = I \cdot 2\Delta_2.$$

Astfel că

$$L\left(\frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t}\right)_{t=0} = u_{c_1} = LI \cdot 2\Delta_2,$$

de unde se deduce

$$I = \frac{u_{c_1}}{2\Delta_2 L},$$

respectiv

$$i = \frac{u_{c_1}}{2\Delta_2 L}(\mathrm{e}^{p_1 t} - \mathrm{e}^{p_2}). \tag{29}$$

Diferența de potențial u_c la bornele condensatorului ia forma

$$\frac{Q}{C} = -\frac{1}{C}\int i\,\mathrm{d}t + \frac{Q_0}{C} = -\frac{u_{c_1}}{2\Delta_2 LC}\left(\frac{1}{p_1}\mathrm{e}^{p_1 t} - \frac{1}{p_2}\mathrm{e}^{p_2 t}\right) + \frac{Q_0}{C}.$$

Deoarece pentru $t = 0$ avem

$$\frac{p_2 - p_1}{p_1 p_2} = -2\Delta_2 LC$$

se obține pentru $t = 0$

$$u_{c_1} = \frac{Q_1}{C} = u_{c_1} + \frac{Q_0}{C},$$

astfel că

$$\frac{Q_0}{C} = 0.$$

Al doilea caz

Deoarece avem $\Delta_2 = 0$, rezultă $p_1 = p_2 = -\Delta_1$.
Curentul electric i devine

$$i = I_1 \mathrm{e}^{p_1 t} + I_2 t\,\mathrm{e}^{p_1 t}$$

Scanned with OKEN Scanner

Pentru $t = 0,\ i = 0,\ I_1 = 0$ rezultă

$$i = I\,te^{-\Delta_1 t}\ ;\quad \frac{di}{dt} = I\,e^{-\Delta_1 t} - It\Delta_1\,e^{-\Delta_1 t}$$

pentru $t = 0$

$$u_{c_1} = L\left(\frac{di_1}{dt}\right)_{t=0} = LI,$$

astfel că

$$I = \frac{u_{c_1}}{L};\quad i = \frac{u_{c_1}}{L}\,t\,e^{-\Delta_1 t}.$$

Se remarcă că pentru $t = \infty$ apare o nedeterminare

$$i = \frac{u_{c_1}}{L}\cdot\frac{\infty}{\infty}.$$

Prin aplicarea regulei lui L'Hôpital rezultă

$$i = \frac{u_{c_1}}{L}\cdot\left(\frac{1}{\Delta_1\cdot e^{\Delta_1 t}}\right)_{t=\infty} = 0.$$

Tensiunea de borne a condensatorului u_c apare în forma

$$u_c = \frac{Q}{C} = -\frac{1}{C}\int i\,dt + \frac{Q_0}{C}$$

$$u_c = -\frac{u_{c_1}}{LC}\int t\,e^{-\Delta_1 t}\cdot dt + \frac{Q_0}{C}$$

$$u_c = \frac{u_{c_1}}{LC\Delta_1}\,e^{-\Delta_1 t}\left(t + \frac{1}{\Delta_1}\right).$$

Deoarece avem

$$\Delta_1 = \frac{r}{2L};\quad \left(\frac{r}{2L}\right)^2 = \frac{1}{LC}.$$

Mai rezultă

$$\Delta_1 = \frac{1}{\sqrt{LC}}.$$

Astfel că

$$u_c = u_{c_1}\frac{1}{\sqrt{LC}}\,e^{-\Delta_1 t}\left(t + \frac{1}{\Delta_1}\right).$$

Se verifică că pentru $t = 0$ avem $u_c = u_{c_1}$.

Scanned with OKEN Scanner

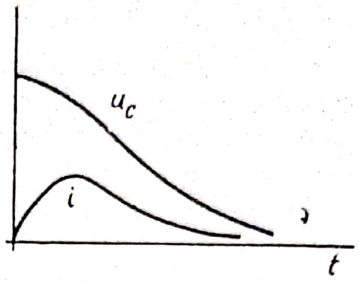


Fig. 1.15. i și u_c în funcție de t la descărcarea condensatorului pentru $r \geqslant 2\sqrt{\frac{L}{C}}$.

Figura 1.15 reprezintă curentul electric i și tensiunea de borne a condensatorului u_c, la descărcarea condensatorului, ca funcțiuni de timp pentru cazurile

$$r \geqslant 2\sqrt{\frac{L}{C}}.$$

Al treilea caz

Pentru $r < 2\sqrt{\frac{L}{C}}$ se introduce $\Delta_2 = j\sigma$, în care

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{LC} - \left(\frac{r}{2L}\right)^2}.$$

Din

$$i = \frac{Q_1}{2\Delta_2 LC}\left(e^{p_1 t} - e^{p_2 t}\right).$$

$$\frac{Q}{C} = -\frac{Q_1}{2\Delta_2 LC}\left(\frac{1}{p_1}e^{p_1 t} - \frac{1}{p_2}e^{p_2 t}\right) + \frac{Q_0}{C}.$$

Se obțin

$$i = \frac{u_{c_1}}{\sigma L}e^{-\Delta_1 t}\cdot \sin \sigma t$$

$$u_c = \frac{u_{c_1}}{\sigma\sqrt{LC}}e^{-\Delta_1 t}\cos(\sigma t - \theta).$$

2. CIRCUIT ELECTRIC CONECTAT LA O TENSIUNE DE BORNE CA FUNCȚIE SINUSOIDALĂ DE TIMP

Pentru un circuit electric cu parametrii concentrați și constanți în timp r, L, C se obține, pentru curentul electric i, ecuația integro-diferențială în forma

$$u_b = L\frac{di}{dt} + ri + \frac{1}{C}\int i\,dt + \frac{Q_0}{C}, \qquad (1)$$

în care

$$u_b = u_m \cdot \sin \omega t$$

$$\frac{Q}{C} = \frac{1}{C}\int i\,dt + \frac{Q_0}{C}. \qquad (2)$$

Figura 2.16 reprezintă tensiunea de borne u_b ca o funcție sinusoidală de timp.

Pentru a se exprima arcul în funcția sinusoidală ca o funcție de timp, se consideră arcul 2π corespunzător duratei unei oscilații de T secunde.

Ca urmare, arcul α corespunzător timpului t ia forma

$$\alpha = \frac{2\pi}{T} t = 2\pi f \cdot t = \omega t,$$

în care f reprezintă numărul de oscilații (de perioade) într-o secundă. ω este denumită frecvență circulară și reprezintă numărul de arcuri 2π într-o secundă.

Deoarece pentru $t = \infty$, curentul tranzitoriu devine nul, rezultă că $\frac{Q}{C}$ reprezintă o funcție sinusoidală de timp, astfel că constanta $\frac{Q_0}{C}$ devine nulă.

Deoarece în ecuația integro-diferențială (1) parametrii sînt constanți, $\frac{Q_0}{C}$ e nulă, iar al doilea membru al ecuației u_b apare ca o funcție sinusoidală de timp, rezultă că în dreapta cei trei termeni trebuie să reprezinte funcții sinusoidale de timp cu aceeași frecvență circulară în argument, pentru că numai o sumă de funcții sinusoidale poate să ne dea ca funcție rezultantă tot o funcție sinusoidală.

Ca urmare, se introduce curentul staționar i_{st} în forma

$$i_{st} = i_m \sin (\omega t - \varphi). \tag{3}$$

În felul acesta, atît integrala cît și derivata lui i_{st} apar ca funcții sinusoidale.

Rămîne să se determine în (3) amplitudinea i_m și defazarea φ.

În figura 2.17 se reprezintă u_b și i_{st} ca funcții sinusoidale de timp.

Curentul i e defazat înapoi față de u_b cu $\frac{\varphi}{\omega}$ în timp sau cu φ ca arc.

Curentul i devine nul sau maxim ceva mai tîrziu decît u_b.

Se introduce în ecuația integro-diferențială din (1) în regim staționar pe i_{st} din (3) care trebuie să o satisfacă, deoarece curentul tranzitoriu i_{tr} e nul.

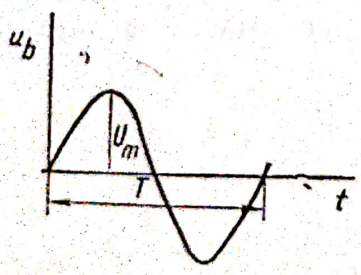


Fig. 2.16. Tensiunea de borne sinusoidală.

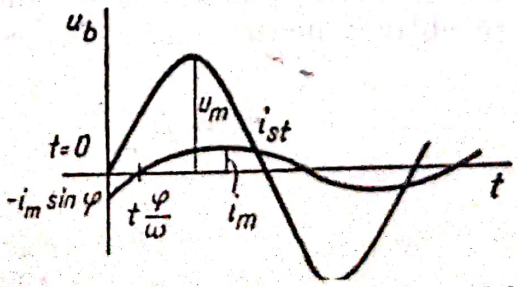


Fig. 2.17. u_b și i_{st} ca funcție sinusoidală de timp.

Scanned with OKEN Scanner

Introducînd pe (3) în (1) se obține

$$u_m \sin \omega t = L\omega i_m \cdot \cos(\omega t - \varphi) + r i_m \cdot \sin(\omega t - \varphi) - \\ - \frac{i_m}{\omega C} \cos(\omega t - \varphi), \tag{4}$$

valabilă pentru orice valoare dată lui t.

Trebuie ales timpul t așa fel pentru ca din (4) să se poată determina i_m și φ.

Se ia mai întîi $\omega t = 0$ sau 2π.

Se obține

$$0 = \omega L i_m \cos \varphi - r i_m \sin \varphi - \frac{i_m}{\omega C} \cos \varphi,$$

de unde se deduce

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{r} = \frac{x_L - x_c}{r} = \frac{x}{r} \tag{5}$$

ωL reprezintă reactanța inductivă x_L, iar $\frac{1}{\omega C}$ reprezintă reactanța capacitivă x_c.

Reactanța totală x poate fi pozitivă sau negativă, după cum x_L este mai mare sau mai mică ca x_c; ca urmare, defazarea φ care devine cunoscută poate fi pozitivă sau negativă.

Cînd defazarea φ e pozitivă, curentul electric i_{st} e defazat înapoi, iar cînd φ e negativ, curentul electric i_{st} e defazat înainte față de tensiunea de borne u_b.

Se mai introduce $\omega t = \varphi$ pentru determinarea amplitudinii i_m.

Din (4) se obține

$$u_m \cdot \sin \varphi = \omega L i_m - \frac{i_m}{\omega C},$$

de unde se deduce

$$\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right) i_m = u_m \cdot \sin \varphi.$$

$$i_m = \frac{u_m \cdot \sin \varphi}{\omega L - \frac{1}{\omega C}} = \frac{u_m}{\sqrt{r^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}} = \frac{u_m}{z}, \tag{6}$$

în care

$$\sin \varphi = \frac{\operatorname{tg} \varphi}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \varphi}} = \frac{x}{\sqrt{r^2 + x^2}}$$

$$z = \sqrt{r^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2} = \sqrt{r^2 + x^2}. \tag{7}$$

Scanned with OKEN Scanner

Mărimea z poartă denumirea *de impedanță* și este întotdeauna o mărime pozitivă.

Deoarece sub semnul radicalului apare x^2, înseamnă că o astfel de mărime e întotdeauna pozitivă.

E important de relevat că din (6) se obține

$$\frac{u_m}{i_m} = z, \tag{8}$$

ceea ce înseamnă, că impedanța z nu exprimă raportul valorilor momentane ale tensiunii u_b și curentului i, ci raportul amplitudinilor lui u_b și i.

Din diagrama din figura 2.17 se vede că raportul valorilor momentane $\frac{u}{i}$ variază între zero și infinit.

Pentru determinarea componentei tranzitorii a curentului electric ne folosim de ecuația integro-diferențială (1) cu membrul al doilea egal cu zero.

Se obține

$$0 = \frac{\mathrm{d}^2 i}{\mathrm{d}t^2} + \frac{r}{L}\,\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + \frac{i}{LC}.$$

Avem

$$i = I\,\mathrm{e}^{pt}$$

ecuația caracteristică

$$f(p) = p^2 + \frac{r}{L}\,p + \frac{1}{LC} = 0$$

ne dă

$$p_1 = -(\Delta_1 - \Delta_2); \quad p_2 = -(\Delta_1 + \Delta_2),$$

în care

$$\Delta_1 = \frac{r}{2L}; \quad \Delta_2 = \sqrt{\left(\frac{r}{2L}\right)^2 - \frac{1}{LC}}.$$

Considerăm cazul $r > 2\sqrt{\frac{L}{C}}$, adică $\Delta_1 > \Delta_2$.

Se obține

$$i_{tr} = I_1\,\mathrm{e}^{p_1 t} + I_2\,\mathrm{e}^{p_2 t}.$$

Pentru determinarea constantelor I_1 și I_2 se formează curentul electric total și se ține seama de condițiile inițiale.

Avem

$$i = i_{st} + i_{tr} = i_m \sin(\omega t - \varphi) + I_1\,\mathrm{e}^{p_1 t} + I_2\,\mathrm{e}^{p_2 t}. \tag{9}$$

Scanned with OKEN Scanner

În momentul conectării avem $t = 0$; $i = 0$; $u_c = 0$.
Se formează și tensiunea de borne la condensator u_c.

$$u_c = \frac{1}{C}\int i\,dt = -\frac{i_m}{\omega C}\cos(\omega t - \varphi) + I_1\frac{1}{p_1 C}e^{p_1 t} + I_2\frac{1}{p_2 C}e^{p_2 t}. \tag{10}$$

Ca urmare, pentru $t = 0$ se obține

$$-i_m \sin\varphi + I_1 + I_2 = 0$$

$$-\frac{i_m}{\omega C}\cos\varphi + \frac{I_1}{p_1 C} + \frac{I_2}{p_2 C} = 0.$$

Se elimină I_1 din

$$-\frac{i_m}{p_1 C}\sin\varphi + \frac{I_1}{p_1 C} + \frac{I_2}{p_1 C} = 0$$

$$\frac{i_m}{\omega C}\cos\varphi - \frac{I_1}{p_1 C} - \frac{I_2}{p_2 C} = 0.$$

Se obține

$$\frac{I_2}{C}\left(\frac{1}{p_1} - \frac{1}{p_2}\right) + \frac{i_m}{C}\left(-\frac{\sin\varphi}{p_1} + \frac{\cos\varphi}{\omega}\right) = 0,$$

de unde se deduce

$$I_2 = \frac{i_m}{2\Delta_2 LC}\left(-\frac{\sin\varphi}{p_1} + \frac{\cos\varphi}{\omega}\right) = \frac{i_m}{2\Delta_2 LC}\left(\frac{\sin\varphi}{\Delta_1 - \Delta_2} + \frac{\cos\varphi}{\omega}\right), \tag{11}$$

în care

$$\frac{p_2 - p_1}{p_1 p_2} = -2\Delta_2 LC.$$

Introducîndu-se

$$\frac{\sin\varphi}{\Delta_1 - \Delta_2}\cdot\frac{\Delta_1 + \Delta_2}{\Delta_1 + \Delta_2}$$

în (11) se obține

$$I_2 = \frac{i_m}{2\Delta_2 LC}\left(\sin\varphi\cdot LC(\Delta_1 + \Delta_2) + \frac{\cos\varphi}{\omega}\right). \tag{12}$$

În mod analog se obține

$$I_1 = -\frac{i_m}{2\Delta_2 LC}\left(\sin\varphi\cdot LC(\Delta_1 - \Delta_2) + \frac{\cos\varphi}{\omega}\right). \tag{13}$$

În cazul cînd în circuitul electric nu e conectat un condensator ($C = \infty$) se obține

$$\Delta_1 = \Delta_2, \quad I_1 = 0,$$

astfel că apare numai constanta I_2 în forma

$$I_2 = i_m \cdot \sin \varphi.$$

Curentul electric total i devine

$$i = i_m \sin (\omega t - \varphi) + i_m \sin \varphi \, e^{-\frac{r}{L} t}. \tag{14}$$

În figura 2.18 se prezintă curenții electrici i_{st}, i_{tr} și curentul total i (linia punctată). Circuitul a fost conectat în momentul $t = 0$, cînd tensiunea de borne u_b e nulă.

Se vede din diagramă necesitatea de a se considera în momentul conectării și curentul tranzitoriu i_{tr}, deoarece fără el nu se poate satisface condiția $i = 0$ în momentul conectării.

În figura 2.19 se prezintă cazul cînd circuitul e conectat la timpul t_1.

În acest caz se introduce timpul $t - t_1$ care devine nul pentru $t = t_1$. Curentul electric i_{st} și curentul electric i_{tr} devin

$$i_{st} = i_m \sin [\omega(t - t_1) + \omega t_1 - \varphi]$$

$$i_{tr} = i_m \sin (\omega t_1 - \varphi) \, e^{-\frac{r}{L}(t - t_1)}.$$

Ca urmare, se obține

$$i = i_{st} + i_{tr} = i_m \sin [\omega(t - t_1) + \omega t_1 - \varphi] - i_m \sin(\omega t_1 - \varphi) \, e^{-\frac{r}{L}(t - t_1)}.$$

Pentru $r = 0$ se obține

$$u_b = L \frac{di}{dt}$$

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\omega L}{r} = \infty; \quad \varphi = \frac{\pi}{2}$$

$$i_{st} = i_m \sin \left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right) = \frac{u_m}{\omega L} \sin \left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right).$$

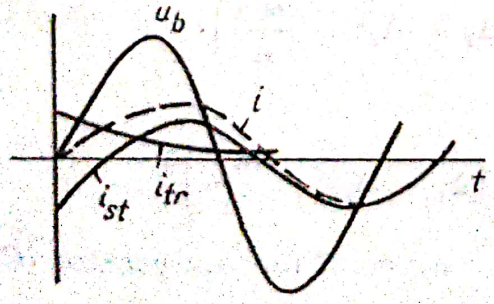


Fig. 2.18. Curenții $i_{st} + i_{tr} = i$ în circuitul electric cu r și L.

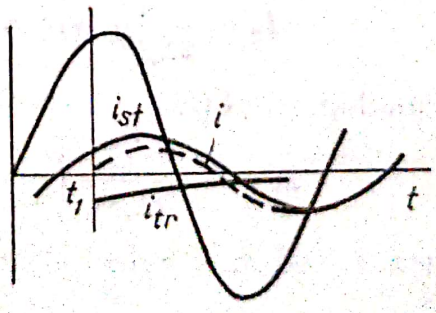


Fig. 2.19. Conectarea circuitului are loc la timpul t_1.

Scanned with OKEN Scanner

În figura 2.20 se consideră cazul cînd rezistența r e neglijabilă și conectarea are loc cînd u_b este nulă la $t = 0$.

Curentul total poate deveni dublu față de cel sinusoidal.

Folosindu-ne de ecuația diferențială $u_b = L \frac{di}{dt}$ se obține din

$$i = \int_0^{T/2} \frac{u_b}{L} \, dt,$$

în cazul cînd circuitul e conectat la $t = 0$.

$$i = 2u_m \frac{1}{\omega L} = 2i_m$$

pentru $u_b = u_m \sin \omega t$, bineînțeles, pentru un interval de timp foarte scurt.

Din figura 2.21 din stînga se vede i exprimat prin linia punctată.

Dacă circuitul e conectat la $t = \frac{T}{4}$ (fig. 2.21, dreapta), se vede că

$$i = \int_{T/4}^{T/2} \frac{u_b}{L} \, dt = -\frac{u_m}{\omega L} (\cos \omega t)_{T/4}^{T/2} = \frac{u_m}{\omega L}.$$

Curentul electric i obține valoarea maximală normală.

Considerăm cazul cînd inductivitatea L se referă la o înfășurare cu W spire și cu miez de fier, așa fel ca la curentul maxim nominal $i_m = \frac{u_m}{\omega L}$, fierul să fie saturat.

Se introduce înlănțuirea magnetică în forma $Li = k\Phi \cdot w \cdot 10^{-8}$.

Admițînd că rezistența electrică a înfășurării e neglijabilă, se obține din

$$u_b = \frac{d}{dt} (iL) = u_m \sin \omega t$$

$$Li = \int_0^{T/2} u_b \cdot dt = -\frac{u_m}{\omega} \Big| \cos \omega t \Big|_0^{T/2} = 2 \frac{u_m}{\omega}.$$

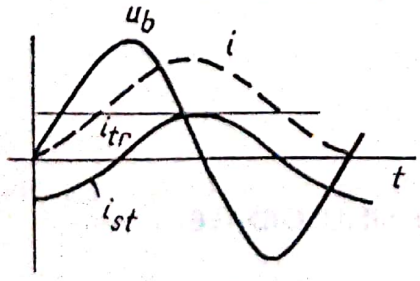


Fig. 2.20. Circuitul electric posedă numai L.

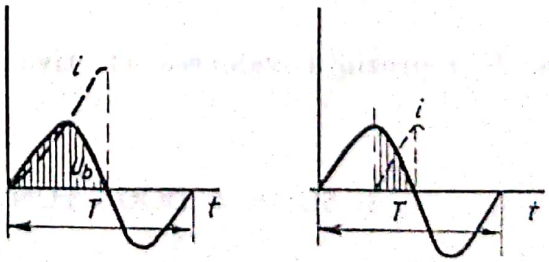


Fig. 2.21. Circuitul posedă numai L; conectarea la $t = 0$ și $t = \frac{T}{4}$.

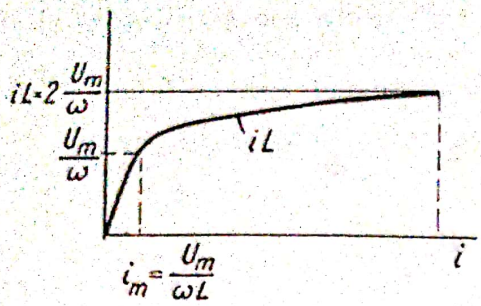


Fig. 2.22. Conectarea unei inductivități L cu miez de fier în momentul $t = 0$.

Din figura 2.22 se vede că în cazul cînd înfășurarea cu miezul de fier saturat e conectată la $t = 0$, cînd $u_b = 0$ se poate obține bineînțeles, într-un timp foarte scurt, un curent electric de cîteva ori curentul maxim nominal

$$i_m = \frac{u_m}{\omega L}.$$

În regim staționar avem

$$u_b = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(iL) = u_m \sin \omega t,$$

în care

$$iL = -(k\Phi \cdot w \cdot 10^{-8})_m \cos \omega t.$$

Astfel că

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(iL) = \omega(k\Phi \cdot w \cdot 10^{-8})_m \sin \omega t,$$

în care

$$u_m = \omega(k\Phi \cdot w \cdot 10^{-8})_m.$$

$$U = \frac{1}{\sqrt{2}} 2\pi f(k\Phi \cdot w \cdot 10^{-8})_m = 4{,}44 f \cdot k\Phi \cdot w \cdot 10^{-8},$$

în care U reprezintă valoarea efectivă.

3. SUMA A DOUĂ FUNCȚII SINUSOIDALE

În circuitele electrice, pentru curent electric alternativ, se formează mereu sume de funcțiuni sinusoidale în care, în general, în expresia frecvenței circulare apare aceeași frecvență f.

În figura 3.23 se formează suma a doi curenți electrici.

$$i_1 = i_{1m} \sin(\omega t - \varphi_1)$$

$$i_2 = i_{2m} \sin(\omega t - \varphi_2) \quad (1)$$

$$i = i_1 + i_2 = i_m \sin(\omega t - \varphi). \quad (2)$$

Curenții i_1 și i_2 posedă aceeași frecvență f.

Se cere să se determine i_m și φ.

În acest scop se folosește diagrama amplitudinilor din fig. 3.23.

Se fixează în diagramă poziția amplitudinilor i_{1m} și i_{2m} față de axa orizontală, de unde se construiește arcul $\omega t - \varphi_1$ și arcul $\omega t - \varphi_2$.

Se vede ușor din diagramă că suma funcțiilor sinusoidale reprezintă suma proiecțiilor lui i_{1m} și i_{2m} pe axa verticală din diagramă, care e egală cu proiecția diagonalei paralelogramului format din i_{1m} și i_{2m} exprimată prin i_m.

Se recomandă să nu se numească o astfel de diagramă cu denumirea de diagramă vectorială, deoarece nu e vorba de mărimi cu caracter vectorial, care sînt supuse la operații de produse scalare și vectoriale, ceea ce nu e cazul la funcțiile sinusoidale care sînt mărimi scalare.

Suma geometrică a amplitudinilor celor două funcții sinusoidale trebuie privită ca o caracteristică a funcțiilor sinusoidale.

Din diagrama din figura 3.23 rezultă

$$i_{1m}^2 + i_{2m}^2 + 2 i_{1m} i_{2m} \cos(\varphi_2 - \varphi_1) = i_m^2 \quad (3)$$

$$\operatorname{tg} \psi = \frac{i_{2m} \cdot \sin(\varphi_2 - \varphi_1)}{i_{1m} + i_{2m} \cos(\varphi_2 - \varphi_1)} \quad (4)$$

de unde se obțin i_m și $\omega t - \varphi_1 - \psi = \omega t - \varphi$

$$\varphi = \varphi_1 + \psi.$$

Se cunoaște formula matematică pentru exprimarea sumei

$$\sin \alpha + \sin \beta = \left(2 \cos \frac{\alpha - \beta}{2}\right) \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \quad (5)$$

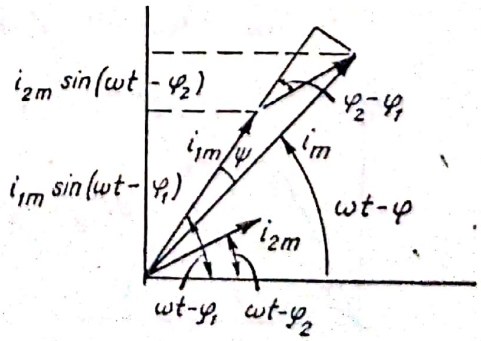


Fig. 3.23. Suma a doi curenți electrici sinusoidali i_1 și i_2.

obținută din

$$\sin(p+q)+\sin(p-q)=2\sin p\cdot\cos q=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha-\beta}{2},$$

în care

$$\alpha=p+q \qquad \alpha+\beta=2p$$
$$\beta=p-q \qquad \alpha-\beta=2q.$$

Se știe că pentru formarea sumei a două funcții sinusoidale se folosește un artificiu de calcul, introducîndu-se $\alpha=p+q$ și $\beta=p-q$.

Cu astfel de metode de adunare a două funcții sinusoidale nu se pot cerceta circuitele electrice de curenți alternativi. Ar fi potrivit să se folosească în trigonometrie diagrama amplitudinilor din figura 3.24 care reprezintă imediat amplitudinea funcției sinusoidale rezultante ($\sin\alpha+\sin\beta$) în forma $\left(2\cos\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$ și argumentul ei prin arcul $\beta+\frac{\alpha-\beta}{2}=\frac{\alpha+\beta}{2}$ așa cum apare în (5).

Cazul cînd cei doi curenți i_1 și i_2 au frecvențe diferite.

Se formează

$$i=i_{1m}\sin\omega_1 t+i_{2m}\sin\omega_2 t. \tag{6}$$

Se introduce

$$i=i_{1m}\sin\omega_1 t+i_{2m}\sin\omega_1 t-i_{2m}\sin\omega_1 t+i_{2m}\sin\omega_2 t$$
$$i=(i_{1m}-i_{2m})\sin\omega_1 t+i_{2m}(\sin\omega_1 t+\sin\omega_2 t).$$
$$\omega_1-\omega_2=\omega$$
$$\omega_1+\omega_2=\nu\omega$$
$$\omega_1=\frac{\omega}{2}(1+\nu), \tag{7}$$

astfel că

$$i=(i_{1m}-i_{2m})\sin\omega_1 t+i_{2m}\cdot 2\cos\frac{\omega_1-\omega_2}{2}t\cdot\sin\frac{\omega_1+\omega_2}{2}t$$
$$i=(i_{1m}-i_{2m})\sin\omega_1 t+i_{2m}\cdot 2\cos\frac{\omega}{2}t\cdot\sin\frac{\nu\omega}{2}t. \tag{8}$$

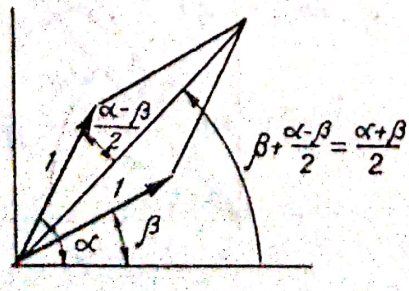


Fig. 3.24. $\sin\alpha+\sin\beta$.

Se consideră cazul cînd ω e foarte mic, ceea ce înseamnă că ν este mare față de 1.

Se obține

$$\omega_1 \cong \frac{\nu\omega}{2}.$$

Ca urmare, se introduce

$$i = \left[(i_{1m} - i_{2m}) + i_{2m} \cdot 2 \cos \frac{\omega}{2} t\right] \sin \frac{\nu\omega}{2} t.$$

Pentru $i_{1m} = i_{2m}$ (curentul i este modulat) rezultă

$$i = \left(i_{1m} \cdot 2 \cos \frac{\omega}{2} t\right) \sin \frac{\nu\omega}{2} t. \tag{9}$$

În relația (9) se consideră $\left(i_{1m} \cdot 2 \cos \frac{\omega}{2} t\right)$ ca o amplitudine în formă de funcție cosinusoidală de timp cu o frecvență circulară ω foarte mică.

În figura 3.25 se obține o proporționalitate între variația amplitudinii $\left(i_{1m} \cdot 2 \cos \frac{\omega}{2} t\right)$ și vibrația membranei telefonului.

Se ia ca exemplu

$$\omega_1 = 50 \quad \omega_1 - \omega_2 = \omega = 10 \quad \frac{\omega}{2} = 5 = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}$$

$$\omega_2 = 40 \quad \omega_1 + \omega_2 = 90 = 9\omega \quad \nu\frac{\omega}{2} = 9 \cdot 2\pi f = \frac{2\pi}{\frac{T}{9}}.$$

În figura 3.26 se prezintă cele două funcții sinusoidale

$$i_m \cdot 2 \cos \frac{\omega}{2} t \quad \text{și} \quad \sin \frac{\nu\omega}{2} t$$

precum și la început formarea produsului lor.

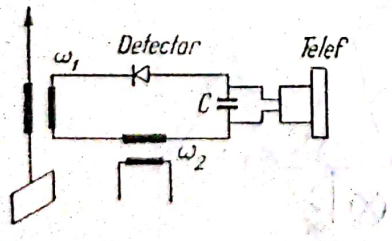


Fig. 3.25. Vibrația membranei telefonului proporțională cu amplitudinea $i_m \cdot 2 \cos \frac{\omega}{2} t$.

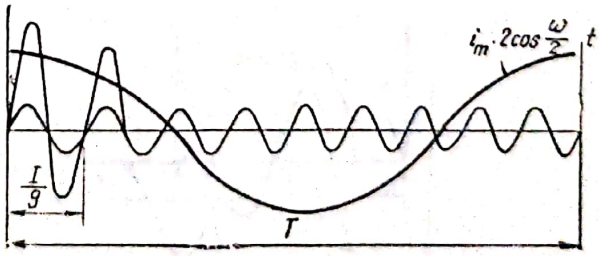


Fig. 3.26. $i = \left(i_{1m} \cdot 2 \cos \frac{\omega}{2} t\right) \sin \frac{\nu\omega}{2} t.$

4. VALORI EFECTIVE

În figura 4.27 se prezintă un curent electric i ca o funcție periodică generală de timp.

Deoarece valorile efective se măsoară în general cu instrumentele de măsurat, se consideră ca valoare efectivă a curentului acea valoare constantă închipuită care în timp de o perioadă T produce în rezistența r aceeași căldură ca și curentul momentan i.

Din

$$\int_0^T i^2 r \, dt = I^2 r T,$$

respectiv

$$\int_0^T \frac{u^2}{r} dt = \frac{U^2}{r} T$$

se obțin valorile efective pentru curent și tensiune

$$I = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T i^2 \, dt} \qquad U = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T u^2 \, dt.}$$

Asupra bobinei mobile a instrumentului construit pe principiul electrodinamometric din figura 4.28 acționează un cuplu în forma

$$(M_{\text{mom.}}^{\text{kgm}} \cdot 9{,}81)^{\text{J}} = Ci_1 i_2.$$

Cînd bobinele sînt conectate în serie se obține

$$(M_{\text{mom}}^{\text{kgm}} \cdot 9{,}81)^{\text{J}} = Ci^2.$$

Datorită inerției bobinei mobile, nu cuplul momentan, ci cuplul mijlociu în raport cu o perioadă pune bobina în mișcare de rotație. Se introduce

$$M_{d\,\text{mijl.}}^{\text{kgm}} \cdot 9{,}81 = C\frac{1}{T}\int_0^T i^2 dt = CI^2.$$

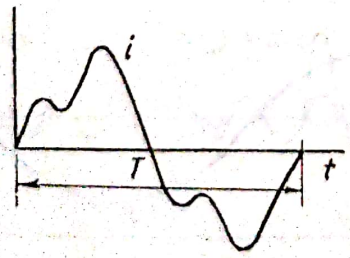


Fig. 4.27. i ca o funcție periodică nesinusoidală de timp.

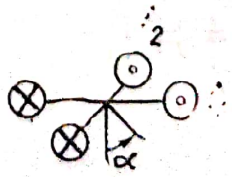


Fig. 4.28. Instrument construit pe principiul electrodinamometric.

Scanned with OKEN Scanner

În figura 4.29 se prezintă i și i^2 ca funcție de timp.
Fie $i = i_m \sin \omega t$.
Se obține

$$i^2 = i_m^2 \frac{1}{2}(1 - \cos 2\omega t)$$

$$\int_0^T i^2 \, dt = \int_0^T i_m^2 \cdot \frac{1}{2}(1 - \cos 2\omega t) \, dt = \frac{i_m^2}{2} T = I^2 T,$$

astfel că valoarea efectivă a curentului i este $I = \frac{i_m}{\sqrt{2}}$.

În mod analog $U = \frac{u_m}{\sqrt{2}}$.

Din figura 4.30 se vede cum variază $\sin \omega t$ și $\cos 2\omega t$ ca funcții de timp.

Ca urmare, $\int_0^T \cos 2\omega t \cdot dt = 0$.

Ca exercițiu, să se efectueze integrala

$$\frac{1}{T} \int_0^T \sin^2(\omega t - \varphi) \, dt.$$

Se formează

$$\cos 2(\omega t - \varphi) = \cos^2(\omega t - \varphi) - \sin^2(\omega t - \varphi) = 1 - 2\sin^2(\omega t - \varphi),$$

astfel că

$$\sin^2(\omega t - \varphi) = \frac{1}{2}[1 - \cos 2(\omega t - \varphi)]$$

$$\int_0^T \sin^2(\omega t - \varphi) \, dt = \frac{1}{2} \int_0^T [1 - \cos 2(\omega t - \varphi)] \, dt = \frac{T}{2},$$

în care

$$\int_0^T \cos 2(\omega t - \varphi) \, dt = 0.$$

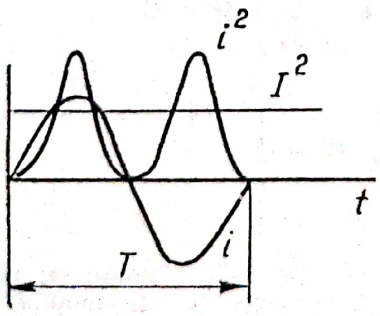


Fig. 4.29. i și i^2 ca funcție de timp.

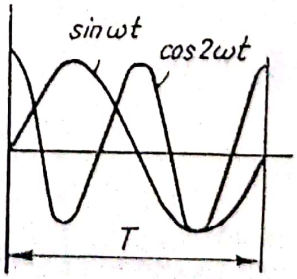


Fig. 4.30. $\sin \omega t$ și $\cos 2\omega t$.

Scanned with OKEN Scanner

Pentru a se putea măsura valoarea efectivă a curentului, mai trebuie să acționeze asupra bobinei mobile a instrumentului, din figura 4.28 și un cuplu rezistent M_{rez}. proporțional cu arcul de deviație α al bobinei datorită deformației unui resort.

Se introduce

$$M_{rez.} \cdot 9{,}81 = C_r \cdot \alpha.$$

Cînd suma cuplurilor este nulă, bobina mobilă stă pe loc. Se obține

$$(M_{mijl.} - M_{rez.}) \cdot 9{,}81 = CI^2 - C_r\alpha = 0,$$

de unde se deduce că arcul α exprimat printr-un număr de diviziuni devine proporțional cu I^2.

Avem

$$\alpha = \frac{C}{C_r} I^2.$$

Spre exemplu fie $\frac{C}{C_r} = 1$.

Pentru $I = 1\text{A}$ $\alpha = 1$.

Pentru $I = 2\text{A}$ $\alpha = 4$.

Pentru $I = 3\text{A}$ $\alpha = 9$.

Din figura 4.31 se vede că intervalele dintre $1^A, 2^A, 3^A, \ldots$ la instrumente construite pe principiul electrodinamometric, nu sînt egale.

La instrumentele magnetoelectrice (cu un magnet permanent) cuplul mijlociu este proporțional cu curentul momentan i.

Se obține

$$M_{mijl} \cdot 9{,}81 = C \cdot i$$

Un astfel de ampermetru se folosește pentru curent continuu. Pentru curent alternativ, cuplul mijlociu în raport cu o perioadă devine zero

$$M_{mijl} \cdot 9{,}81 = C \frac{1}{T} \int_0^T i \, dt = 0$$

pentru

$$i = i_m \sin \omega t.$$

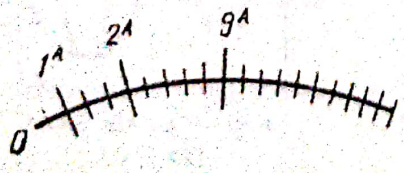


Fig. 4.31. Cadran cu numărul de diviziuni α.

Scanned with OKEN Scanner

5. CIRCUITE ÎN SERIE, ÎN PARALEL, SERIE PARALEL ȘI ÎN CONECTARE COMPLEXĂ

Circuite în conectare serie

În figura 5.32 se prezintă o conectare în serie a circuitului de utilizare conectat la tensiunea de borne U_{b1} și circuitul de distribuție de la punctul de alimentare, cu tensiunea de borne U_{b0}, pînă la circuitul de utilizare.

În figura 5.33 se formează diagrama valorilor efective pentru tensiuni și curenți electrici, care exprimă amplitudinile împărțite cu $\sqrt{2}$. Curentul I_0 e defazat înapoi cu φ_0 față de U_{b0} cînd $\varphi_0 > 0$.

Din conectarea în serie a celor două circuite se obține o sumă pentru rezistențele electrice și o sumă pentru reactanțe. În conectarea serie a celor două circuite apare $I_0 = I_1$.

Avem

$$\begin{aligned} r_L + r_1 &= r_e \\ x_L + x_1 &= x_e, \end{aligned} \tag{1}$$

în care

$$\begin{aligned} x_L &= \omega L_L & \operatorname{tg} \varphi_L &= \frac{x_L}{r_L} \\ x_1 &= \omega l - \frac{1}{\omega C} & \operatorname{tg} \varphi_1 &= \frac{x_1}{r_1} \end{aligned} \tag{2}$$

r_e și x_e reprezintă rezistența și reactanța echivalentă a celor două circuite conectate în serie.

Se obține

$$U_{b0} = I_0 \sqrt{r_e^2 + x_e^2} = I_0 z_e. \tag{3}$$

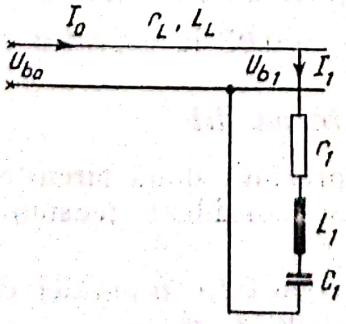


Fig. 5.32. Circuit în conectare în serie.

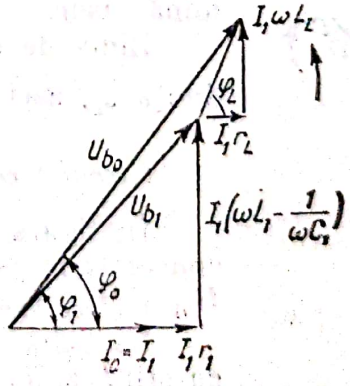


Fig. 5.33. Diagrama valorilor efective pentru tensiuni și curenți.

Scanned with OKEN Scanner

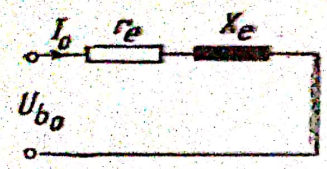


Fig. 5.34. Circuit echivalent.

În figura 5.34 se prezintă circuitul echivalent al celor două circuite conectate în serie. Se cunoaște z_e și se determină I_0.

Din

$$\operatorname{tg} \varphi_0 = \frac{x_e}{r_e} \tag{4}$$

se obține și defazarea φ_0 dintre U_{b0} și I_0.

Deoarece circuitul de distribuție în serie cu circuitul de utilizare contribuie la o micșorare a tensiunii de borne a circuitului de utilizare față de tensiunea de borne de la punctul de alimentare al rețelei, se introduce noțiunea de cădere de tensiune și pierdere de tensiune.

Prin căderea de tensiune se înțelege diferența geometrică între U_{b0} și U_{b1}.

Din figura 5.35 căderea de tensiune se exprimă prin $I_0 z_L = \overset{\frown}{U_{b0} - U_{b1}}$ ca o diferență geometrică.

Se formează suma

$$\overline{AO} + \overline{OB} = \overline{AB} = I_0 z_L.$$

Prin pierdere de tensiune se înțelege diferența algebrică

$$\overline{OC} - \overline{OA} = U_{b0} - U_{b1} = \overline{AC} \approx \overline{AD} = \Delta U.$$

Cu o rază OB, se construiește cu compasul segmentului $\overline{OC}$ egal cu U_{b0}. Dat fiindcă unghiul ψ este mic, se constată că ducînd din B o perpendiculară pe OC, se obține punctul D. Se remarcă că $\overline{AD} \cong \overline{AC}$.

Datorită acestui fapt se poate exprima pierderea de tensiune direct prin $\overline{AD}$ în loc de $\overline{AC}$, care se determină ușor.

Linia de distribuție trebuie să aibă o astfel de impedanță z_L, astfel ca $\frac{\Delta U}{U_{b0}} = 0{,}05$ la curentul nominal.

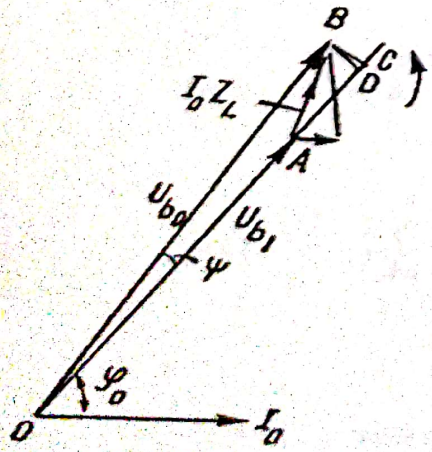


Fig. 5.35. Căderea și pierderea de tensiune.

Circuite conectate în paralel

În figura 5.36 se prezintă două circuite de utilizare conectate în paralel. Se consideră tensiunile de borne U_{b1} și U_{b2} egale.

La două circuite conectate în paralel diferă între ei curenții I_1 și I_2 și defazările φ_1 și φ_2.

Figura 5.37 reprezintă diagrama tensiunilor și curenților electrici la două circuite conectate în paralel.

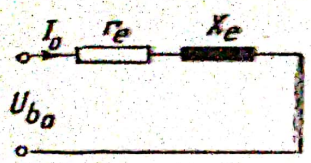


Fig. 5.34. Circuit echivalent.

În figura 5.34 se prezintă circuitul echivalent al celor două circuite conectate în serie. Se cunoaște z_e și se determină I_0.

Din

$$\operatorname{tg} \varphi_0 = \frac{x_e}{r_e} \tag{4}$$

se obține și defazarea φ_0 dintre U_{b0} și I_0.

Deoarece circuitul de distribuție în serie cu circuitul de utilizare contribuie la o micșorare a tensiunii de borne a circuitului de utilizare față de tensiunea de borne de la punctul de alimentare al rețelei, se introduce noțiunea de cădere de tensiune și pierdere de tensiune.

Prin căderea de tensiune se înțelege diferența geometrică între U_{b0} și U_{b1}.

Din figura 5.35 căderea de tensiune se exprimă prin $I_0 z_L = U_{b0} - U_{b1}$ ca o diferență geometrică.

Se formează suma

$$\overline{AO} + \overline{OB} = \overline{AB} = I_0 z_L.$$

Prin pierdere de tensiune se înțelege diferența algebrică

$$\overline{OC} - \overline{OA} = U_{b0} - U_{b1} = \overline{AC} \approx \overline{AD} = \Delta U.$$

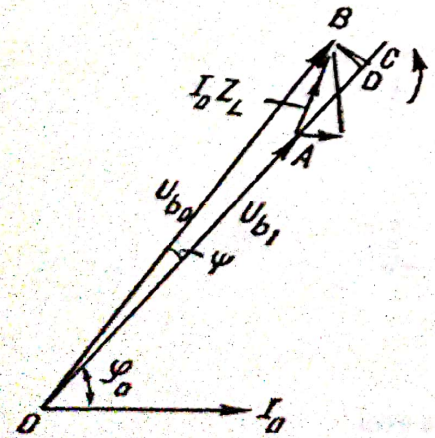


Fig. 5.35. Căderea și pierderea de tensiune.

Cu o rază OB, se construiește cu compasul segmentului $\overline{OC}$ egal cu U_{b0}. Dat fiindcă unghiul ψ este mic, se constată că ducînd din B o perpendiculară pe OC, se obține punctul D. Se remarcă că $\overline{AD} \cong \overline{AC}$.

Datorită acestui fapt se poate exprima pierderea de tensiune direct prin $\overline{AD}$ în loc de $\overline{AC}$, care se determină ușor.

Linia de distribuție trebuie să aibă o astfel de impedanță z_L, astfel ca $\frac{\Delta U}{U_{b0}} = 0{,}05$ la curentul nominal.

Circuite conectate în paralel

În figura 5.36 se prezintă două circuite de utilizare conectate în paralel. Se consideră tensiunile de borne U_{b1} și U_{b2} egale.

La două circuite conectate în paralel diferă între ei curenții I_1 și I_2 și defazările φ_1 și φ_2.

Figura 5.37 reprezintă diagrama tensiunilor și curenților electrici la două circuite conectate în paralel.

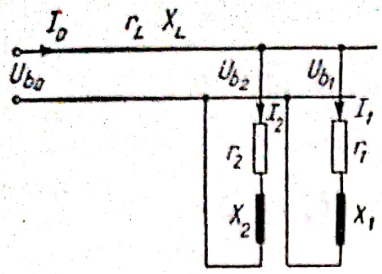


Fig. 5.36. Două circuite conectate în paralel.

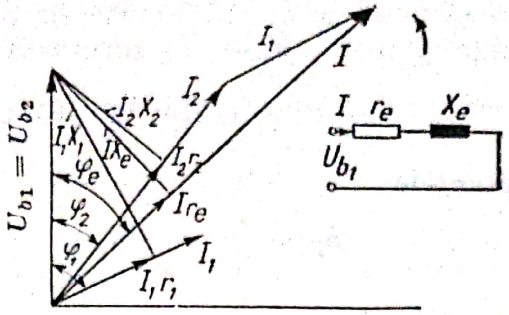


Fig. 5.37. Diagrama tensiunilor și a curenților la două circuite conectate în paralel.

În dreapta se reprezintă în figură circuitul echivalent al celor două circuite conectate în paralel cu rezistența echivalentă r_e și reactanța echivalentă x_e.

Cunoscîndu-se tensiunea de borne $U_{b1} = U_{b2}$ și r_e, x_e se obține curentul rezultant I care exprimă suma celor doi curenți, I_1 și I_2, precum și defazarea φ_e. Curentul I e defazat înapoi față de U_{b1} pentru că φ_e e pozitiv.

Determinarea impedanței echivalente z_e

Din proiectarea curenților I_1, I_2, I pe U_b și pe o axă perpendiculară pe U_b se obțin

$$I_1 \cos \varphi_1 + I_2 \cos \varphi_2 = I \cos \varphi_e$$
$$I_1 \sin \varphi_1 + I_2 \sin \varphi_2 = I \sin \varphi_e. \qquad (5)$$

Ținîndu-se seama de diagrama impedanțelor din figura 5.38, rezultă

$$U_b = U_{b1} = I_1 z_1 = I_2 z_2 = I z_e$$

$$\operatorname{tg} \varphi_1 = \frac{x_1}{r_1} \qquad \operatorname{tg} \varphi_2 = \frac{x_2}{r_2} \qquad \operatorname{tg} \varphi_e = \frac{x_e}{r_e}.$$

Ca urmare relațiile (5) iau formele

$$\frac{U_b}{z_1} \cdot \frac{r_1}{z_1} + \frac{U_b}{z_2} \cdot \frac{r_2}{z_2} = \frac{U_b}{z_e} \cdot \frac{r_e}{z_e}$$
$$\frac{U_b}{z_1} \cdot \frac{x_1}{z_1} + \frac{U_b}{z_2} \cdot \frac{x_2}{z_2} = \frac{U_b}{z_e} \cdot \frac{x_e}{z_e^2}.$$

sau

$$\frac{r_1}{z_1^2} + \frac{r_2}{z_2^2} = \frac{r_e}{z_e^2}; \qquad \frac{x_1}{z_1^2} + \frac{x_2}{z_2^2} = \frac{x_e}{z_e^2}. \qquad (6)$$

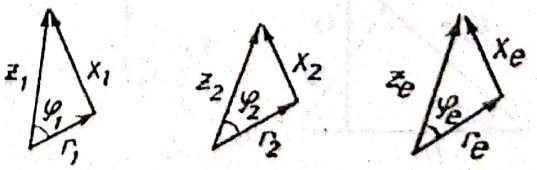


Fig. 5.38. Diagrama impedanțelor.

La conectarea a două circuite în paralel apar noi mărimi denumite conductanțe și susceptanțe. Se formează conductanțele

$$g_1 = \frac{r_1}{z_1^2} \quad g_2 = \frac{r_2}{z_2^2} \quad g_e = \frac{r_e}{z_e^2} \tag{7}$$

și susceptanțele

$$b_1 = \frac{x_1}{z_1^2} \qquad b_2 = \frac{x_2}{z_2^2} \qquad b_e = \frac{x_e}{z_e^2}.$$

La două circuite conectate în paralel se adună conductanțele și susceptanțele lor. Se obține

$$g_1 + g_2 = g_e$$
$$b_1 + b_2 = b_e. \tag{8}$$

Valorile inverse ale impedanțelor se numesc admitanțe și se notează cu y. Avem

$$\frac{1}{z_1} = y_1 \qquad \frac{1}{z_2} = y_2 \qquad \frac{1}{z_e} = y_e.$$

Rezistențele, reactanțele și impedanțele se măsoară în Ohmi; conductanțele, susceptanțele și admitanțele se măsoară în Siemens.

Cunoscîndu-se g_e și b_e se formează:

$$g_e^2 + b_e^2 = \frac{r_e^2}{z_e^4} + \frac{x_e^2}{z_e^4} = \frac{1}{z_e^2} = y_e^2 \tag{9}$$

iar din

$$g_e = \frac{r_e}{z_e^2} = r_e y_e^2; \qquad b_e = \frac{x_e}{z_e^2} = x_e y_e^2,$$

se deduce

$$r_e = \frac{g_e}{y_e^2}; \qquad x_e = \frac{b_e}{y_e^2}. \tag{10}$$

Cunoscîndu-se așadar g_e și b_e se deduce din (9) mai întîi pe y_e^2 iar din (10) se obțin r_e și x_e, respectiv $\operatorname{tg} \varphi_e = \frac{x_e}{r_e}$ și $z_e = \frac{1}{y_e}$.

Cînd se dau U_b, I și φ ca în figura 5.39 se determină r, x, z, respectiv g, b, y.

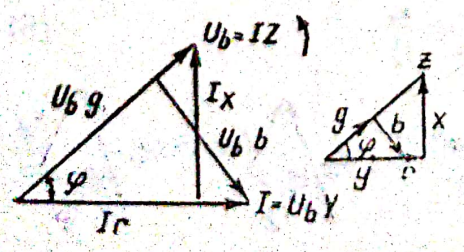


Fig. 5.39. Se cunoaște I, U_b și φ.

S-a luat cazul cînd I e defazat înapoi față de U_b adică, $\varphi > 0$, deci $x > 0$.

În figura 5.39 în dreapta se cunosc triunghiurile dreptunghice pentru impedanță și admitanță.

În cele ce urmează se prezintă următoarele patru probleme cu rezistențe, reactanțe, conductanțe și susceptanțe.

I. Se cunosc r, x; se cere să se determine g și b.

Se obțin

$$g = \frac{r}{z^2} \qquad b = \frac{x}{z^2} \qquad z^2 = r^2 + x^2$$

b are același semn ca x. Reactanța x poate fi pozitivă sau negativă, după cum reactanța inductivă e mai mare sau mai mică decît reactanța capacitivă.

II. Se cunosc g și b; se cere să se determine r și x.

Se obțin

$$r = \frac{g}{y^2} \qquad x = \frac{b}{y^2} \qquad y^2 = g^2 + b^2.$$

III. Se cunosc x și y; se cere să se determine r, g, b.

Din $\frac{1}{y} = z$ se determină impedanța z.

Din $z^2 - x^2 = r^2$ se obține rezistența r.

Din $\frac{x}{z^2} = b$; $\frac{r}{z^2} = g$ se obțin b și g.

IV. Se cunosc r și g; se cere să se determine x și b.

Mai întîi se formează

$$z^2y^2 = (r^2 + x^2) \cdot (g^2 + b^2) = 1 = r^2g^2 + r^2b^2 + x^2g^2 + x^2b^2,$$

deoarece din $\frac{x}{r} = \frac{b}{g}$ se obține $xg = rb$; relația de mai sus ne conduce la

$$r^2g^2 + 2rbxg + x^2b^2 = (rg + xb)^2 = 1$$

astfel că

$$rg + xb = 1. \tag{11}$$

Ca urmare, cînd se cunosc r și g, se obține raportul $\frac{x}{b}$ cunoscut.

Avem

$$\frac{x}{b} = \frac{r}{g}.$$

Pe de altă parte, din relația (11) se deduce produsul xb cunoscut.

Se obține $xb = 1 - rg$, de unde se obține:

$$b = \sqrt{\frac{1 - rg}{\frac{r}{g}}}, \qquad x = b\frac{r}{g}, \qquad z = \sqrt{r^2 + x^2}, \qquad y = \sqrt{g^2 + b^2}.$$

Scanned with OKEN Scanner

Circuite conectate în serie-paralel

În figura 5.36 la tensiunea de borne U_b se găsește conectat circuitul cu r_L, x_L în serie cu cele două circuite conectate în paralel.

Se obține așadar impedanța echivalentă din

$$r_{e0} = r_L + r_e, \quad x_{e0} = x_L + x_e,$$

în care r_e și x_e au fost determinate în (10),

Ca urmare, rezultă

$$z_{e0} = \sqrt{r_{e0}^2 + x_{e0}^2} = \frac{U_{b0}}{I_0}; \quad \operatorname{tg} \varphi_{e0} = \frac{x_{e0}}{r_{e0}}.$$

Circuite în conectare complexă

În figura 5.40 se prezintă un circuit electric în formă de punte la care nu există porțiuni de circuit în paralel. El e denumit circuit în conectare complexă.

Pentru cei cinci curenți electri I_1, I_2, I_3, I_4, I_5 se obțin cinci relații

$$\widehat{I_1 z_1 + I_2 z_2} = U_b$$

$$\widehat{I_3 z_3 + I_4 z_4} = U_b$$

$$\widehat{I_5 z_5 + I_2 z_2} = I_4 z_4$$

$$\widehat{I_1 + I_5} = I_2$$

$$\widehat{I_4 + I_5} = I_3.$$

Se formează sume geometrice. Cele cinci ecuații sînt geometrice. Admitem că se cunosc impedanțele z_1, z_2, z_3, z_4 și z_5.

De asemenea se cunosc tensiunea de borne U_b și curenții I_1, I_5.

Se obține imediat I_2 prin suma geometrică a curenților I_1 și I_5.

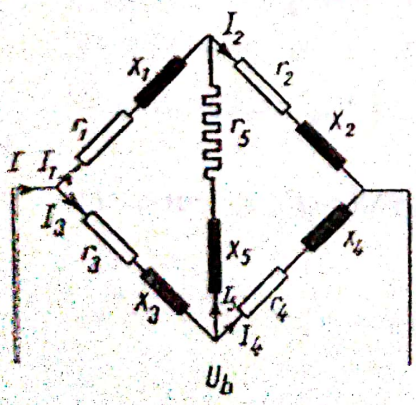


Fig. 5. 40. Circuit în conectare complexă.

Se construiesc căderile I_1z_1, respectiv I_2z_2.

Se verifică $I_1z_1+I_2z_2 = U_b$,

Din schema circuitului rezultă $I_1z_1-I_5z_5 = I_3z_3$.

Deci se determină I_5z_5 față de I_5 și se așază $-I_5z_5$ la vîrful lui I_1z_1.

De asemenea din $I_2z_2+I_5z_5 = I_4z_4$ se așază I_5z_5 la vîrful lui I_2z_2 și se obține I_4z_4.

Se verifică din nou: $I_3z_3+I_4z_4 = U_b$.

Deoarece I_3z_3 devine cunoscut se construiește și I_3 defazat înapoi cu φ_3. În figura 5.41 se construiește I_3 față de I_1.

Se formează suma $I_3+I_1 = I = I_2+I_4$ și se obține curentul total I față de U_b.

Se duce de la vîrful lui U_b o perpendiculară pe I și se obțin componentele U_b: Ir_e și Ix_e.

În felul acesta se determină impedanța echivalentă z_e și $\operatorname{tg}\varphi_e = \frac{x_e}{r_e}$.

La construirea diagramei din figura 5.41 se recomandă și se ține seama de următoarea succedare la construire.

Se construiesc mai întîi curenții I_1, I_2, respectiv I_4, I_3 cu succedarea 1, 2, 4, 3.

În felul acesta se obține din $I_1+I_5 = I_2$, respectiv din $I_4+I_5 = I_3$ același curent I_5.

Bine înțeles că I_5 poate fi opus în circuit. În acest caz se formează $I_2+I_5 = I_1$, respectiv $I_3+I_5 = I_4$.

Felul de succedare al curenților I_1, I_2, I_4, I_3 rămîne neschimbat, adică 1, 2, 4, 3.

Dacă I_2 e luat defazat înapoi față de I_1, atunci și I_3 va fi luat defazat înapoi față de I_4.

Felul de succedare la numerotare rămîne același 1, 2, 4, 3.

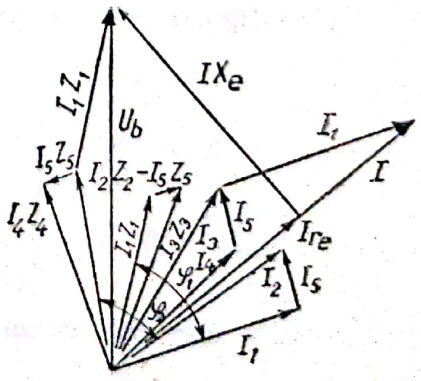


Fig. 5.41. Diagrama tensiunilor și a curenților în circuitul în conectare complexă.

După aceea se construiește $I_1 z_1$, și $I_3 z_3$ cu $-I_5 z_5$, respectiv $I_2 z_2$, $I_4 z_4$ cu $I_5 z_5$, așa fel ca defazările dintre tensiuni și curenți φ_1, φ_2, φ_3, φ_4, φ_5 să nu devină mai mari de $\pi/2$.

Se remarcă: dacă $\varphi_2 > \varphi_1$ apare $\varphi_4 > \varphi_3$.

Din acest exemplu, se constată că metoda geometrică folosită în cazul circuitului în conectare complexă devine deja complicată.

Faptul că trebuie să se efectueze sume geometrice pentru rezolvarea sistemului de ecuații prezintă un dezavantaj.

Un astfel de dezavantaj se înlătură prin folosirea metodei complexe. La aplicarea metodei complexe, se prezintă diagramele tensiunilor și ale curenților într-un plan complex, în care se păstrează sumele geometrice însă operațiile efectuate la rezolvarea sistemului de ecuații, sînt identice cu acelea folosite la ecuații algebrice.

6. NOȚIUNI DESPRE METODA COMPLEXĂ

În figura 6.42 în stînga se prezintă tensiunea U_b și curentul I în planul real ținîndu-se seama că I e dezafat înapoi față de U_b cînd $\varphi > 0$.

În dreapta se prezintă planul complex prin introducerea pe ordonată a mărimei imaginare j.

În planul complex se fixează poziția tensiunii U_b față de axa reală prin arcul α, ceea ce nu era necesar în planul real.

$\mathcal{U}_b$ se reprezintă printr-o literă caligrafică exprimînd o mărime complexă în forma

$$\mathcal{U}_b = U_b e^{j\alpha}. \tag{1}$$

Ca urmare, curentul $\mathcal{I}$ exprimat și el complex ia forma

$$\mathcal{I} = I e^{j(\alpha-\varphi)} \tag{2}$$

Din

$$\frac{\mathcal{U}_b}{\mathcal{I}} = z = \frac{U_b}{I} e^{j\varphi} = z e^{j\varphi} \tag{3}$$

se obține și impedanța în formă complexă.

În figura 6.43 se prezintă impedanța z în planul complex.

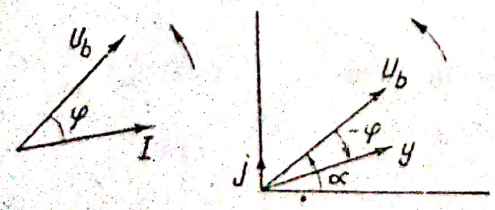


Fig. 6.42. Planul complex.

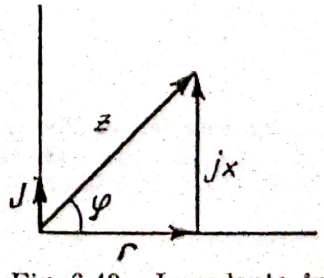


Fig 6.43. Impedanța în planul complex.

Scanned with OKEN Scanner

Se obține

$$\underline{z} = r + \mathrm{j}\, x = z\, \mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi} = z \cos \varphi + \mathrm{j}\, z \sin \varphi. \tag{4}$$

E greșit să se aplice regula lui Pitagora, formîndu-se suma pătratelor catetelor egală cu pătratul ipotenuzei, deoarece $(+\mathrm{j}\, x)^2 = -x^2$ nu poate exprima o suprafață. De altfel nu trebuie să ignorăm faptul că exprimarea mărimii complexe cu un sistem de coordonate ortogonal e arbitrară.

Datorită acestui fapt se obține valoarea impedanței z la patrat din produsul

$$\underline{z} \cdot \bar{\underline{z}} = z^2 \tag{5}$$

în care $\underline{z} = z\, \mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi}$; $\underline{z}_{\text{conjugat}} = \bar{\underline{z}} = z\, \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\varphi}$, astfel că produsul lor reprezintă valoarea impedanței la patrat.

S-a relevat că toate operațiile în planul complex se efectuiază ca și cum mărimile sînt algebrice.

Spre exemplu admitanța în planul complex se exprimă ca și cum ar fi o mărime algebrică în forma

$$\underline{y} = \frac{1}{\underline{z}} = \frac{1}{r + \mathrm{j}\, x} = \frac{r - \mathrm{j}\, x}{r^2 + x^2} = g - \mathrm{j}\, b, \tag{6}$$

în care

$$g = \frac{r}{r^2 + x^2} \qquad b = \frac{x}{r^2 + x^2}. \tag{7}$$

Se relevă că b are semnul lui x.

Ca urmare, se obține

$$\underline{z} = z\, \mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi} = r + \mathrm{j}\, x$$

$$\underline{y} = y\, \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\varphi} = \frac{1}{z} = g - \mathrm{j}\, b. \tag{8}$$

Semnul minus în expresia lui $\underline{y}$ nu trebuie confundat cu semnul lui b. După cum în $\underline{z}$ apare semnul plus indiferent dacă x e pozitiv sau negativ, tot așa în $\underline{y}$ apare semnul minus, indiferent dacă b este pozitiv sau negativ.

Din

$$\underline{z}\underline{y} = 1 = (r + \mathrm{j}\, x)(g - \mathrm{j}\, b) = rg + xb + \mathrm{j}(xg - rb) \tag{9}$$

se obține

$$\begin{aligned} rg + xb &= 1 \\ xg - rb &= 0 \end{aligned} \qquad \frac{x}{r} = \frac{b}{g}, \tag{10}$$

ceea ce pe cale obișnuită aceste relații au fost obținute cu mai mult calcul în § 5 (11).

Se relevă că în regimul sinusoidal şi valorile momentane pentru tensiuni şi curenţii electrici se pot exprima în forma complexă.

Avem

$$\mathcal{U}_b = u_m e^{j\omega t}$$
$$\mathcal{J} = \mathcal{J}_c e^{j\omega t}, \tag{11}$$

în care $\mathcal{J}_c$ se obţine din $\mathcal{U}_b = \mathcal{J}z$ în forma

$$u_m e^{j\omega t} = \mathcal{J}_c e^{j\omega t} \cdot z e^{j\varphi} = \mathcal{J}_c \cdot z \cdot e^{j\varphi} \cdot e^{j\omega t},$$

astfel că

$$u_m = \mathcal{J}_c z e^{j\varphi}; \quad \mathcal{J}_c = \frac{u_m}{z} e^{-j\varphi} = i_m e^{-j\varphi},$$

ceea ce ne dă

$$\mathcal{J} = i_m e^{j(\omega t - \varphi)}. \tag{12}$$

Cînd se trece de la valoarea momentană a curentului la valoarea momentană scrisă în forma obişnuită, se formează

$$\mathcal{J} = i_m e^{j(\omega t - \varphi)} = i_m\{\cos(\omega t - \varphi) + j \sin(\omega t - \varphi)\} \tag{13}$$

şi se ia numai componenta curentului care e înmulţită cu j.

Deci curentul electric momentan în forma obişnuită este

$$i = i_m \sin(\omega t - \varphi).$$

De altfel s-a văzut şi în diagrama amplitudinilor că proiecţia amplitudinei pe ordonată, exprimă valoarea curentului momentan.

De asemenea un curent electric sinusoidal amortizat în forma

$$i = \frac{u_b}{\sigma L} e^{-\Delta_1 t} \sin \sigma t \tag{14}$$

se exprimă în forma complexă

$$\mathcal{J} = \frac{u_b}{\sigma L} e^{-\Delta_1 t} \cdot e^{j\sigma t} = \frac{u_b}{\sigma L} e^{-(\Delta_1 - j\sigma)t}.$$

Ecuaţia diferenţială în forma complexă pentru curentul staţionar

$$L \frac{d\mathcal{J}}{dt} + r\mathcal{J} + \frac{1}{c}\int \mathcal{J}\, dt = \mathcal{U}_b,$$

în care

$$\mathcal{U}_b = u_m e^{j\omega t}; \quad \mathcal{J} = \mathcal{J}_c e^{j\omega t}$$

Scanned with OKEN Scanner

se obține

$$\left(\mathrm{j}\,\omega L + r + \frac{1}{\mathrm{j}\,\omega C}\right)\mathcal{J}_c\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t} = u_m\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}$$

sau

$$\left\{\mathrm{j}\left(\omega L - \frac{1}{\omega C} + r\right\}\mathcal{J}_c = u_m; \qquad \mathcal{Z}\mathcal{J}_c = u_m$$

$$\mathcal{J}_c = \frac{u_m}{\mathcal{Z}} = \frac{u_m}{z}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\varphi} = i_m\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\varphi}$$

astfel că

$$\mathcal{J} = i_m\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t-\varphi)}$$

în care

$$\mathcal{Z} = r + \mathrm{j}x; \qquad x = \omega L - \frac{1}{\omega C}; \qquad \mathrm{tg}\,\varphi = \frac{x}{r}.$$

7. APLICAREA METODEI COMPLEXE LA CONECTAREA CIRCUITELOR ELECTRICE

Impedanța echivalentă $\mathcal{Z}_e$ *pentru două circuite în serie*

$$\mathcal{Z}_e = \mathcal{Z}_1 + \mathcal{Z}_2 = (r_1 + r_2) + \mathrm{j}\,(x_1 + x_2) = z_e\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi_e},$$

în care

$$z_e = \sqrt{(r_1 + r_2)^2 + (x_1 + x_2)^2}\;; \qquad \mathrm{tg}\,\varphi_e = \frac{x_1 + x_2}{r_1 + r_2}. \tag{1}$$

Impedanța echivalentă $\mathcal{Z}_e$ pentru două circuite în paralel.

Soluția analitică

Din

$$\mathcal{J} = \mathcal{J}_1 + \mathcal{J}_2 = \mathcal{U}_b\left(\frac{1}{\mathcal{Z}_1} + \frac{1}{\mathcal{Z}_2}\right) = \mathcal{U}_b \cdot \frac{1}{\mathcal{Z}_e}$$

se obține

$$\frac{1}{\mathcal{Z}_1} + \frac{1}{\mathcal{Z}_2} = \frac{1}{\mathcal{Z}_e}; \qquad \mathcal{Z}_e = \frac{\mathcal{Z}_1\mathcal{Z}_2}{\mathcal{Z}_1 + \mathcal{Z}_2}$$

$$\mathcal{Z}_1\mathcal{Z}_2 = z_1 z_2\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\varphi_1 + \varphi_2)}$$

$$(r_1 + \mathrm{j}\,x_1)\,(r_2 + \mathrm{j}\,x_2) = (r_1 r_2 - x_1 x_2) + \mathrm{j}\,(x_1 r_2 + r_1 x_2)$$

$$\mathrm{tg}\,(\varphi_1 + \varphi_2) = \frac{x_1 r_2 + r_1 x_2}{r_1 r_2 - x_1 x_2}$$

Scanned with OKEN Scanner

se mai poate scrie

$$\operatorname{tg}(\varphi_1+\varphi_2)=\frac{\operatorname{tg}\varphi_1+\operatorname{tg}\varphi_2}{1-\operatorname{tg}\varphi_1\cdot\operatorname{tg}\varphi_2}=\frac{\frac{x_1}{r_1}+\frac{x_2}{r_2}}{1-\frac{x_1}{r_1}\cdot\frac{x_2}{r_2}}=\frac{x_1r_2+r_1x_2}{r_1r_2-x_1x_2}$$

$$\underline{z}_1+\underline{z}_2=(r_1+r_2)+\mathrm{j}(x_1+x_2)=z_{1+2}\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi_{1+2}}$$

în care

$$z_{1+2}=\sqrt{(r_1+r_2)^2+(x_1+x_2)^2}\;;\quad \operatorname{tg}\varphi_{1+2}=\frac{x_1+x_2}{r_1+r_2}.$$

astfel că

$$\underline{z}_e=\frac{z_1z_2}{z_{1+2}}\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\varphi_1+\varphi_2-\varphi_{1+2})}. \tag{2}$$

Soluția geometrică

În figura 7.44 se prezintă în planul complex impedanțele

$$\underline{z}_1,\ \underline{z}_2\ \text{și}\ \ \underline{z}_1+\underline{z}_2=\underline{z}_{1+2}.$$

Din

$$\underline{z}_e=\frac{\underline{z}_1\underline{z}_2}{\underline{z}_1+\underline{z}_2}$$

se obține

$$\frac{\underline{z}_e}{\underline{z}_1}=\frac{\underline{z}_2}{\underline{z}_1+\underline{z}_2}=\frac{\underline{z}_2}{\underline{z}_{1+2}}. \tag{3}$$

Relația (3) reprezintă în planul complex două triunghiuri asemenea Avem:

$$\frac{z_e}{z_1}=\frac{z_2}{z_{1+2}} \tag{4}$$

$$\varphi_e-\varphi_1=\varphi_2-\varphi_{1+2} \tag{5}$$

Rotind pe $\underline{z}_1$ din figura 7.44 pînă cînd vîrful lui $\underline{z}_1$ se găsește în A, atunci vîrful lui $\underline{z}_e$ se va găsi în D. Se crează triunghiurile asemenea ΔODA și ΔOCB. Laturile $\overline{AD}$ și $\overline{BC}$ sînt paralele. Relația (4) e satisfăcută. Ca urmare punctul D devine cunoscut, rotind pe $\underline{z}_1$ pînă în A și ducînd din A o paralelă la $\overline{BC}$ se obține D care exprimă pe $\underline{z}_e$ rotit. După ce $\overline{OD}$ devine cunoscut, se rotește triunghiul ODA înapoi cu arcul $(\varphi_1-\varphi_{1+2})$. Se constată că $\underline{z}_e$ va forma cu axa reală $\varphi_2+\varphi_1-\varphi_{1+2}$ ceea ce corespunde relației (5).

Relevăm metoda Kalantaroff pentru determinarea impedanței echivalente $\underline{z}_e$ la două circuite în paralel, pe cale geometrică (v. fig. 7.45).

Scanned with OKEN Scanner

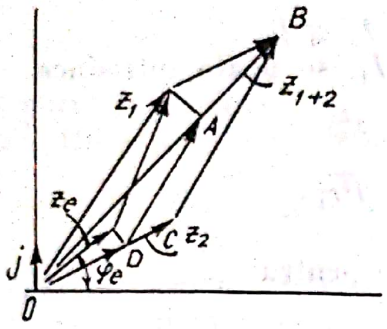


Fig. 7.44. Determinarea impedanței z_e pe cale geometrică.

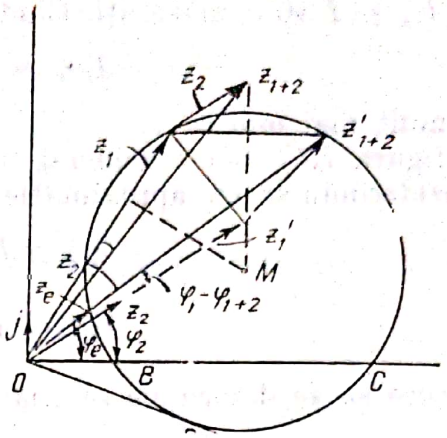


Fig. 7.45. Metoda Kalantaroff.

Din

$$z_e = \frac{z_1 * z_2}{z_1 + z_1} = \frac{z_1 \cdot z_2}{z_{1+2}}$$

se formează

$$z_e \cdot z_{1+2} = z_1 \cdot z_2 \tag{6}$$

de unde se deduc

$$z_e z_{1+2} = z_1 z_2 \tag{7}$$

$$\varphi_e + \varphi_{1+2} = \varphi_1 + \varphi_2. \tag{8}$$

Se folosește puterea unui punct față de un cerc care se exprimă prin $\overline{OD}^2 = \overline{OB} \cdot \overline{OC}$.

În planul complex din figura 7.45 se construiesc mai întîi impedanțele z_1 și z_2. Se ia în direcția lui z_1 pe z'_1 și în direcția lui z_2 pe z'_2.

În felul acesta se obține în figură z_{1+2} respectiv z'_{1+2} care posedă aceleași valori numerice $z_{1+2} = z'_{1+2}$.

Unghiul între z_1 și z_{1+2} este $\varphi_1 - \varphi_{1+2}$ egal cu unghiul dintre z'_{1+2} și z_2.

Se împart distanțele $z'_2 z_1$ și $z_1 z'_{1+2}$ în două părți egale, se duc ortogonale pe mijlocul lor și se obține centrul unui cerc în M.

Cercul taie pe z'_{1+2} și ne dă pe z_e. Relația (7) e satisfăcută. Se constată că arcul ce-l formează z_e cu axa reală este $\varphi_1 - \varphi_{1+2} + \varphi_2$ care corespunde relației (8).

În figura 7.46 se reprezintă impedanța $z_1 = r_1 + jx_1$ și se cere să se determine experimental reactanța x_1.

Se folosesc un ampermetru pentru măsurarea curentului I și un voltmetru pentru măsurarea tensiunii de borne U_b.

Avem

$$\mathcal{U}_b = \mathcal{I}_1 z_1 = \mathcal{I} z.$$

în care U_b și I sînt măsurați. Cînd r_v e mult mai mare ca r_1 atunci în

$$I_v r_v = I_1 z_1 = U_b$$

I_v este mult mai mic ca I_1.

În figura 7.47 s-a considerat cazul $I_v \ll I_1$.

Considerîndu-se cu aproximație $I \cong I_1$, se poate introduce

$$U_b^2 \cong I^2(r_1^2 + x_1^2)$$

$$x_1 = \frac{1}{I}\sqrt{U_b^2 - I^2 r_1^2}. \tag{9}$$

Se cere să se determine soluția exactă pentru x_1.

Din

$$z_e = \frac{z_1 r_v}{z_1 + r_v} = \frac{z_1 r_v e^{j\varphi_1}}{r_1 + r_v + jx_1}$$

$$z_v = \frac{z_1 r_v e^{-j\varphi_1}}{r_1 + r_v - jx_1}$$

se obține,

$$z_e \cdot \bar{z}_e = \frac{z_1^2 r_v^2}{(r_1 + r_v)^2 + x_1^2} = z_e^2 = \frac{U_b^2}{I^2}$$

astfel că

$$U_b^2\{(r_1 + r_v)^2 + x_1^2\} = I^2(r_1^2 + x_1^2)\, r_v^2,$$

sau

$$U_b^2(r_1 + r_v)^2 - I^2 r_1^2 r_v^2 = x_1^2(I^2 r_v^2 - U_b^2),$$

de unde se obține

$$x_1 = \sqrt{\frac{U_b^2(r_1 + r_v)^2 - I^2 r_1^2 r_v^2}{I^2 r_v^2 - U_b^2}} \tag{10}$$

în care se ține seama că

$$U_b = I_v r_v$$

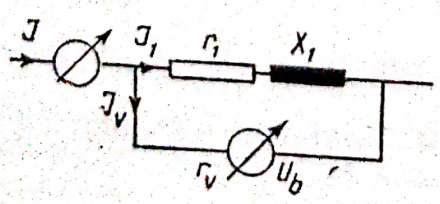


Fig. 7.46. Măsurarea reactanței x_1.

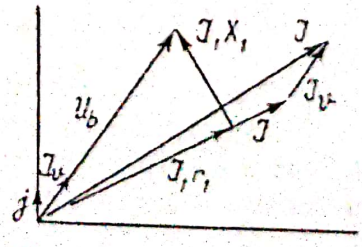


Fig. 7.47. Diagrama tensiunilor și a curenților.

Deosebim următoarele trei cazuri:

Cazul I. Cînd r_1 e neglijabil față de r_v se obține

$$x_1 = \sqrt{\frac{U_b^2 - I^2 r_1^2}{I^2 - I_v^2}} \tag{11}$$

în care r_v^2 a putut fi eliminat.

Cazul II. Dacă și I_v poate fi neglijabil față de I se obține

$$x_1 = \frac{1}{I}\sqrt{U_b^2 - I^2 r_1^2}. \tag{12}$$

Cazul III. În cazul cînd în $I_v r_v = I_1 z_1 = U_b$, I_v nu mai e mic față de I_1 și r_1 e neglijabil față de x_1, o bobină cu o reactanță inductivă mare față de rezistența electrică rezultă din fig. 7.48 că $\mathcal{J}_v$ e practic perpendicular pe $\mathcal{J}_1$, iar $z_1 \cong x_1$.

Se obține

$$I^2 \cong I_1^2 + I_v^2 = \frac{U_b^2}{x_1^2} + \frac{U_b^2}{r_v^2}$$

astfel că

$$\frac{U_b^2}{x_1^2} = I^2 - \frac{U_b^2}{r_v^2} = \frac{I^2 r_v^2 - U_b^2}{r_v^2}.$$

de unde se deduce

$$x_1 = \sqrt{\frac{U_b^2 r_v^2}{I^2 r_v^2 - U_b^2}} = \sqrt{\frac{U_b^2}{I^2 - I_v^2}} \tag{13}$$

Comparînd pe (13) cu (11) se constată că în cazul cînd r_1 este neglijabil față de x_1 se poate neglija în (11) pe $I^2 r_1^2$ față de U_b^2.

În figura 7.49 se prezintă un circuit format dintr-un condensator conectat în paralel cu o rezistență. Se cere să se determine mai întîi impedanța echivalentă z_e.

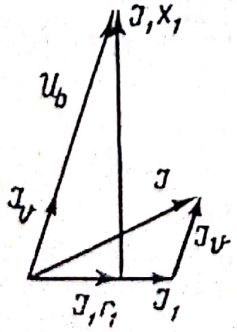


Fig. 7.48. Diagrama pentru r_1 mic față de x_1.

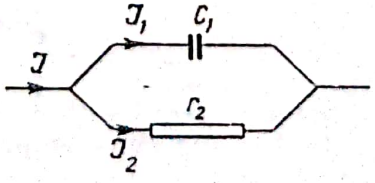


Fig. 7.49. Condensator în paralel cu o rezistență.

Avem

$$\underline{z}_1 = -\mathrm{j}\frac{1}{\omega C_1} \qquad \underline{z}_2 = r_2$$

se obține

$$\underline{z}_e = \frac{\underline{z}_1\underline{z}_2}{\underline{z}_1+\underline{z}_2} = \frac{-\mathrm{j}\frac{1}{\omega C_1}\cdot r_2}{-\mathrm{j}\frac{1}{\omega C_1}+r_2} = \frac{-\mathrm{j}\frac{1}{\omega C_1}\cdot r_2\left(r_2+\mathrm{j}\frac{1}{\omega C_1}\right)}{r_2^2+\frac{1}{(\omega C_1)^2}} =$$

$$= \frac{r_2 - \mathrm{j}r_2^2\omega C_1}{1+(\omega C_1 r_2)^2} = r_e - \mathrm{j}x_e\,, \qquad (14)$$

în care:

$$r_e = \frac{r_2}{1+(\omega C_1 r_2)^2} \qquad x_e = -\frac{r_2^2\omega C_1}{1+(\omega C_1 r_2)^2}. \qquad (15)$$

Deosebim două cazuri:

În primul caz r_2 reprezintă rezistența electrică a unui dielectric la un cablu electric; spre exemplu $r_2 = 10^7\,\Omega$ și $C = 10^{-6}$ F.

În al doilea caz r_2 e de circa $200\,\Omega$ și $C = 10^{-6}$ F, folosit la determinarea pe cale experimentală a raportului curenților primar și secundar la un transformator de curent, precum și defazarea dintre ei.

Primul caz (fig. 7.50)

Pentru $r_2 = 10^7\,\Omega$, $C_1 = 10^{-6}$ F, $\omega = 2\pi f = 314$, rezultă $r_2\omega C_1 = 3140$; 1 e neglijabil față de $(r_2\omega C_1)^2$.

Ca urmare:

$$r_e \cong \frac{1}{r_2(\omega C_1)^2} = \frac{10^5}{(314)^2} \cong 1{,}1\ \Omega.$$

$$x_e \cong -\frac{1}{\omega C_1} = -\frac{10^6}{314} = -3160\ \Omega; \qquad \underline{z}_e \cong \frac{1}{\omega C_1}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\varphi_e}\,,$$

în care $\operatorname{tg}\varphi_e = -r_2\omega C_1 = -3140$; φ_e e aproape 90°.

Rezistența dielectricului face ca φ_e să fie ceva mai mic de 90°.

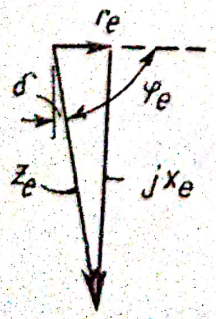


Fig. 7.50. Impedanța $\underline{z}_e$.

Se introduce

$$\underline{z}_e = -\mathrm{j}\frac{1}{\omega C_1}\cdot\frac{1}{-\mathrm{j}}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\varphi_e} = -\mathrm{j}\frac{1}{\omega C_1}\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\left(\frac{\pi}{2}-\varphi_e\right)} = -\mathrm{j}\frac{1}{\omega C_1}\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\delta},$$

în care δ e denumit unghiul de pierdere datorită efectului Joule-Lenz care se produce în cablu.

Avem

$$\delta = \frac{\pi}{2} - \varphi_e\,.$$

Scanned with OKEN Scanner

Din

$$\operatorname{tg}\delta = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \varphi_e\right) = \frac{\operatorname{tg}\frac{\pi}{2} - \operatorname{tg}\varphi_e}{1 + \operatorname{tg}\frac{\pi}{2}\cdot\operatorname{tg}\varphi_e} = \frac{1}{\operatorname{tg}\varphi_e} = \frac{\cos\varphi_e}{\sin\varphi_e} \cong \cos\varphi_e,$$

deoarece $\sin\varphi_e \cong 1$, înseamnă că în: $P^W = U_e I\cos\varphi_e$ care exprimă efectul Joule-Lenz apare $\cos\varphi_e$ egal cu $\operatorname{tg}\delta$. În felul acesta se justifică denumirea de unghi de pierdere pentru δ. Determinarea lui $\operatorname{tg}\delta$ pe cale experimentală prezintă criteriul care indică dacă cablul supus la o supratensiune va rezista sau nu.

Spre exemplu, conform normelor și prescripțiilor, un cablu de 30 kV e supus la o tensiune de 90 kV timp de 72 ore. Dacă $\operatorname{tg}\delta$ oscilează, înseamnă că materialul dielectric nu va rezista, iar cablul va fi străpuns.

În cazul doi. Se consideră rezistența $r_3 = 200\,\Omega$ și capacitatea $C = 10^{-6}$ F.

În figura 7.51 se prezintă schema pentru determinarea experimentală a raportului curenților primar și secundar $\mathcal{J}_1$ și $\mathcal{J}_2$ la un transformator de curent.

În figura 7.51 dreapta, se consideră cazul cînd curentul secundar $\mathcal{J}_2$ e defazat înapoi față de $\mathcal{J}_1$ cu un unghi mai mare de 90°. Schema ne va arăta că $\mathcal{J}_1''$ e defazat înainte de $\mathcal{J}_1'$ cu φ_e' care e foarte mic, și are aceeași valoare numerică ca $\mathcal{J}_1'$, astfel că $\mathcal{J}_1$ care reprezintă suma acestor curenți, împarte pe φ_e în două părți egale.

Pentru $r_3 = 200\,\Omega$ și $C = 10^{-6}$ F se obține $r_3\omega C = 0{,}0628$ de unde rezultă că $(r_3\omega C)^2$ față de 1 e neglijabil. Ca urmare din (15) se obține

$$r_e = r_2;\quad x_e = -r_3^2\,\omega C = 12{,}56\,\Omega.$$

În figura 7.52 se prezintă impedanța z_e și unghiul φ_e.
Se obține

$$\operatorname{tg}\varphi_e = -r_3\omega C = -0{,}0628.$$

Ca urmare se poate introduce

$$z_e = r_3 e^{-j\varphi_e} = r_3 - j\,r_3^2\omega C.$$

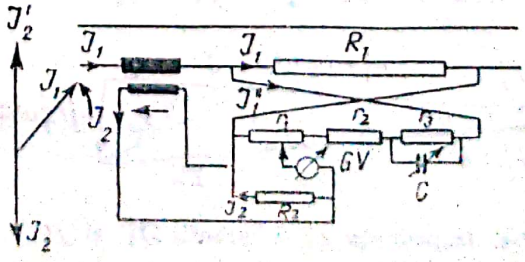


Fig. 7.51. Determinarea raportului $\frac{I_1}{I_2}$ la un transformator de curent.

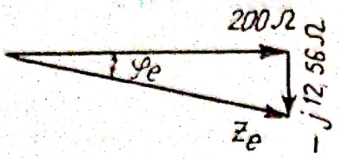


Fig. 7.52. Impedanța echivalentă $\underline{z}_e$

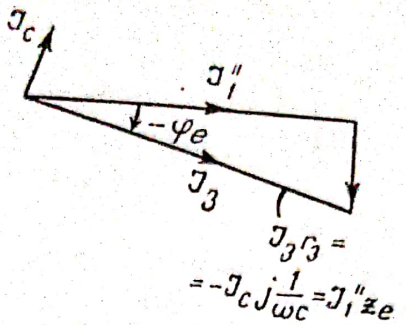


Fig. 7.53. Curenții $\mathcal{J}_3$, $\mathcal{J}_c$ și $\mathcal{J}_1''$.

Figura 7.53 ne arată poziția celor trei curenți $\mathcal{J}_3$, $\mathcal{J}_c$ și $\mathcal{J}_1''$. Din

$$\mathcal{J}_1'' = \mathcal{J}_3 + \mathcal{J}_c = \mathcal{J}_3 - \frac{\mathcal{J}_3 r_3 \omega C}{\mathrm{j}} = \mathcal{J}_3(1 + \mathrm{j} r_3 \omega C) \cong \mathcal{J}_3 \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\varphi_e},$$

deoarece

$$\sqrt{1 + (r_3\omega C)^2} \cong 1; \qquad \operatorname{tg} \varphi_e = -\, r_3 \omega C.$$

Se constată că $\mathcal{J}_1''$ e defazat față de $\mathcal{J}_3$ înainte cu φ_e și are aceeași valoare ca $\mathcal{J}_3$.

Se formează impedanța

$$\underline{z}_e' = r_1 + r_2 + z_e = r_1 + r_2 + r_3 - \mathrm{j} r_3^2 \omega C \cong R_1 \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\varphi_e'}$$

în care:

$$r_1 + r_2 + r_3 = R_1; \qquad \operatorname{tg} \varphi_e' = -\, \frac{r_3^2 \omega C}{R_1}.$$

În figura 7.54 se obține impedanța $\underline{z}_e'$ care are aceeași valoare ca R_1, însă decalată înapoi cu φ_e'.

Din

$$\mathcal{J}_1'' \underline{z}_e' = \mathcal{J}_1'' R_1 \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\varphi_e'} = \mathcal{J}_1' R_1$$

rezultă că $\mathcal{J}_1'$ se găsește în direcția lui $\underline{z}_e'$ care e egală, în valoare numerică cu $\mathcal{J}_1''$, însă este defazată înapoi cu φ_e'.

În figura 7.55 se prezintă curentul electric din circuitul primar al transformatorului de curent. Deoarece în direcția lui $\mathcal{J}_1''$ se găsește și $\mathcal{J}_2$, rezultă că defazarea dintre $\mathcal{J}_2$ și $\mathcal{J}_1$: φ_{12} devine cunoscută.

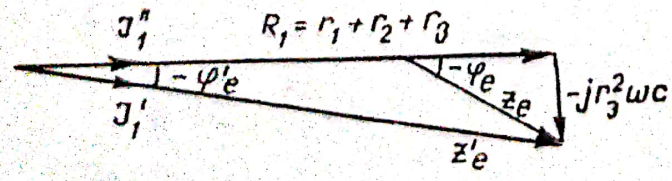


Fig. 7.54. Impedanța $\underline{z}_e'$ și curenții $\mathcal{J}_1''$ și $\mathcal{J}_1'$.

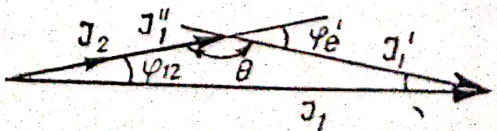


Fig. 7.55. $\mathcal{J}_1 = \mathcal{J}_1' + \mathcal{J}_1'$.

Avem

$$\mathcal{J}_1 = \mathcal{J}_1' + \mathcal{J}_1'' = \mathcal{J}_1''(1 + e^{-j\varphi_e'}) = \mathcal{J}_1'' \cdot 2e^{-j\varphi_{12}}.$$

Din

$$2\varphi_{12} + \alpha = \pi = \alpha + \varphi_e',$$

rezultă $2\varphi_{12} = \varphi_e'$

$$1 + e^{j\varphi_e'} = 1 + \cos\varphi_e' - j\sin\varphi_e' = \sqrt{(1 + \cos\varphi_e')^2 + \sin\varphi_e'^2}\, e^{-j\varphi_{12}} \cong 2e^{-j\varphi_{12}}.$$

În circuitul secundar al transformatorului de curent cu ajutorul unui galvanometru vibrator se obține relația

$$\mathcal{J}_2 R_2 = \mathcal{J}_1'' r_1 = \mathcal{J}_1 \frac{1}{2} e^{j\varphi_{12}} \cdot r_1,$$

de unde se deduce

$$\frac{\mathcal{J}_1}{\mathcal{J}_2} = \frac{2R_2}{r_1} e^{-j\varphi_{12}}.$$

Avem

$$\frac{I_1}{I_2} = \frac{2R_2}{r_1}$$

$$\operatorname{tg}\varphi_{12} = \operatorname{tg}\frac{\varphi_e'}{2}; \qquad \operatorname{tg}\varphi_e' = \frac{r_3^2\omega C}{R_1}.$$

Pentru φ_e' în minute

$$\frac{\pi}{180 \cdot 60}\varphi_{e_{min}}' \cong \frac{r_3^2\omega C}{R_1}; \qquad \varphi_{12} = \frac{1}{2}\varphi_{e_{min}}' = \frac{180 \cdot 60}{2\pi} \cdot \frac{r_3^2\omega C}{R_1}.$$

În cazul cînd curentul secundar $\mathcal{J}_2$ e defazat înainte față de $\mathcal{J}_1$ cu un unghi mai mare de $\frac{\pi}{2}$, atunci se introduce capacitatea C în paralel cu rezistențele $r_1 + r_2$.

În figura 7.56 se vede că se conectează condensatorul în paralel cu rezistențele r_1 și r_2 în serie.

Din figura 7.57 pentru impedanțe și curenți se vede că curentul electric $\mathcal{J}_{12}$, care circulă în rezistențele în serie $r_1 + r_2$, e defazat înapoi față de $\mathcal{J}_1'$, respectiv față de $\mathcal{J}_1$.

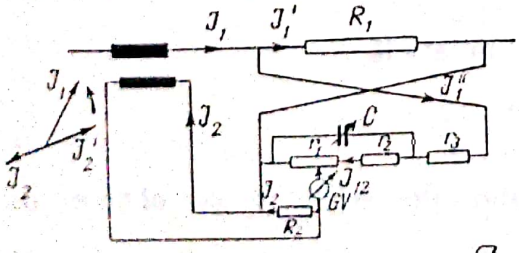


Fig. 7.56. Determinarea raportului $\frac{\mathcal{J}_1}{\mathcal{J}_2}$ cînd $\mathcal{J}_2$ e defazat înainte față de $\mathcal{J}_1$.

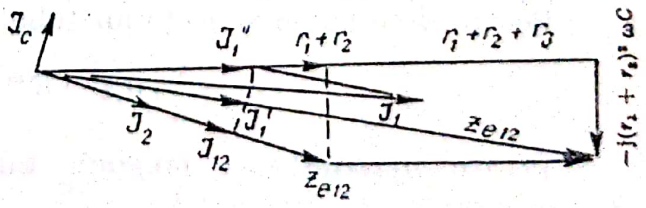


Fig. 7.57. Diagrama impedanțelor și a curenților în cazul cînd condensatorul e în paralel cu r_1 și r_2 în serie.

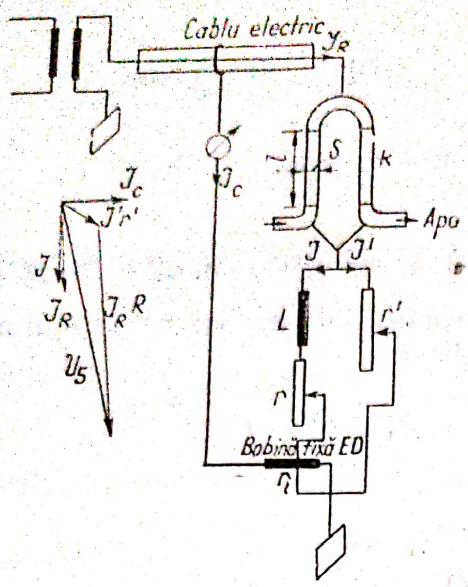


Fig. 7.58. Schema și diagrama la determinarea pierderilor dielectrice.

Deoarece $\mathcal{I}_2$ e în fază cu $\mathcal{I}_{12}$, se realizează compensarea pentru determinarea raportului $\frac{\mathcal{I}_1}{\mathcal{I}_2}$ cu ajutorul lui r_1 și C.

Figura 7.58 reprezintă schema și diagrama la determinarea pierderilor dielectrice la un cablu electric de înaltă tensiune după metoda Barbagelatta. Metoda prezintă avantajul că se poate realiza instalația fără să fie necesar un condensator fără pierderi cu azot la o presiune de 12 atm. Se folosește o rezistență electrică de apă curgătoare. Spre exemplu: pentru construirea unei rezistențe cu apă pentru 3 kW cu 40° supratemperatură, 1600 cm³/min, pentru o tensiune de 30 000 V și 0,1 A cu rezistența specifică de $\rho = 3\,000\,\Omega\text{cm}^2/\text{cm}$, cu densitatea de curent 6 cm²/1A se obține lungimea l_{cm} a coloanei de apă în tubul de sticlă și secțiunea coloanei de apă S_{cm^2} în felul următor:

Din

$$\frac{30\,000^{V}}{0{,}1^{A}} = 300\,000^{\Omega} = R^{\Omega}$$

se obține rezistența R.

Pentru determinarea secțiunii tubului de sticlă S

$$S = \frac{1}{2} \cdot 0{,}1^{A} \cdot 6^{cm^2/1A} = 0{,}3 \text{ cm}^2.$$

Pentru determinarea lungimii tubului de sticlă l se obține din

$$2 \cdot 300\,000^{\Omega} = \rho \frac{l}{S} = 3\,000 \frac{l_{cm}}{0{,}3}$$

$$l = 60 \text{ cm}.$$

Puterea consumată este $30\,000^{V} \cdot 0{,}1 = 3\,000^{W}$.

Se folosește un instrument construit pe principiul electrodinamometrului ca un wattmetru (ED) cu scopul de a se verifica că $\mathcal{I}_c$ și $\mathcal{I}$ sînt ortogonali. Instrumentul trebuie să arate valoarea zero. Prin bobina fixă circulă curentul $\mathcal{I}_c$, prin bobina mobilă circulă curentul $\mathcal{I}$.

Se folosește o inductivitate L de circa 0,05 H, rezistențele r și r' de circa 1 500 Ω.

Din schema din figură, se obțin următoarele relații:

$$\mathcal{U}_b = \mathcal{I}_R \cdot R + \mathcal{I}' r = \mathcal{I}_c \left(\frac{1}{j\omega C} + r_f \right)$$

$$\mathcal{I}' r' = \mathcal{I}(r + j\omega L) ; \qquad \mathcal{I}_R = \mathcal{I} + \mathcal{I}'.$$

Din prima relație se elimină $\mathcal{I}_R$ și $\mathcal{I}'$ și se obține o relație în care apare numai $\mathcal{I}$. Avem

$$(\mathcal{I} + \mathcal{I}')\, R + \mathcal{I}' r' = \mathcal{I} R + \mathcal{I}'(R + r') =$$

$$= \mathcal{I}\left[R + \frac{r + j\omega L}{r'} \cdot r' \left(\frac{R}{r'} + 1 \right) \right] = \mathcal{I}_c \left(\frac{1}{j\omega C} + r_f \right) = \mathcal{I} k j \frac{1 + j\omega C r_f}{j\omega C}.$$

În exemplul din figura 7.58 s-a exprimat impedanța z_e a unui condensator cu pierderi dielectrice în forma:

$$z_e = -j \frac{1}{\omega C} e^{j\delta} = \frac{1}{j\omega C\, e^{-j\delta}} = \frac{1}{j\omega \underline{C}},$$

în care

$$\underline{C} = C e^{-j\delta}$$

și

$$\mathcal{I}_c = \mathcal{I} k j$$

stabilit cu ajutorul electrodinamometrului.

Se obține

$$R + (r + j\omega L) \left(\frac{R}{r'} + 1 \right) = k \frac{1 + j\omega C r_f}{\omega C}$$

de unde se deduce

$$k = \frac{\omega C \left[R + (r + j\omega L) \left(\frac{R}{r'} + 1 \right) \right]}{1 + j\omega C r_f},$$

în care

$$\frac{1}{1 + j\omega C r_f} = \frac{1}{1 + j\omega C\, e^{-j\delta} \cdot r_f} = \frac{1}{1 + j\eta\, e^{-j\delta}} = \frac{1}{1 + j\eta}$$

$$\omega C r_f = \eta = 314 \cdot 0{,}9 \cdot 10^{-6}\ \mathrm{F} \cdot 10\,\Omega = 0{,}00282 ; \qquad e^{-j\delta} \cong 1.$$

$$\frac{1 - j\eta}{1 + \eta^2} = \frac{\sqrt{1 + \eta^2}\, e^{-j\eta}}{1 + \eta^2} = \frac{e^{-j\eta}}{\sqrt{1 + \eta^2}}.$$

Scanned with OKEN Scanner

Ca urmare k devine

$$k = \frac{\omega C\, e^{-j\delta} \cdot e^{-j\eta}}{\sqrt{1+\eta^2}} \left[R + (r + j\omega L)\left(\frac{R}{r'} + 1\right)\right].$$

Se introduce $e^{-j(\delta+\eta)} = \cos(\delta+\eta) - j\sin(\delta+\eta)$, astfel că

$$k = \frac{\omega C}{\sqrt{1+\eta^2}} \cos(\delta+\eta)\,[1 - j\,\mathrm{tg}\,(\delta+\eta)] \cdot \left[R + (r + j\omega L)\left(\frac{R}{r'} + 1\right)\right].$$

Deoarece k exprimă o valoare reală, înseamnă că valoarea imaginară din expresia de mai sus trebuie să devină nulă.

Se obţine

$$-\mathrm{tg}\,(\delta+\eta)\left[R + r\left(\frac{R}{r'} + 1\right)\right] + \omega L\left(\frac{R}{r'} + 1\right) = 0,$$

de unde se deduce

$$\mathrm{tg}\,(\delta+\eta) = \frac{\omega L\left(\frac{R}{r'} + 1\right)}{r\left(\frac{R}{r'} + 1\right) + R} = \frac{\omega L}{r + \dfrac{R}{1 + \dfrac{R}{r'}}} = \frac{\omega L}{r + r'},$$

în care

$$\frac{R}{1 + \dfrac{R}{r'}} = \frac{Rr'}{r' + R} \cong r',$$

deoarece R e mare faţă de r'.

Se obţine experimental $\mathrm{tg}\,(\delta+\eta) \cong \delta + \eta$, de unde se scade η.

În figura 7.59 se prezintă puntea Schering pentru determinarea capacităţii C şi a pierderilor dielectrice.

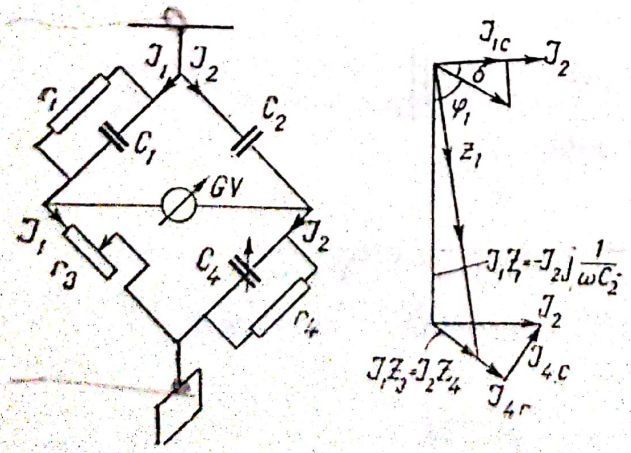


Fig. 7.59. Schema şi diagrama la determinarea pierderilor dielectrice.

Se foloseşte un galvanometru vibrator pentru echilibrarea punţii la curent alternativ.

Avem

$$\underline{z}_1 = -\mathrm{j}\frac{1}{\omega C_1}e^{\mathrm{j}\delta} \qquad \varphi_1 = \frac{\pi}{2} - \delta \qquad \operatorname{tg}\varphi_1 = \frac{1}{\operatorname{tg}\delta}$$

$$\underline{z}_2 = -\mathrm{j}\frac{1}{\omega C_2}; \qquad \underline{z}_3 = r_3$$

$$\underline{z}_4 = \frac{r_4}{(r_4\omega C_4)^2+1} - j\frac{r_4^2\omega C_4}{(r_4\omega C_4)^2+1} \cong r_4 - \mathrm{j}(r_4^2\omega C_4).$$

$$\operatorname{tg}\varphi_4 = -\operatorname{tg}\delta = r_4\omega C_4.$$

Din

$$\mathcal{J}_1\underline{z}_1 = \mathcal{J}_2\underline{z}_2$$

$$\mathcal{J}_1\underline{z}_3 = \mathcal{J}_2\underline{z}_4$$

se obţine

$$\underline{z}_4 = \frac{\underline{z}_2\underline{z}_3}{\underline{z}_1} = \frac{1}{\omega C_2}r_3\omega C_1 = r_3\frac{C_1}{C_2}.$$

Pentru

$$r_4 = \frac{1\,000}{\pi}, \qquad \omega = 2\pi f, \qquad f = 50$$

se obţine $r_4\omega C_4 = 10^5\ C_4^{\mathrm{F}}$.

Se măsoară capacităţi între $30 - 30 \cdot 10^3$ cm.

$C_2 = 10^{-10}$ F condensator fără pierderi dielectrice; un cilindru cu azot la 12 atm pentru 180 kV.

C_4 variază între 0,01 — 1,11 μF.

r_3 variază între 0 — 1 110 Ω.

Avem

$$C_{\mu\mu\mathrm{F}} \cdot 0{,}9 = C_{\mathrm{est.}}; \qquad C_2 = 10^{-10} \cdot 10^{12}\,\mathrm{pF}; \qquad 100_{\mathrm{pF}} \cdot 0{,}9 = 90\ \mathrm{cm}.$$

Se obţine:

$$\underline{z}_4 \cong r_4 = r_3\frac{C_1}{C_2},$$

de unde se determină capacitatea C_1, iar din

$$\operatorname{tg}\delta \cong \delta = r_4\omega C_4$$

se obţine unghiul de pierdere.

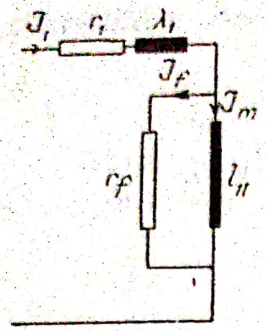


Fig. 7.60. Un circuit feromagnetic cu pierderi în fier.

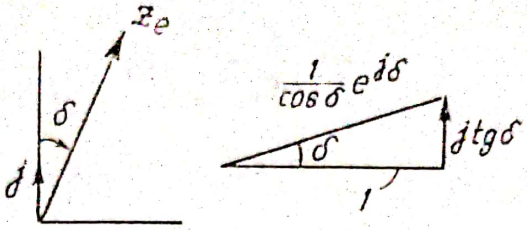


Fig. 7.61. $1 + j \operatorname{tg} \delta$ și z_e.

Figura 7.60 reprezintă un circuit feromagnetic cu pierderi în fier.

Se consideră în schemă rezistența înfășurării și inductivitatea fluxului de dispersie separate de inductivitatea l_{11} care corespunde fluxului magnetic din miezul de fier în care au loc curenții electrici turbionari.

Impedanța echivalentă a celor două circuite în paralel este

$$z_e = \frac{j\omega l_{11} \cdot r_f}{j\omega l_{11} + r_f} = \frac{j\omega l_{11}}{1 + \frac{j\omega l_{11}}{r_f}} = \frac{j\omega l_{11}}{1 + j \operatorname{tg} \delta}.$$

Din figura 7.61 se obține

$$1 + j \operatorname{tg} \delta = \frac{1}{\cos \delta} e^{j\delta},$$

astfel că

$$z_e = \omega l_{11} \cos \delta \cdot e^{j\left(\frac{\pi}{2} - \delta\right)}.$$

Experimental se obține la mersul în gol la un transformator diagrama din figura 7.62.

Se determină experimental P_0^{W}, $U_{b_1}^{V}$, I_{10}^{A}, r_1^{Ω}.

Deoarece se cunoaște la mersul în gol tensiunea indusă în secundar măsurată cu voltmetrul U_{Φ_2}, se obține din

$$\frac{U_{\Phi_1}}{U_{\Phi_2}} = \frac{w_1}{w_2}$$

tensiunea indusă în primar U_{Φ_1}. Se construiește un arc de cerc cu raza U_{Φ_1} și perpendiculară pe $I_{10}r_1$ e tăiată în P. În felul acesta se obține $I_{10}\omega\lambda_1$. Se duce o perpendiculară pe U_{Φ_1} și se obține curentul de magnetizare I_m respectiv I_f care corespunde pierderilor în fier.

Scanned with OKEN Scanner

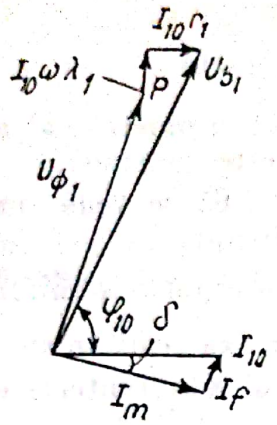


Fig. 7.62. Determinarea experimentală a mărimilor $\omega\lambda_1$ și δ.

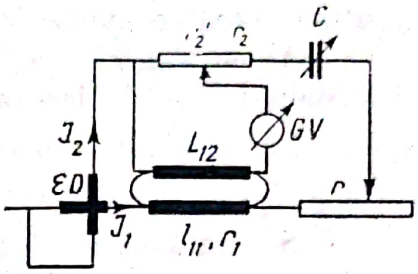


Fig. 7.63. Măsurarea inductivității reciproce L_{12}.

Avem

$$U_{\Phi_1} \cdot I_f = P_f.$$

Din

$$I_m \cdot \omega l_{11} = U_{\Phi_1}; \quad I_f \cdot r_f = U_{\Phi_1}.$$

Se obține

$$\frac{\omega l_{11}}{r_f} = \frac{I_f}{I_m} = \operatorname{tg} \delta.$$

În felul acesta se determină impedanța echivalentă z_e.

În figura 7.63 se prezintă măsurarea inductivității reciproce cu ajutorul unei capacități variabile și a unei rezistențe r variabile.

În circuit se găsește un instrument construit pe principiul electrodinamometric. Se reglează r și C pînă cînd instrumentul arată zero. Acest fapt arată că $\mathcal{J}_1$ și $\mathcal{J}_2$ sînt ortogonali între ei.

După ce s-a obținut $\mathcal{J}_2$ ortogonal pe $\mathcal{J}_1$ cu ajutorul rezistenței r și capacității C, se mișcă cursorul pe rezistența r_2' pînă cînd galvanomentrul vibrator arată zero.

În acest caz se obține

$$\mathcal{J}_2 r_2' = \mathcal{J}_1 \mathrm{j}\omega L_{12}.$$

Pe de altă parte din diagrama din figura 7.64 rezultă

$$-\mathcal{J}_2 \mathrm{j} \frac{1}{\omega C} = \mathcal{J}_1(r_1 + r).$$

Ca urmare rezultă

$$-\frac{r_2'\omega C}{\mathrm{j}} = \frac{\mathrm{j}\omega L_{12}}{r_1 + r}$$

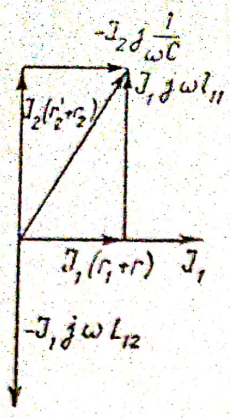


Fig. 7.64. Diagrama curenţilor şi a tensiunilor în circuit din fig. 7.63.

astfel că

$$L_{12} = r_2'(r_1 + r)\, C.$$

Se cere să se determine locul geometric al admitanţei y atunci cînd se cunosc r, L şi L este constant.

Avem $z = r + jx$. În figura 7.65 se vede cum vîrful impedanţei z se deplasează pe o dreaptă.

La impedanţa z cu vîrful în P corespunde admitanţa $y = \frac{1}{z} = g - jb$ cu vîrful în P' făcînd cu axa reală un arc egal cu $-\varphi$.

Se arată că locul geometric al admitanţei y este un cerc cu diametrul egal cu $\frac{1}{x}$.

Din

$$\frac{x}{r} = \frac{b}{g} \quad \text{şi} \quad g^2 + b^2 = y^2 = \frac{1}{x^2 + r^2} = \frac{1}{x^2 + x^2\frac{g^2}{b^2}} = \frac{b^2}{x^2(g^2 + b^2)}$$

rezultă

$$(g^2 + b^2)^2 = \frac{b^2}{x^2}$$

sau

$$g^2 + b^2 = \frac{b}{x}$$

sau

$$g^2 + b^2 - \frac{b}{x} = 0$$

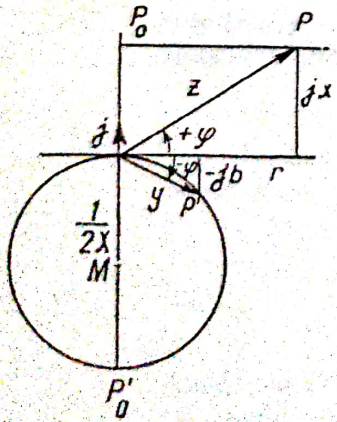


Fig. 7.65. Cercul admitanţei.

ceea ce reprezintă ecuaţia unui cerc cu centrul în M pe ordonată şi cu raza $\frac{1}{2x}$ din figura 7.66.

Exprimîndu-se ecuaţia cercului obţinut în forma generală

$$(g - g_c)^2 + (b - b_c)^2 = \rho^2$$

se constată că pentru $g_c = 0$ ca în figura 7.66 se obţine

$$g^2 + (b - b_c)^2 = \rho^2$$

cu

$$b_c = \frac{1}{2x} \quad \text{şi} \quad \rho = \frac{1}{2x},$$

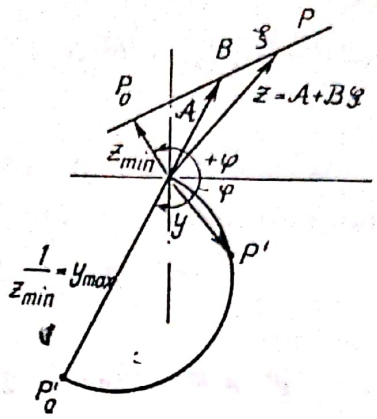


Fig. 7.66. Ecuaţia cercului admitanţei pentru $z = \mathcal{A} + \mathcal{B}\zeta$.

de unde rezultă

$$g^2 + b^2 - \frac{b}{x} = 0.$$

În figura 7.66 se consideră impedanţa z cu vîrful pe o dreaptă în forma $z = \mathcal{A} + \mathcal{B}\zeta$, în care ζ e variabilă.

Se cere să se exprime ecuaţia cercului.

Se formează

$$z = \mathcal{A} + \mathcal{B}\zeta = A_1 + \mathrm{j}\,A_2 + B_1\zeta + \mathrm{j}\,B_2\zeta = (A_1 + B_1\zeta) + \mathrm{j}(A_2 + B_2\zeta).$$

Din

$$1 = yz = (g - \mathrm{j}\,b)\{A_1 + B_1\zeta + \mathrm{j}(A_2 + B_2\zeta)\}$$

se obţine

$$1 = gA_1 + gB_1\zeta + bA_2 + bB_2\zeta$$
$$0 = gA_2 + gB_2\zeta - bA_1 - bB_1\zeta$$

sau

$$(gB_1 + bB_2)\,\zeta = 1 - gA_1 - bA_2$$
$$(gB_2 - bB_1)\,\zeta = bA_1 - gA_2.$$

Se elimină ζ

$$(gB_1 + bB_2)(bA_1 - gA_2) = (gB_2 - bB_1)(1 - gA_1 - bA_2).$$

Se efectuiază operaţiile în forma

$$\begin{aligned} &gbB_1A_1 - g^2B_1A_2 + b^2B_2A_1 - gB_2 + bB_1 \\ &- bgB_2A_2 + g^2B_2A_2 - b^2B_1A_2 \\ &+ gbB_2A_2 \\ &- bgB_1A_1 \qquad\qquad = 0 \end{aligned}$$

de unde rezultă

$$g^2(B_2A_1 - B_1A_2) + b^2(B_2A_1 - B_1A_2) - gB_2 + bB_1 = 0$$

sau

$$(g^2 + b^2)(B_2A_1 - B_1A_2) - gB_2 + bB_1 = 0.$$

Introducîndu-se ecuaţia cercului în forma

$$(g - g_c)^2 + (b - b_c)^2 = \rho^2$$

sau

$$g^2 + b^2 - 2gg_c - 2bb_c = \rho^2 - g_c^2 - b_c^2$$

şi comparînd-o cu ecuaţia de mai sus, rezultă

$$g_c = \frac{1}{2} \cdot \frac{B_2}{B_2A_1 - B_1A_2} \qquad b_c = -\frac{1}{2} \cdot \frac{B_1}{B_2A_1 - B_1A_2}.$$

Din

$$\rho^2 - g_c^2 - b_c^2 = 0$$

se deduce ρ.

Se poate întîmpla ca $B_2A_1 - B_1A_2 < 0$, astfel că se obţine $g_c < 0$ şi $b_c > 0$.

În cazul cînd se obţine impedanţa ε în forma

$$\varepsilon = \frac{\mathcal{A} + \mathcal{B}\zeta}{\mathcal{C} + \mathcal{D}\zeta} = \mathcal{E} + \frac{\mathcal{F}}{\mathcal{C} + \mathcal{D}\zeta}$$

se obţin $\mathcal{E}$ şi $\mathcal{F}$ din

$$\mathcal{A} + \mathcal{B}\zeta = \mathcal{C}\mathcal{E} + \mathcal{D}\mathcal{E}\zeta + \mathcal{F}.$$

Se formează

$$\mathcal{A} = \mathcal{C}\mathcal{E} + \mathcal{F} \qquad \mathcal{B} = \mathcal{D}\mathcal{E},$$

astfel că

$$\mathcal{F} = \mathcal{A} - \frac{\mathcal{B}}{\mathcal{D}}\mathcal{C} \qquad \mathcal{E} = \frac{\mathcal{B}}{\mathcal{D}}.$$

Spre exemplu fie

$$\varepsilon = \mathcal{E} + \frac{1}{\frac{\mathcal{C}}{\mathcal{F}} + \frac{\mathcal{D}}{\mathcal{F}}\zeta} = \mathcal{E} + \frac{1}{\mathcal{G} + \mathcal{H}\zeta}$$

în care

$$\varepsilon' = \frac{1}{\mathcal{G} + \mathcal{H}\zeta} \qquad \mathcal{G} + \mathcal{H}\zeta = \psi'$$

Scanned with OKEN Scanner

ca în figura 7.67. Din figură se vede că locul geometric al vîrfului lui z' e un cerc.

De asemenea rezultă din figura 7.67 și locul geometric al impedanței z care e același cerc cu $\mathcal{C}$ luat cu originea în O (cazul impedanței la transformator).

În acest fel se vede cum se aplică calculul complex în cercetarea circuitelor electrice în regim sinusoidal. În cele ce urmează, se va constata că un astfel de calcul poate fi aplicat și în cazul mișcării plane a unei particule de masă m.

Se introduc viteza și accelerația care sînt mărimi vectoriale în planul complex.

Exprimarea vitezei și accelerației în forma complexă este posibilă datorită faptului că vectorul de poziție se prezintă foarte ușor în forma complexă în cazul unei mișcări plane.

Din figura 7.68 se vede cum se reprezintă viteza și accelerația unei particule de masă m, în planul real.

Avem

$$v = \frac{dr}{dt} = \frac{d}{dt}\{r\bar{r}\} = \dot{r}\bar{r} + r\dot{\theta}[\bar{\delta}\bar{r}] \tag{1}$$

$$a = \frac{dv}{dt} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\bar{r} + \frac{1}{r}\frac{d}{dt}(r^2\dot{\theta})[\bar{\delta}\bar{r}] \tag{2}$$

în care vectorul $\bar{\delta}$ e ortogonal pe planul format din r și dr.

Introducîndu-se momentul cinetic $\mathcal{K}$ și momentul forței $\mathcal{F}$ în raport cu punctul fix din plan O, se obține

$$\mathcal{K} = [rmv] \qquad \mathcal{M} = [r\mathcal{F}], \tag{3}$$

de unde se deduce

$$\mathcal{M} = \frac{d\mathcal{K}}{dt}. \tag{4}$$

Cînd $\mathcal{M} = 0$ rezultă că momentul cinetic e constant. Înseamnă că forța $\mathcal{F}$ sau e nulă, sau e dirijată către O (mișcarea Kepleriană)

În cazul mișcării uniform circulară, în care apare numai o forță centripetă, avem $\mathcal{M} = 0$; momentul cinetic $\mathcal{K}$ e constant.

Avem

$$\mathcal{K} = [rmv_c] = mr^2\dot{\theta}\bar{\delta} = \text{const.} \tag{5}$$

Prin introducerea vectorului de poziție r în planul complex din figura 7.69 în forma

$$r = re^{j\theta} \tag{6}$$

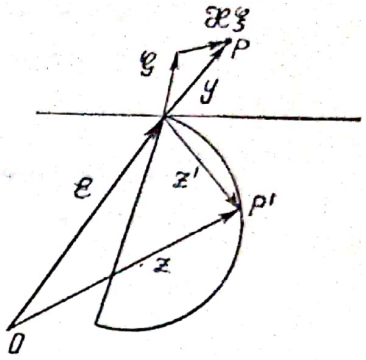


Fig. 7.67. Locul geometric al impedanței z.

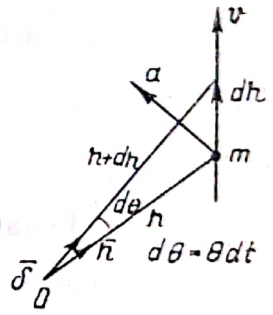


Fig. 7.68. Viteza și accelerația particulei de masă m.

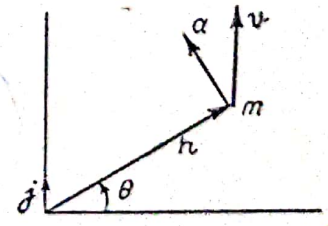


Fig. 7.69. r, v și a în planul complex.

viteza și accelerația particulei de masă m devin

$$a = \frac{d\kappa}{dt} = \dot{r}e^{j\theta} + jr\dot{\theta}e^{j\theta} = \dot{r}e^{j\theta} + r\dot{\theta}\,e^{j\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)} \tag{7}$$

ceea ce corespunde vitezei a în forma vectorială din (1)

$$a = \ddot{r}e^{j\theta} + \dot{r}\,j\dot{\theta}e^{j\theta} + j\,\dot{r}\dot{\theta}e^{j\theta} + jr\ddot{\theta}e^{j\theta} - r\dot{\theta}^2e^{j\theta} =$$

$$= (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\,e^{j\theta} + j\,\frac{1}{r}\,\frac{d}{dt}\,(r^2\dot{\theta})\,e^{j\theta} \tag{8}$$

ceea ce corespunde expresiei accelerației în forma vectorială din (2).

În figura 7.70 se ia ca exemplu o mișcare plană a unui electron q afectat cu viteza a într-un cîmp al inducției magnetice $\mathcal{B}$ ca într-un ciclotron.

În figură $\mathcal{B}$ e dirijată în sus. Asupra electronului acționează o forță de forma:

$$\mathcal{F}_{\text{dyne}} = \frac{q^{\text{C}}}{10}[a\mathcal{B}^{\text{G}}]. \tag{9}$$

Pentru exprimarea forței $\mathcal{F}$ în planul complex din figura 7.70 se introduce

$$\mathcal{F} = \frac{|q|}{10}\,B\,j\,\frac{d\kappa}{dt}. \tag{10}$$

Ecuația mișcării electronului devine

$$\frac{d^2\kappa}{dt^2} - \frac{|q|}{10}\,B\,j\,\frac{d\kappa}{dt} = 0. \tag{11}$$

O astfel de ecuație diferențială cu κ în forma complexă se rezolvă cu mult mai simplu decît cele două ecuații diferențiale ale mișcării după axele x și y din planul real.

O ecuație diferențială cu coeficienți constanți de acest tip are ca soluție

$$\kappa = a\,e^{\gamma t} \tag{12}$$

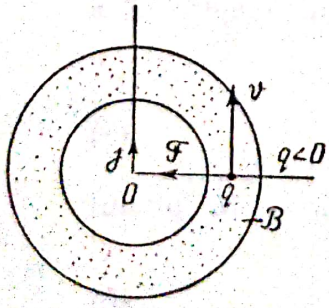


Fig. 7.70. Un electron cu viteza a în cîmpul inducției magnetice $\mathcal{B}$ ca la un ciclotron.

Scanned with OKEN Scanner

în care modulul a reprezintă o constantă, cunoscută în timpul inițial $t = 0$, iar argumentul γ ca necunoscută ia forma

$$\gamma = \alpha + j\omega. \tag{13}$$

Prin introducerea lui κ din (12) în (11) se obține ecuația caracteristică

$$\gamma\left(\gamma - j\frac{|q|}{10\ m}B\right) = 0 \tag{14}$$

de unde se obțin

$$\gamma_1 = 0 \qquad \gamma_2 = j\frac{|q|}{10\ m}B = j\omega_2 \tag{15}$$

astfel că

$$\gamma_2 = j\omega_2$$

$$\omega_2 = \frac{|q|}{10\ m}B. \tag{16}$$

Din (16) se vede că viteza unghiulară a electronului ω_2 e cunoscută în funcție de $|q|$, m, B.

Ca urmare κ devine

$$\kappa = a_1 e^{j0} + a_2 e^{j\omega_2 t}. \tag{17}$$

Figura 7.71 reprezintă soluția ecuației diferențiale din (11).

În cazul mișcării electronului în figura 7.70 se consideră $a_1 = 0$ și $a_2 = a_2$ în axa reală la timpul $t = 0$.

Avem

$$r = a e^{j\omega_2 t}.$$

Din

$$v = j\ a\omega_2 e^{j\omega_2 t}$$

se obține la timpul inițial $t = 0$

$$v_0 = j\ v_0 = j\ a\omega_2,$$

deci

$$a = \frac{v_0}{\omega}.$$

Într-adevăr din $F = \frac{|q|}{10} vB = \frac{|q|}{10} r\omega_2 B = mr\omega_2^2$, rezultă $\frac{|q|}{10}\frac{B}{m} = \omega_2$ și dacă viteza constantă v_0 e cunoscută se deduce din $v_0 = r\omega_2$ raza $r = a$.

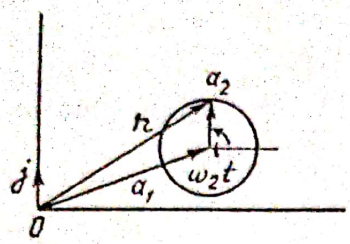


Fig. 7.71. $\mathcal{E} = \varphi(t)$.

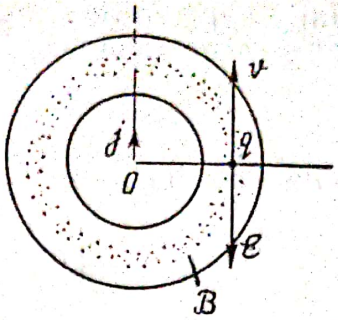


Fig. 7.72. Linia cîmpului electric $\mathcal{E}$.

În figura 7.72 se consideră cazul cînd inducția magnetică $\mathcal{B}$ e dirijată în sus și crește în raport cu timpul.

În baza legii inducției apare un cîmp electric solenoidal cu o linie de cîmp în formă de cerc și dirijat în sens opus mișcării electronului.

Asupra electronului acționează o forță nouă de forma $\mathcal{F}_1 = q\mathcal{E}$ în sensul mișcării electronului, care face ca mișcarea să fie accelerată. $\mathcal{F}_1$ în planul complex din figura 7.73 ia forma:

$$\mathcal{F}_1 = |q|C\ \mathrm{j}e^{\mathrm{j}\omega_0 t}. \tag{18}$$

$\mathcal{F}_1$ în ecuația diferențială din (11) reprezintă membrul al doilea.

Se obține

$$\frac{\mathrm{d}^2\kappa}{\mathrm{d}t^2} - \frac{|q|}{10m} B\mathrm{j}\frac{\mathrm{d}\kappa}{\mathrm{d}t} = |q|C\ \mathrm{j}\ e^{\mathrm{j}\omega_0 t}\ . \tag{19}$$

Din (19) se poate elimina membrul al doilea în felul următor : Se formează derivata

$$\frac{\mathrm{d}^3\kappa}{\mathrm{d}t^3} - \frac{|q|}{10m} B\ \mathrm{j}\frac{\mathrm{d}^2\kappa}{\mathrm{d}t^2} = |q|C\mathrm{j}e^{\mathrm{j}\omega_0 t}\cdot \mathrm{j}\omega_0 . \tag{20}$$

În ecuația diferențială (20) se înlocuiește membrul al doilea prin

$$\frac{\mathrm{d}^2\kappa}{\mathrm{d}t^2}\mathrm{j}\omega_0 - \frac{|q|}{10m} B\ \mathrm{j}\frac{\mathrm{d}\kappa}{\mathrm{d}t}\cdot \mathrm{j}\omega_0$$

astfel că se obține o nouă ecuație diferențială cu membrul al doilea egal cu zero în forma

$$\frac{\mathrm{d}^3\kappa}{\mathrm{d}t^3} - \frac{\mathrm{d}^2\kappa}{\mathrm{d}t^2}\mathrm{j}\left(\frac{|q|}{10m} B + \omega_0\right) - \frac{\mathrm{d}\kappa}{\mathrm{d}t}\cdot\frac{|q|}{10m} B\,\omega_0 = 0. \tag{21}$$

Prin introducerea soluției în forma $\kappa = ae^{\gamma t}$ se formează ecuația caracteristică în forma

$$\gamma(\gamma^2 - \gamma\mathrm{j}\,p_1 - p_2) = 0 \tag{22}$$

în care

$$p_1 = \frac{|q|}{10\,m} B + \omega_0; \quad p_2 = \frac{|q|}{10\,m} B\omega_0.$$

Din (23) rezultă

$$\gamma_1 = 0, \qquad \gamma_2 = \alpha_2 + j\omega_2, \qquad \gamma_3 = \alpha_3 + j\omega_3.$$

Ca urmare r devine:

$$r = a_1 e^0 e^{j^0} + a_2 e^{\alpha_2 t} \cdot e^{j\omega_2 t} + a_3 e^{\alpha_3 t} \cdot e^{j\omega_3 t}.$$

În figura 7.73 se prezintă soluția ecuației diferențiale (21).

S-a considerat cazul $a_1 = 0$.

La aparatele pentru cercetări nucleare, cîmpul inducției magnetice în întrefier e considerat ca un cîmp plan meridian (liniile de cîmp și liniile echipotențiale se găsesc în plane meridiane).

Pentru menținerea particulelor electrizate în jurul traiectoriei centrale, e necesar să intre în acțiune anumite forțe focalizante care readuc particulele electrizate în mișcarea lor în jurul traiectoriei principale ca în figura 7.73.

În exemplele de mai sus s-a relevat ce simplu se poate studia mișcarea unei astfel de particule electrizate, urmărind mișcarea ei printr-un vector de poziție exprimat complex.

În figura 7.74 se prezintă schema circuitului complex în care se introduc mărimile electrice în forma complexă.

Se cere să se determine curenții electrici prin metoda complexă.

Cu ajutorul metodei complexe se formează pentru cei cinci curenți electrici, cinci ecuații în care operațiile se pot forma ca și cum ar fi mărimi algebrice.

Avem

$$\begin{aligned}
&\mathcal{Z}_1\mathcal{J}_1 + \mathcal{Z}_2\mathcal{J}_2 = \mathcal{U}_b \\
&\mathcal{Z}_3\mathcal{J}_3 + \mathcal{Z}_4\mathcal{J}_4 = \mathcal{U}_b \\
&\mathcal{Z}_5\mathcal{J}_5 + \mathcal{Z}_2\mathcal{J}_2 = \mathcal{Z}_4\mathcal{J}_4 \\
&\mathcal{J}_1 + \mathcal{J}_5 = \mathcal{J}_2 \\
&\mathcal{J}_4 + \mathcal{J}_5 = \mathcal{J}_3.
\end{aligned}$$

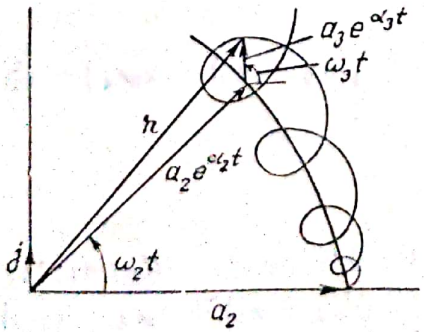


Fig. 7.73. r ca funcție de timp.

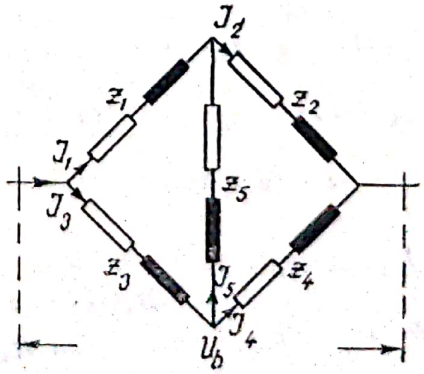


Fig. 7.74. Circuitul complex.

Scanned with OKEN Scanner

În planul complex mărimile electrice își păstrează caracterul lor geometric.

Din primele trei relații se elimină curenții electrici $\mathcal{I}_2$ și $\mathcal{I}_3$. Se obțin trei ecuații cu $\mathcal{I}_1$, $\mathcal{I}_4$ și $\mathcal{I}_5$.

$$(z_1 + z_2)\mathcal{I}_1 + 0 \cdot \mathcal{I}_4 + z_2\mathcal{I}_5 = \mathcal{U}_b$$

$$0 \cdot \mathcal{I}_1 + (z_3 + z_4)\mathcal{I}_4 + z_3\mathcal{I}_5 = \mathcal{U}_b$$

$$z_2\mathcal{I}_1 - z_4\mathcal{I}_4 + (z_2 + z_5)\mathcal{I}_5 = 0.$$

Se deduc

$$\mathcal{I}_1 = \frac{\begin{vmatrix} \mathcal{U}_b & 0 & z_2 \\ \mathcal{U}_b & z_3 + z_4 & z_3 \\ 0 & -z_4 & z_5 + z_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} z_1 + z_2 & 0 & z_2 \\ 0 & z_3 + z_4 & z_3 \\ z_2 & -z_4 & z_5 + z_2 \end{vmatrix}} \qquad \mathcal{I}_4 = \frac{\begin{vmatrix} z_1 + z_2 & \mathcal{U}_b & z_2 \\ 0 & \mathcal{U}_b & z_3 \\ z_2 & 0 & z_5 + z_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} z_1 + z_2 & 0 & z_2 \\ 0 & z_3 + z_4 & z_3 \\ z_2 & -z_4 & z_5 + z_2 \end{vmatrix}}$$

$$\mathcal{I}_5 = \frac{\begin{vmatrix} z_1 + z_2 & 0 & \mathcal{U}_b \\ 0 & z_3 + z_4 & \mathcal{U}_b \\ z_2 & -z_4 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} z_1 + z_2 & 0 & z_2 \\ 0 & z_3 + z_4 & z_3 \\ z_2 & -z_4 & z_5 + z_4 \end{vmatrix}}$$

$$\begin{vmatrix} z_1 + z_2 & 0 & z_2 \\ 0 & z_3 + z_4 & z_3 \\ z_2 & -z_4 & z_2 + z_5 \end{vmatrix} = (z_1 + z_2)\{(z_3 + z_4)(z_2 + z_5) + z_3z_4\} - z_2^2(z_3 + z_4).$$

$$\begin{vmatrix} \mathcal{U}_b & 0 & z_2 \\ \mathcal{U}_b & z_3 + z_4 & z_3 \\ 0 & -z_4 & z_2 + z_5 \end{vmatrix} = \mathcal{U}_b\{(z_3 + z_4)(z_2 + z_5) + z_3z_4\} - \mathcal{U}_b \cdot z_2 \cdot z_4 =$$
$$= \mathcal{U}_b\{(z_3 + z_4)(z_2 + z_5) + z_3z_4 - z_2z_4\}.$$

$$\begin{vmatrix} z_1+z_2 & \mathcal{U}_b & z_2 \\ 0 & \mathcal{U}_b & z_3 \\ z_2 & 0 & z_2+z_5 \end{vmatrix} = (z_1+z_2)\{\mathcal{U}_b(z_2+z_5)\}+z_2\{\mathcal{U}_b z_3-\mathcal{U}_b z_2\} = \mathcal{U}_b\{(z_1+z_2)(z_2+z_5)+z_2z_3-z_2^2\}$$

$$\begin{vmatrix} z_1+z_2 & 0 & \mathcal{U}_b \\ 0 & z_3+z_4 & \mathcal{U}_b \\ z_2 & -z_4 & 0 \end{vmatrix} = (z_1+z_2)z_4\,\mathcal{U}_b-z_2\mathcal{U}_b(z_3+z_4) = \mathcal{U}_b\{(z_1+z_2)z_4-z_2(z_3+z_4)\}$$

Rezultă

$$\mathcal{I}_1=\frac{\mathcal{U}_b\{(z_3+z_4)(z_2+z_5)+z_3z_4-z_2z_4\}}{(z_1+z_2)\{(z_3+z_4)(z_2+z_5)+z_3z_4\}-z_2^2(z_3+z_4)}$$

$$\mathcal{I}_4=\frac{\mathcal{U}_b\{(z_1+z_2)(z_2+z_5)+z_2z_3-z_2^2\}}{(z_1+z_2)\{(z_3+z_4)(z_2+z_5)+z_3z_4\}-z_2^2(z_3+z_4)}$$

$$\mathcal{I}_5=\frac{\mathcal{U}_b\{(z_1+z_2)z_4-z_2(z_3+z_4)\}}{(z_1+z_2)\{(z_3+z_4)(z_2+z_5)+z_3z_4\}-z_2^2(z_3+z_4)}.$$

Se remarcă că pentru $\mathcal{I}_5=0$ rezultă.

$$(z_1+z_2)z_4-z_2(z_3+z_4)=0$$

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{z_3}{z_4}.$$

8. REZONANȚA DE TENSIUNE ȘI DE CURENT

În figura 8.75 se prezintă un circuit electric cu parametrii r, L, C și diagrama valorilor efective ale căderilor ohmice, inductive și capacitive.

Între tensiunea de borne U_b și curentul electric I se obține legătura

$$U_b=Iz=I\sqrt{r^2+\left(\omega L-\frac{1}{\omega C}\right)^2}$$

Cînd se formează: $\omega_0 L-\frac{1}{\omega_0 C}=0$, ceea ce ne conduce la rezonanța de tensiune, se obține:

$$\omega_0^2 LC=1.$$

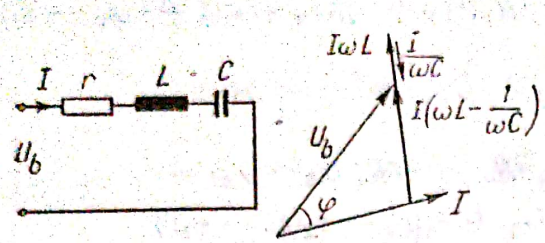


Fig. 8.75. Circuitul electric cu r, L și C serie și diagrama lui.

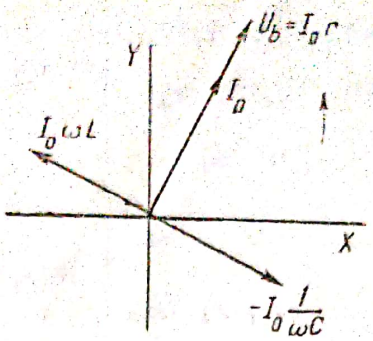


Fig. 8.76. Tensiunile și curentul electric la rezonanța de tensiune.

Iar

$$z = r; \quad U_b = I_0 r.$$

În diagrama din figura 8.76 se vede că la rezonanța de tensiune se obține curentul maxim, deoarece impedanța devine egală numai cu rezistența electrică r.

Pe de altă parte curentul electric e în fază cu tensiunea de borne.

Căderile de tensiuni inductivă $I_0\omega_0 L$ și capacitivă $-I_0 \frac{1}{\omega_0 C}$ sînt egale în valorile lor numerice și defazate între ele cu 180° ca în figură.

Rezultă

$$X_{L_0} = X_{C_0} = \omega_0 L = \frac{1}{\omega_0 C} = \sqrt{\frac{L}{C}},$$

deoarece

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}.$$

Din

$$U_b = I_0 r; \quad U_{L_0} = U_{C_0} = I_0 X_0$$

mai rezultă

$$\frac{U_b}{U_{C_0}} = \frac{r}{x_0} = d$$

denumit factor de amortizare.

După cum r e mai mic, egal sau mai mare ca x_0, tot așa și d apare mai mic, egal sau mai mare ca unitatea.

Spre exemplu

$$U_b = 110\,\text{V}, \quad r = 5\Omega, \quad L = 5\text{H}, \quad f_0 = 50\,\text{Hz}, \quad 2\pi f = 314$$

$\omega = 2\pi f$ reprezintă frecvența circulară sau pulsația.

Din $\omega_0^2 = \frac{1}{LC}$ se obține $C = 2{,}02 \cdot 10^{-6}$ F.

$$x_0 = \omega_0 L = 1\,570\,\Omega$$

$$I_0 = \frac{110}{5} = 22 \text{ A} \qquad \frac{U_b}{U_{x0}} = d = \frac{r}{x_0} = \frac{5}{1\,570} = 0{,}0315.$$

astfel că

$$U_{x0} = \frac{110}{0{,}00315} = 34\,500\text{V} = I_0 x_0.$$

Sub aspect energetic se constată din diagrama din figura 8.76 că atunci cînd în timp curentul i_0 e maxim și anume $I_0\sqrt{2}$ în diagrama I_0 cade în direcția ordonatei Y. Energia magnetică devine maximală $(I_0\sqrt{2})^2 L\frac{1}{2}$. În schimb tensiunea capacitivă $U_{C\max} = \frac{I_0\sqrt{2}}{\omega_0 C}$ se găsește în direcția axei x, astfel că momentan u_C e nul.

Energia electrică exprimată prin $\frac{u_C^2 C}{2}$ e nulă. Cînd $U_{C\max}$ cade însă în direcția axei y, atunci energia electrică din condensator în timp devine maximală cu valoarea

$$\left(I_0\sqrt{2}\frac{1}{\omega C}\right)^2 \frac{C}{2} = (I_0\sqrt{2})^2 \frac{1}{\omega^2 C} \cdot \frac{1}{2}.$$

În acest moment curentul electric momentan i_0 e nul, deoarece I_0 cade perpendicular pe ordonată.

Se obține o oscilație între energia electrică și energia magnetică, iar sursa acoperă numai efectul Joule-Lenz în rezistența electrică.

Din

$$U_L = \frac{U_b}{\sqrt{r^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}} \cdot \omega L \text{ și } U_C = \frac{U_b}{\sqrt{r^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}} \cdot \frac{1}{\omega C}$$

se formează

$$\frac{\partial U_L}{\partial \omega} = 0 \quad \text{și} \quad \frac{\partial U_C}{\partial \omega} = 0$$

și se obțin ω_L și ω_C pentru $U_{L\max}$ și $U_{C\max}$.

În figura 8.77 se prezintă U_C și U_L în funcție de ω.

Pentru $I_0 x_C = U_{C0} = U_{L0}$ avem $\omega = \omega_0$.

Se obțin

$$\omega_L = \omega_0 \sqrt{\frac{2}{2-d^2}} \qquad \omega_C = \omega_0 \sqrt{\frac{2-d^2}{2}},$$

astfel că $\omega_L \cdot \omega_C = \omega_0^2 = \frac{1}{LC}$.

Se introduce $\omega = \omega_0 \eta$, în care $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$; $x_0 = \sqrt{\frac{L}{C}}$, și se obțin

$$\omega L = \omega_0 \eta L = \sqrt{\frac{L}{C}}\,\eta = x_0 \eta$$

$$\frac{1}{\omega C} = \frac{1}{\omega_0 \eta C} = \sqrt{\frac{L}{C}} \cdot \frac{1}{\eta} = x_0 \frac{1}{\eta}$$

de unde se deduce impedanța în forma

$$z = \sqrt{r^2 + x_0^2 \left(\eta - \frac{1}{\eta}\right)^2} = r \sqrt{1 + \frac{\left(\eta - \frac{1}{\eta}\right)^2}{d^2}}.$$

Pe de altă parte din

$$U_b = Iz; \qquad U_b = I_0 r$$

rezultă

$$\frac{r}{z} = \frac{I}{I_0} = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{\left(\eta - \frac{1}{\eta}\right)^2}{d^2}}}.$$

În figura 8.78 se prezintă $\frac{I}{I_0}$ în funcție de η care poartă denumirea de spectrul frecvenței în care d apare ca un parametru.

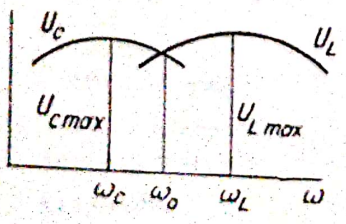


Fig. 8.77. U_C, U_L în funcție de ω pentru U_b, r, L, C, constante.

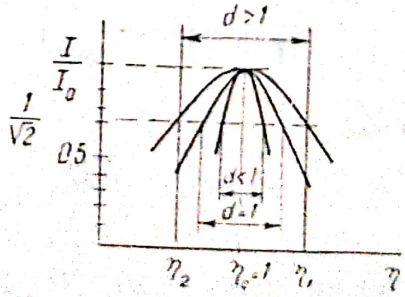


Fig. 8.78. Spectrul frecvenței.

Pentru

$$\frac{I}{I_0} = \frac{1}{\sqrt{2}} = 0{,}707$$

se obține

$$\sqrt{2} = \sqrt{1 + \frac{\left(\eta_1 - \frac{1}{\eta_1}\right)^2}{d^2}}.$$

De unde se deduce

$$1 = \frac{\left(\eta_1 - \frac{1}{\eta_1}\right)^2}{d^2} \quad \text{pentru } \eta_1 > 1 \text{ avem } \eta_1 - \frac{1}{\eta_1} - d = 0$$

$$\text{sau } \eta_1^2 - d\eta_1 - 1 = 0; \qquad \eta_1 = \frac{d}{2} + \sqrt{\left(\frac{d}{2}\right)^2 + 1}$$

iar pentru $\eta_2 < 1$ rezultă

$$1 = \frac{\left(\frac{1}{\eta_2} - \eta_2\right)^2}{d^2}; \qquad \frac{1}{\eta_2} - \eta_2 - d = 0$$

$$\eta_2^2 + d\eta_2 - 1 = 0; \qquad \eta_2 = -\frac{d}{2} + \sqrt{\left(\frac{d}{2}\right)^2 + 1},$$

de unde se deduce

$$\eta_1 - \eta_2 = d.$$

În figura 8.78 se prezintă $\frac{I}{I_0} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ care corespunde valorilor lui η_1 și η_2 cu diferența $\eta_1 - \eta_2 = d$ pentru cele trei spectre corespunzătoare lui $d > 1$, $d = 1$ și $d < 1$.

Spectrul de frecvență în limitele lui d poartă denumirea de banda spectrului de frecvență a circuitului.

În ceea ce privește mărimea $\left(\eta - \frac{1}{\eta}\right)$ ea se mai exprimă în forma

$$\eta - \frac{1}{\eta} = \frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} = \frac{\omega^2 - \omega_0^2}{\omega_0 \omega} = \frac{(\omega - \omega_0)(\omega + \omega_0)}{\omega_0 \omega}.$$

Pentru cazul cînd ω diferă foarte puțin de ω_0 se obține

$$\eta - \frac{1}{\eta} = \frac{\Delta\omega \cdot 2\omega_0}{\omega_0^2} = \frac{2\Delta\omega}{\omega_0} = \frac{2\Delta f}{f_0},$$

în care

$$\omega - \omega_0 - \Delta\omega \quad \text{și} \quad f - f_0 = \Delta f.$$

Se mai introduce $Q = \frac{1}{d}$, în care Q e denumit factorul de calitate.

Se formează

$$\left(\frac{I}{I_0}\right)^2 = \frac{1}{1 + \left(\frac{2\Delta f}{f_0}\right)^2 Q^2}$$

$$\left(\frac{2\Delta f}{f_0}\right)^2 Q^2 = \frac{1 - \left(\frac{I}{I_0}\right)^2}{\left(\frac{I}{I_0}\right)^2};$$

$$Q = \frac{f_0}{2\Delta f} \cdot \frac{\sqrt{1 - \left(\frac{I}{I_0}\right)^2}}{\frac{I}{I_0}}.$$

Din diagrama din figura 8.78 se constată că cu cît d devine mai mic, deci Q mai mare, cu atît I respectiv $\frac{I}{I_0}$ descreşte mai rapid pentru mici variaţii ale lui f în jurul lui f_0 ceea ce înseamnă că circuitul devine mai selectiv.

Spre exemplu,

Pentru $\lambda = 1000$ m se obţine din $\lambda f_0 = V_{v0}$; $f_0 = \frac{3 \cdot 10^{10}}{10^5} = 3 \cdot 10^5$.

Iar din $f = f_0 + \Delta f$ se fixează $\Delta f = 10^4$ la care trebuie să apară $\frac{I}{I_0} = 0{,}8$.

Factorul de calitate Q devine:

$$Q = \frac{3 \cdot 10^5}{2 \cdot 10^4} \frac{\sqrt{1 - 0{,}8^2}}{0{,}8} = 11{,}25 = \frac{1}{d},$$

în care

$$d = \frac{r}{x_0} \quad \text{și} \quad x_0 = \sqrt{\frac{L}{C}}.$$

Deobicei se dă C şi se calculează r din:

$$x_0 = \frac{1}{\omega_0 C}; \quad Q = \frac{1}{\omega_0 C r} = \frac{1}{2\pi f_0 C r} = \frac{\lambda}{2\pi V_{v0} C r}$$

$$Q_{est} = C_{est} \cdot u_{est}.$$

$$Q^c \cdot 3 \cdot 10^9 = C_{est} \cdot \frac{U^V}{300}$$

se obține

$$C^{F} \cdot 9 \cdot 10^{11} = C_{est.}$$

astfel că

$$Q = \frac{\lambda_m 10^2 \cdot 9 \cdot 10^{11}}{2\pi \cdot 3 \cdot 10^{10} C_{est} \cdot r^{\Omega}} = \left(\frac{3}{2\pi} \cdot 10^3\right) \frac{\lambda_m}{C_{est} r^{\Omega}} = 476 \frac{\lambda_m}{C_{est} \cdot r^{\Omega}}.$$

Se formează

$$r^{\Omega} = 476 \frac{\lambda_m}{C_{est} \cdot Q}.$$

Pentru

$$C_{est.} = 2 \cdot 10^3 \text{ cm} \quad \text{și} \quad Q = 11{,}25$$

rezultă

$$r^{\Omega} = 476 \frac{1000}{2 \cdot 10^3 \cdot 11{,}25} = 21\,\Omega$$

în care 2^{Ω} reprezintă rezistența proprie și deci 19^{Ω} rezistența adițională.

Rezonanța de curent.

În figura 8.79 se prezintă r, L, C conectate în paralel la tensiunea de borne U_b.

Rezonanța de curent apare cînd avem $\overbrace{I_L + I_C} = 0$, adică

$$\frac{U_b}{\omega L} - U_b \cdot \omega C = U_b \left(\frac{1}{\omega L} - \omega C\right) = 0,$$

ceea ce ne conduce la condiția

$$\omega^2 LC = 1.$$

În ce privește valorile momentane ale lui U_C și I_L se constată din diagrama din figura 8.80 că atunci cînd U_C e maximal I_L e nul și viceversa cînd I_L e maxim U_C e nul.

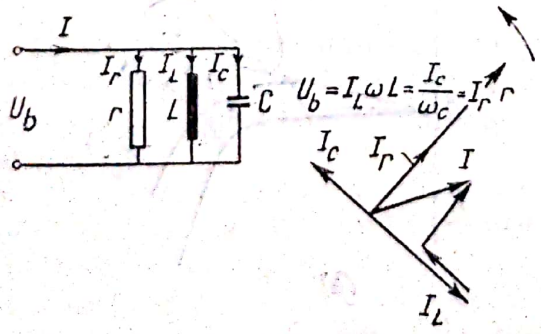


Fig. 8.79. Circuit electric cu r, L, C, în paralel și diagrama curenților.

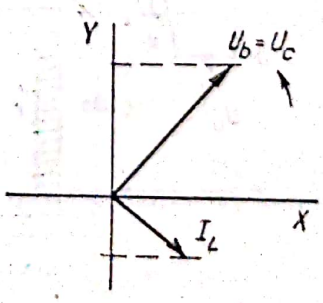


Fig. 8.80. Tensiunea $U_b = U_C$ față de curentul I_L.

Datorită acestui fapt se constată că atunci cînd energia electrică în condensator devine maximă $\frac{1}{2} u^2_{C\max} C$, energia magnetică în circuitul cu inductivitatea L e nulă și invers.

Înseamnă că apare o oscilație între energia electrică înmagazinată în cîmpul electric al condensatorului și energia magnetică $\left(\frac{1}{2} i_m^2 L\right)$ înmagazinată în cîmpul magnetic.

Exprimînd în forma complexă curenții electrici I_L și I_c în cazul rezonanței de curent, se obține

$$\mathcal{I}_L + \mathcal{I}_C = 0 = \frac{\mathcal{Z}_b}{j\omega l} - \frac{\mathcal{U}_b \cdot \omega C}{j} = \frac{\mathcal{U}_b}{j}\left(\frac{1}{\omega L} - \omega C\right)$$

se obține condiția

$$1 - \omega^2 LC = 0.$$

Exemplu de rezonanță de curent.

Stabilizatorul de tensiune.

Figura 8.81, α reprezintă schema unui stabilizator de tensiune. Se calculează circuitul feromagnetic în care circulă curentul I_L așa fel încît la tensiunea de borne U_b nominală să apară o rezonanță de curent.

Din diagrama curenților din figura 8.81, β se vede că în mersul în gol, cînd curentul de utilizare I_U e nul și tensiunea de borne U_b e egală cu tensiunea de borne nominală avem $I_U = 0$; $I_1 = I = I_L - I_c = 0$; $\overline{OA} = U_b = U = U^*$ în mersul în gol.

Deoarece I e nul înseamnă că la bornele inductivității L' tensiunea electromotoare $-I\omega L'$ e nulă.

Apare o oscilație între energia electrică înmagazinată în cîmpul electric al condensatorului și energia magnetică din cîmpul magnetic în care se găsește înfășurarea cu W spire.

În mersul în gol deosebim două cazuri:

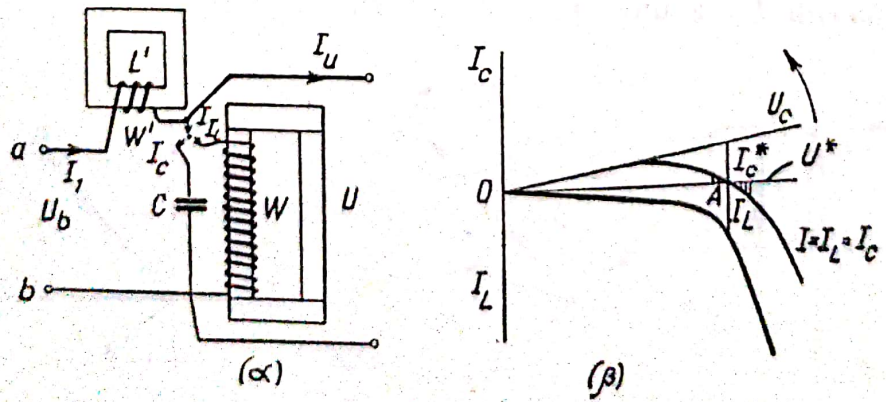


Fig. 8.81. α) stabilizator de tensiune; β) diagrama curenților și a tensiunilor.

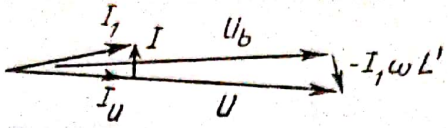


Fig. 8.82. Diagrama tensiunilor la încărcare.

Cînd tensiunea de borne U_b crește puțin, peste tensiunea de borne nominală apare în L' un curent electric I' defazat cu $\frac{\pi}{2}$ înapoi.

Ca urmare, $I'\omega L'$ e opus cu π față de U_b.

Se obține $U_b - I'\omega L' = U^*$.

U^* se menține constant.

În al doilea caz tensiunea de borne U_b apare mai mică puțin ca U^*; în cazul acesta I'' e defazat înapoi față de U^* cu $\frac{\pi}{2}$ astfel că $U^* - I''\omega L' = U_b$, ceea ce ne arată că U^* rămîne constant.

Căderile ohmice sînt neglijate.

Deoarece U^* rămîne constant, atunci cînd U_b variază în anumite limite în plus sau în minus față de o valoare nominală, dispozitivul poartă denumirea de stabilizator de tensiune.

Cînd apare curentul de utilizare I_U spre exemplu în fază cu U^*, tendința e ca $-I_U\omega L'$ să micșoreze puțin tensiunea U^* față de tensiunea U_b. În momentul apariției lui U ceva mai mic ca U^* apare din $I_L - I_c = I$ un curent electric I cu caracter capacitiv, care adunat la I_U ne dă curentul rezultant I_1.

Din diagrama din figura 8.82 se vede că $U_b - I_1\omega L'$ reprezintă o tensiune care revine la U^* din mersul în gol.

Se va vedea mai tîrziu în paragraful 26.3 în cazul circuitelor electrice în regim nesinusoidal că curentul electric i_L din înfășurarea cu miez de fier nu e sinusoidal. Ca urmare valorile efective I_L, I_c și U_b nu se găsesc exact în același plan, așa cum s-au luat în figurile 8.81 și în 8.82.

9. CIRCUITE ELECTRICE CU COEFICIENȚI DE INDUCȚIE RECIPROCI (MUTUALI)

În figura 9.83 se prezintă ca exemplu de circuit electric cu coeficient de inducție reciproc, un transformator în conectare economică.

În cazul α coeficientul de inducție reciproc L_{13} e pozitiv, iar în cazul β e negativ $-L_{13}$.

În cele ce urmează se tratează trei probleme: în prima problemă se reprezintă coeficienții de inducție proprii și mutuali, precum și amperspirele luînd ca bază diagrama curenților.

În a doua problemă se stabilesc diagramele tensiunilor luînd ca bază fluxul magnetic comun și fluxul de dispersie.

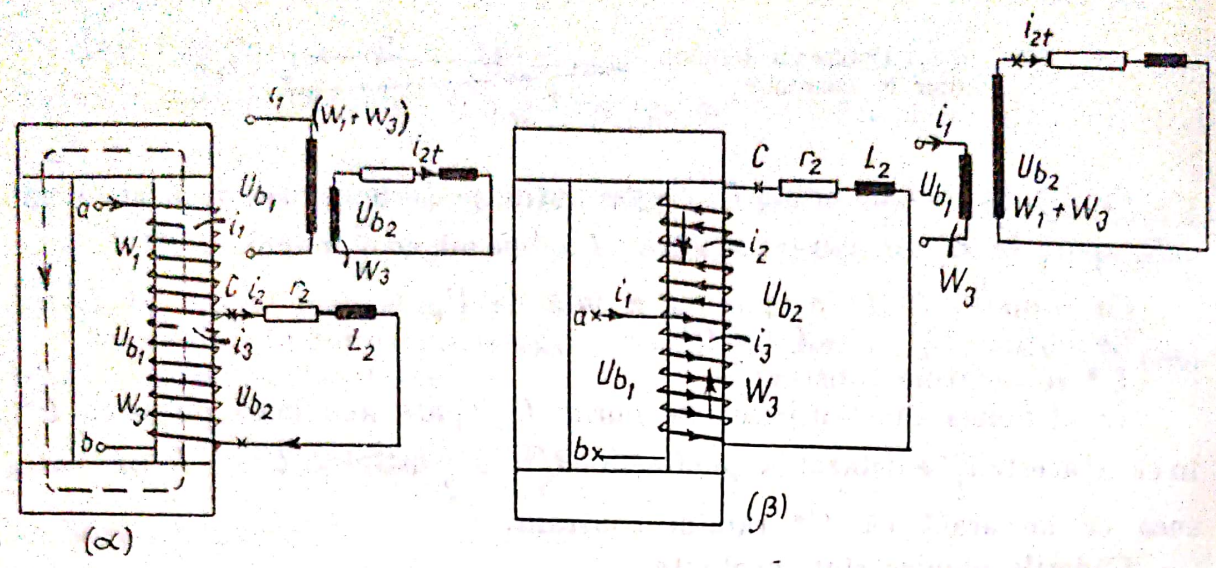


Fig. 9.83. Circuite electrice cu coeficienţi de inducţie mutuali pozitivi α şi negativi β.

În a treia problemă se stabilesc circuitele echivalente ale transformatorului în conectare economică din figura 9.83.

Prima problemă.

Sensurile pozitive în înfăşurări atît în cazul α cît şi în cazul β sînt stabilite în raport cu circuitul conectat la tensiunea de borne u_{b_1}.

Cazul α.

Pentru fluxul comun $k_{31}\Phi_{31}$ produs de i_3 care înlănţuie atît înfăşurarea cu W_3 spire cît şi înfăşurarea cu W_1 spire, în care sensurile pozitive coincid, se obţine

$$(k_{31}\Phi_{31})\, R_m = \frac{4\pi}{10}\,(i_3 W_3).$$

Ca urmare, coeficientul de inducţie propriu $l_{33\,\mathrm{elm.}}$ ia forma

$$l_{33\,\mathrm{elm}}\,\frac{k_{31}\Phi_{31}W_3}{\frac{i_3}{10}} = 4\pi\,\frac{W_3^2}{R_m}$$

sau

$$l_{33\,\mathrm{H}} = 4\pi.10^{-9}.\,\frac{W_3^2}{R_m}$$

coeficientul de inducţie mutual $l_{31\,\mathrm{elm}}$ devine

$$l_{31\,\mathrm{elm}} = \frac{(k_{31}\Phi_{31})W_1}{\frac{i_3}{10}} = 4\pi\,\frac{W_3 W_1}{R_m}$$

sau

$$l_{31\,\mathrm{H}} = 4\pi.10^{-9}\frac{W_3 W_1}{R_m}.$$

În mod analog fluxul comun produs de curentul electric i_1 care înlănțuie atît înfășurarea cu W_1 spire cît și înfășurarea cu W_3 spire, în care sensurile pozitive coincid, ia forma

$$(k_{13}\Phi_{13})\,R_m = \frac{4\pi}{10}(i_1 W_1).$$

Coeficienții de inducție l_{11} și l_{13} se reprezintă prin

$$l_{11} = \frac{(k_{13}\Phi_{13})W_1}{\frac{i_1}{10}} = 4\pi\frac{W_1^2}{R_m}$$

$$L_{13} = \frac{(k_{13}\Phi_{13})W_3}{\frac{i_1}{10}} = 4\pi\frac{W_1 W_3}{R_m}.$$

Se obține

$$L_{13} = L_{31}.$$

Cazul β.

Sensurile pozitive în înfășurările cu W_1 și W_3 spire, sînt luate în sensuri opuse, datorită relației curenților

$$i_1 = i_1 + i_3.$$

Fluxul comun $k_{31}\Phi_{31}$ produs de i_3, are sensul pozitiv corespunzător lui i_3.

Avem

$$(k_{31}\Phi_{31})\,R_m = \frac{4\pi}{10}(i_3 W_3)$$

$$l_{33} = \frac{(k_{31}\Phi_{31})W_3}{\frac{i_3}{10}} = 4\pi\frac{W_3^2}{R_m}$$

$$-L_{31} = -\frac{(k_{31}\Phi_{31})W_1}{\frac{i_3}{10}} = -4\pi\frac{W_3 W_1}{R_m}.$$

De asemenea fluxul comun $(k_{13}\Phi_{13})$ produs de i_2 are sensul pozitiv al curentului i_2.

Se obține

$$(k_{13}\Phi_{13})\, R_m = \frac{4\pi}{10}\, i_2 W_1.$$

$$l_{11} = \frac{(k_{13}\Phi_{13})W_1}{\frac{i_2}{10}} = 4\pi \frac{W_1^2}{R_m}$$

$$-L_{13} = -\frac{(k_{13}\Phi_{13})W_3}{\frac{i_2}{10}} = -4\pi \frac{W_1 W_3}{R_m}.$$

Coeficienții de inducție reciprocă se evidențiază ca mărimi negative cu semnul minus introdus explicit, datorită faptului că sensurile pozitive în cele două înfășurări cu W_1 și W_3 spire sînt luate opuse.

Diagramele curenților electrici

Neglijînd pierderile, aproximativ, puterea preluată de circuitul primar, e egală cu puterea cedată de circuitul secundar circuitului de utilizare.
Se obține

$$U_{b_1} I_1 \cos \varphi_1 \cong U_{b_2} I_2 \cos \varphi_2.$$

Din figura 9.84 cazul α, se formează suma amperspirelor (ca o sumă geometrică) și se obține:

$$I_1 W_1 + I_3 W_3 = I_1 W_1 + (I_1 - I_2)\, W_3 = I_1(W_1 + W_3) - I_2 W_3$$

La un transformator normal a cărui schemă e prezentată în figura 9.83, α sus în dreapta se obține pentru suma amperspirelor

$$I_1(W_1 + W_3) + I_{2t} W_3,$$

în care I_{2t} e defazat cu 180° față de I_2 de la transformatorul în conectare economică.

Se face comparație între efectul Joule-Lenz la transformatorul în conectare economică și la cel normal; se obține

$$I_1^2 r_1 + I_3^2 r_3$$

$$I_1^2(r_1 + r_3) + I_{2t}^2 r_3,$$

de unde rezultă că efectul Joule-Lenz la transformatorul în conectare economică e mai mic.

Din figura 9.84 cazul β se obține pentru suma amperspirelor

$$I_3 W_3 - I_2 W_1 = (I_1 - I_2)\, W_3 - I_2 W_1 = I_1 W_3 - I_2(W_1 + W_3).$$

Scanned with OKEN Scanner

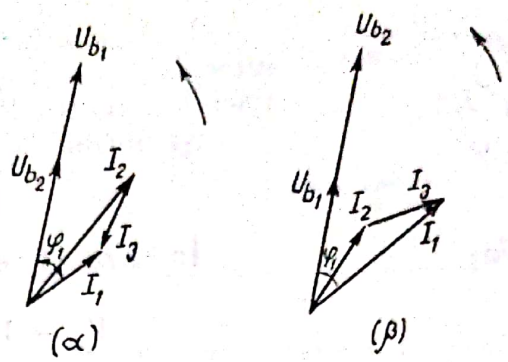


Fig. 9.84. Diagramele curenților în cazurile α, β.

La un transformator normal a cărui schemă e prezentată în figura 9.83, β sus în dreapta, se obține suma amperspirelor în forma

$$I_1 W_3 + I_{2t} (W_1 + W_3)$$

în care I_{2t} e defazat cu 180° față de I_2 de la transformatorul în conectare economică.

Din comparația efectului Joule-Lenz la transformatorul în conectare economică și la transformatorul normal

$$I_3^2 r_3 + I_2^2 r_1$$

$$I_1^2 r_3 + I^2 (r_1 + r_3)_{2t}$$

se constată că la transformatorul în conectare economică efectul Joule-Lenz e mai mic.

A doua problemă

În cazul α, relația dintre tensiuni e următoarea:

$$V_a - V_b = u_{b_1}(V_a - V_c) + (V_c - V_b) = u_{ac} + u_{b_2}$$

în care

$$V_a - V_c = u_{\Phi_1} - \lambda_1 \frac{di_1}{dt} = i_1 r_1$$

u_{Φ_1} reprezintă tensiunea indusă de fluxul comun: $k\Phi = k_{13}\Phi_{13} + k_{31}\Phi_{31}$ în înfășurarea cu W_1 spire. $k\Phi$ se determină cînd $I_2 = 0$.

Ca urmare

$$V_a - V_c = u_{ac} = - u_{\Phi_1} + \lambda_1 \frac{di_1}{dt} + i_1 r_1$$

$$V_c - V_b + u_{\Phi_2} - \lambda_3 \frac{di_3}{dt} = i_3 r_3$$

$$V_c - V_b = u_{b_2} = - u_{\Phi_2} + \lambda_3 \frac{di_3}{dt} + i_3 r_3.$$

Scanned with OKEN Scanner

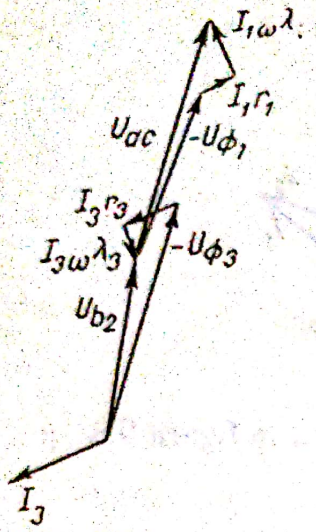


Fig. 9.85. Diagrama tensiunilor în cazul α.

În figura 9.85 se reprezintă diagrama tensiunilor U_{b_2} și U_{ac}, ținîndu-se seama de curenții electrici din figura 9.84, α.

Se obține

$$U_{b_1} = U_{b_2} + U_{ac}.$$

În cazul β relația între tensiuni este

$$V_a - V_b + u_{\Phi_2} - \lambda_3 \frac{di_3}{dt} = i_3 r_3.$$

$$V_a - V_b = u_{b_1} = - u_{\Phi_2} + \lambda_3 \frac{di_3}{dt} + i_3 r_3$$

$$V_a - V_c - u_{\Phi_1} - \lambda_1 \frac{di_2}{dt} = i_2 r_1.$$

Se ia în înfășurarea cu W_1 spire tensiunea electromotoare u_{Φ_1} cu semnul minus, deoarece ea e produsă de același flux comun $k\Phi$ ca și u_{Φ_2} însă se parcurge înfășurarea în sens opus luat ca sens pozitiv.

Tensiunea de borne secundară u_{b_2} ia forma

$$u_{b_2} = V_c - V_b = V_c - V_a + V_a - V_b =$$
$$= V_c - V_a + u_{b_1},$$

în care

$$V_c - V_a = - u_{\Phi_1} - \lambda_1 \frac{di_2}{dt} - i_2 r_1.$$

În figura 9.86 se prezintă diagrama tensiunilor U_{b_1} și U_{ca}, ținîndu-se seama de diagrama curenților electrici din figura 9.82, β.

Se obține

$$U_{b_2} = U_{b_1} + U_{ca}.$$

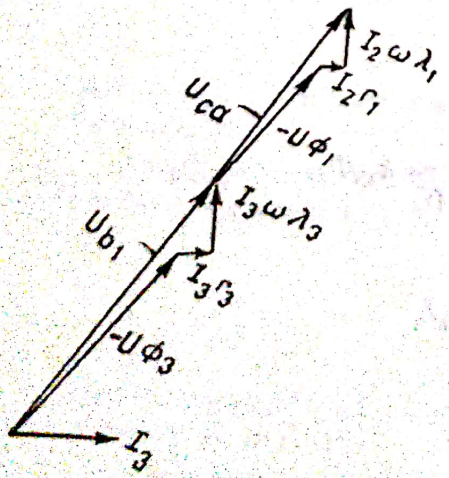


Fig. 9.86. Diagrama tensiunilor în cazul β.

A treia problemă

Din schema din figura 9.87, α se obține

$$\mathcal{U}_{b_1} = \mathcal{I}_1 r_1 + \mathcal{I}_1 \mathrm{j}\, x_{11} + \mathcal{I}_3 \mathrm{j}\, x_{31} + \mathcal{I}_3 r_3 +$$
$$+ \mathcal{I}_3 \mathrm{j}\, x_{33} + \mathcal{I}_1 \mathrm{j}\, x_{13} \qquad (1)$$

$$\mathcal{I}_3 r_3 + \mathcal{I}_3 \mathrm{j}\, x_{33} + \mathcal{I}_1 \mathrm{j}\, x_{13} =$$
$$= \mathcal{I}_2 r_2 + \mathcal{I}_2 \mathrm{j}\, x_2 \qquad (2)$$

$$\mathcal{I}_1 = \mathcal{I}_2 + \mathcal{I}_3. \qquad (3)$$

Scanned with OKEN Scanner

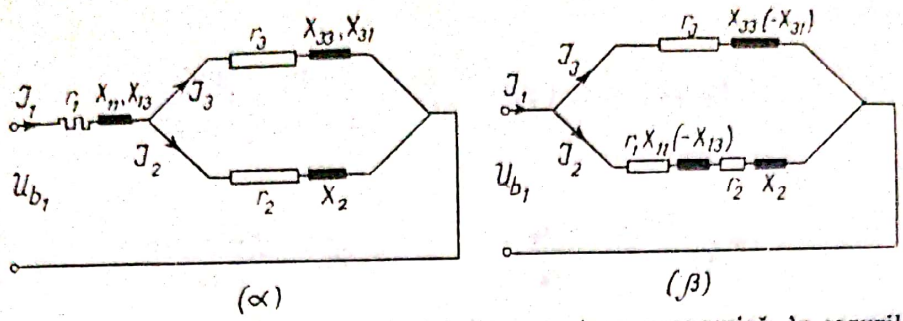


Fig. 9.87. Schema transformatorului în conectare economică în cazurile α și β.

Se înlocuiește în (2) pe $\mathcal{J}_3$ prin $\mathcal{J}_1 - \mathcal{J}_2$ și se obține

$$\mathcal{J}_1 r_3 + \mathcal{J}_1 \mathrm{j}(x_{33} + x_{13}) = \mathcal{J}_2(r_2 + r_3) + \mathcal{J}_2 \mathrm{j}(x_{33} + x_2). \tag{4}$$

Se introduc impedanțele $\mathcal{Z}_1^*$ și $\mathcal{Z}_2^*$

$$\mathcal{Z}_1^* = r_3 + \mathrm{j}(x_{33} + x_{13}) \tag{5}$$
$$\mathcal{Z}_2^* = r_2 + r_3 + \mathrm{j}(x_{33} + x_2)$$

și se formează

$$\mathcal{J}_1 \mathcal{Z}_1^* = \mathcal{J}_2 \mathcal{Z}_2^* \tag{6}$$

în care variabila este $\mathcal{Z}_2^*$.

În figura 9.88 se prezintă în planul complex $\mathcal{J}_1$, $\mathcal{J}_2$, $\mathcal{J}_3$.

Din

$$\frac{\mathcal{J}_1}{\mathcal{J}_2} = \frac{\mathcal{Z}_2^*}{\mathcal{Z}_1^*}$$

rezultă

$$\frac{I_1}{I_2} e^{\mathrm{j}(\alpha_1 - \alpha_2)} = \frac{z_2^*}{z_1^*} e^{\mathrm{j}(\varphi_2^* - \varphi_1^*)}. \tag{8}$$

$$\frac{I_1}{I_2} = \frac{z_2^*}{z_1^*}; \quad \alpha_1 - \alpha_2 = \varphi_2^* - \varphi_1^*. \tag{9}$$

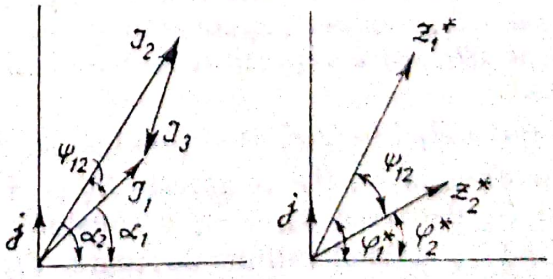


Fig. 9.88. $\mathcal{J}_1$, $\mathcal{J}_2$, $\mathcal{J}_3$ în cazul α.

Se obține

$$\operatorname{tg}\psi_{21} = \operatorname{tg}(\varphi_2^* - \varphi_1^*) = \frac{\operatorname{tg}\varphi_2^* - \operatorname{tg}\varphi_1^*}{1 + \operatorname{tg}\varphi_2^* \cdot \operatorname{tg}\varphi_1^*}$$

în care

$$\operatorname{tg}\varphi_2^* = \frac{x_{33} + x_2}{r_2 + r_3} \qquad \operatorname{tg}\varphi_1^* = \frac{x_{33} + x_{13}}{r_3}.$$

Din (9) se constată că atunci cînd impedanțele z_1^* și z_2^* sînt cunoscute, raportul dintre valorile efective ale curenților I_1, I_2, precum și defazarea dintre acești curenți devin cunoscute.

Înlocuind în (1) $\mathcal{I}_3$ prin $\mathcal{I}_1 - \mathcal{I}_2$, se obține

$$\mathcal{U}_{b_1} = \mathcal{I}_1[r_1 + r_3 + \mathrm{j}(x_{11} + x_{33} + 2x_{13})] - \mathcal{I}_2[r_3 + \mathrm{j}(x_{33} + x_{31})].$$

$$\mathcal{U}_{b_1} = \mathcal{I}_1 z_1' - \mathcal{I}_2 z_2' = \mathcal{I}_1\left[z_1' - \frac{z_1^*}{z_2^*} z_2'\right] = \mathcal{I}_1 z_{1e}.$$

în care

$$z_1' = r_1 + r_3 + \mathrm{j}(x_{11} + x_{33} + 2x_{13})$$

$$z_2' = r_3 + \mathrm{j}(x_{33} + x_{31}).$$

z_{1e} reprezintă impedanța echivalentă.

$$z_{1e} = z_1' - \frac{z_1^*}{z_2^*} z_2'.$$

Se remarcă că în suma reactanțelor $x_{11} + x_{33} + 2x_{13}$ apare o sumă de inductivități în forma

$$\frac{4\pi}{R_m}(W_1^2 + W_3^2 + 2W_1W_3) = \frac{4\pi}{R_m}(W_1 + W_3)^2$$

ca și cum s-ar forma o inductivitate cu o înfășurare formată din $(W_1 + W_3)$ spire.

În figura 9.89 se consideră locul geometric al vîrfului tensiunii de borne $\mathcal{U}_{b_1}$ pentru $\mathcal{I}_1$ constant, x_2 constant și r_2 variabilă. Se obține cercul tensiunii de borne $\mathcal{U}_{b_1}$, care reprezintă și cercul impedanței echivalente z_{1e} pentru $\mathcal{I}_1$ constant.

Pentru $\mathcal{I}_1 z_1^* = \mathcal{I}_2 z_2^*$ se obține un cerc cu diametrul $OA = \mathcal{I}_1 z_1^* = \text{const.}$

În direcția lui $\overline{OP}$ se găsește $\mathcal{I}_2$ și $\overline{AP}_2$ poate fi considerat ca o măsură pentru $\mathcal{I}_2$ deoarece $x_{33} + x_2$ e constant.

Cînd r_2 devine infinit de mare, $\mathcal{I}_2$ e nul și punctul P vine în A.

Scanned with OKEN Scanner

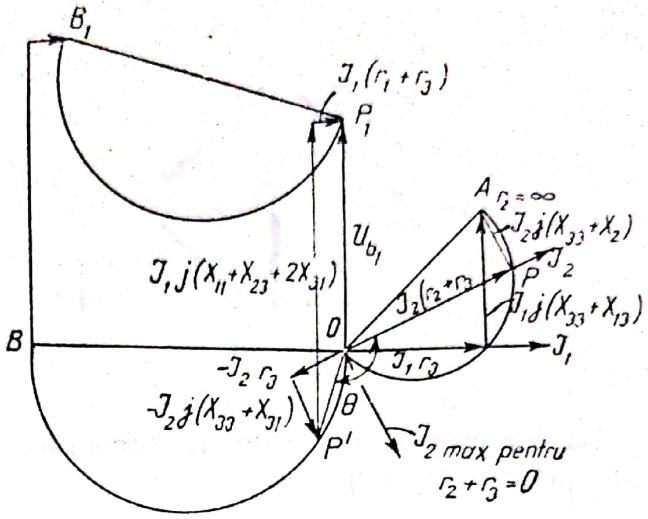


Fig. 9.89. Diagrama tensiunii $\mathcal{U}_{b_1}$ pentru $\mathcal{J}_1$ = constant, x_2 = constant și r_2 = variabilă.

Pentru $r_2 + r_3 = 0$, $\mathcal{J}_2$ devine maximal și e ortogonal pe $\overline{OA}$. Unghiul θ format de $\overline{OP'}$ cu $\mathcal{J}_2$ e constant, deoarece unghiul format de $-\mathcal{J}_2 r_3$ cu $-\mathcal{J}_2 j(x_{33} + x_{31})$ e constant. Cum punctul P se mișcă pe cerc, cînd r_2 e variabil, înseamnă că și P' se mișcă pe un alt cerc deoarece atît $\overline{OP'}$ cît și $\overline{AP}$ sînt proporționale cu $\mathcal{J}_2$.

Pentru obținerea diametrului cercului $\overline{OB}$ care corespunde punctului P' se formează unghiul θ între $\mathcal{J}_{2\,max}$ și $\overline{OB}$ care e constant.

Din vîrful lui P' se duce $\mathcal{J}_1\, j(x_{11} + x_{33} + 2x_{13}) + \mathcal{J}_1 r_1$ pentru a se obține $\mathcal{U}_{b_1}$ cu vîrful în P_1.

Deoarece $\mathcal{J}_1$ e constant, înseamnă că vîrful lui $\mathcal{U}_{b_1}$ se mișcă pe un cerc cu diametrul $\overline{P_1 B_1}$.

10. METODA TENSIUNILOR ECHIVALENTE

Se cere, spre exemplu, în figura 10.90 să se stabilească un circuit echivalent conectat la o tensiune echivalentă $\mathcal{U}_{i_1}$, atunci cînd se cere să se urmărească variația curentului $\mathcal{J}_1$ cînd variază numai impedanța z_1.

Se introduce în figura 10.90 stînga, circuitul echivalent cu un generator echivalent cu tensiunea $\mathcal{U}_{i_1}$ și impedanța interioară z_{i_1} așa fel încît la conectarea impedanței z_1 să circule curentul $\mathcal{J}_1$. Se cere să se determine $\mathcal{U}_{i_1}$ și z_{i_1}.

Cînd $\mathcal{U}_{i_1}$ și z_{i_1} devin cunoscute, se obține pentru $\mathcal{J}_1$ relația:

$$\mathcal{U}_{i_1} = \mathcal{J}_1(z_{i_1} + z_1).$$

de unde se poate ușor urmări variația curentului $\mathcal{J}_1$, atunci cînd z_1 variază.

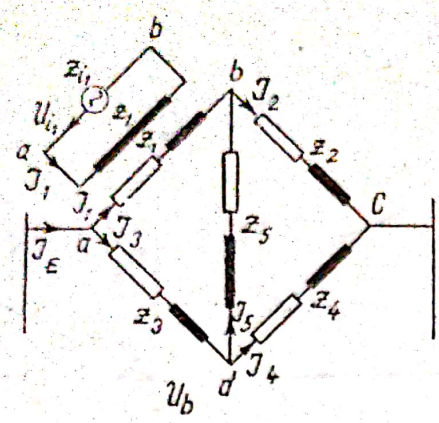


Fig. 10.90. Aplicarea metodei tensiunilor echivalente.

La cercetarea circuitului în conectare complexă din figura 7.74 s-a obținut pentru $\mathcal{J}_1$ expresia

$$\mathcal{J}_1 = \frac{\mathcal{U}_b\{(\varepsilon_3+\varepsilon_4)(\varepsilon_2+\varepsilon_5)+\varepsilon_3\varepsilon_4-\varepsilon_2\varepsilon_4\}}{(\varepsilon_1+\varepsilon_2)\{(\varepsilon_3+\varepsilon_4)(\varepsilon_2+\varepsilon_5)+\varepsilon_3\varepsilon_4\}-\varepsilon_2^2(\varepsilon_3+\varepsilon_4)}. \tag{1}$$

Din (1) se constată că nu se poate ușor urmări variația lui $\mathcal{J}_1$, în legătură cu variația lui ε_1.

Să urmărim circuitul cu generatorul echivalent din figura 10.90 stînga sus.

Pentru valorile momentane ale tensiunii și ale curentului electric se obține în circuitul generatorului

$$V_b - V_a + u_{i_1} - \lambda_{i_1}\frac{di_1}{dt} = i_1 r_{i_1} \tag{2}$$

iar pentru circuitul cu impedanța ε_1

$$V_a - V_b - L_1\frac{di_1}{dt} = i_1 r_1 \tag{3}$$

Relațiile (2) și (3) în forma complexă devin

$$\mathcal{V}_b - \mathcal{V}_a + \mathcal{U}_{i_1} = \mathcal{J}_1\varepsilon_{i_1} \text{ sau } \mathcal{U}_{i_1} - \mathcal{J}_1\varepsilon_{i_1} = \mathcal{V}_a - \mathcal{V}_b. \tag{4}$$

și

$$\mathcal{V}_a - \mathcal{V}_b = \mathcal{J}_1\varepsilon_1 = \mathcal{U}_{b_1}. \tag{5}$$

Se remarcă că pentru porțiunea de circuit în care se găsește generatorul se poate scrie

$$\mathcal{U}_{b_1} = \mathcal{C}_1\mathcal{J}_1 + \mathcal{C}_2 \tag{6}$$

Relația (6) ne arată, că U_b apare ca o funcție lineară de $\mathcal{J}_1$, ceea ce nu se putea obține din ecuația diferențială (2) pentru valorile momentane.

Pe lîngă relația (6) pentru porțiunea de circuit în care se găsește generatorul, mai folosim și relația (5) pentru circuitul de utilizare.

Scanned with OKEN Scanner

Se dă relaţia

$$\mathcal{U}_{b_1} = \mathcal{E}_1\mathcal{I}_1 + \mathcal{E}_2 = \mathcal{I}_1\mathcal{Z}_1 \tag{7}$$

şi se cere să se determine constantele $\mathcal{E}_1$ şi $\mathcal{E}_2$.

Se constată că din

$$\mathcal{I}_1(\mathcal{Z}_1 - \mathcal{E}_1) = \mathcal{E}_2. \tag{8}$$

pentru $\mathcal{Z}_1 \to \infty$, $\mathcal{E}_2$ fiind o constantă, rezultă $\mathcal{I}_1 = 0$.

Ca urmare pentru $\mathcal{Z}_1 \to \infty$ se obţine

$$\mathcal{E}_2 = (\mathcal{I}_1\mathcal{Z}_1)_{\mathcal{Z}_1=\infty} = \mathcal{U}_{i_1} \tag{9}$$

De asemenea se obţine din (7) pentru $\mathcal{Z}_1 = 0$

$$\mathcal{E}_1\mathcal{I}_{1k} + \mathcal{U}_{i_1} = 0$$

de unde se deduc

$$\mathcal{E}_1 = -\frac{\mathcal{U}_{i_1}}{\mathcal{I}_{1k}} = -\mathcal{Z}_{i_1}. \tag{10}$$

Din circuitul din figura 10.90 se obţine pentru $\mathcal{Z}_1 = \infty$, în baza relaţiei (1)

$$(\mathcal{I}_1\mathcal{Z}_1)_{\mathcal{Z}_1=\infty} = \mathcal{U}_{i_1} = \frac{\mathcal{U}_b\{(\mathcal{Z}_3+\mathcal{Z}_4)(\mathcal{Z}_2+\mathcal{Z}_5)+\mathcal{Z}_3\mathcal{Z}_4-\mathcal{Z}_2\mathcal{Z}_4\}}{\left(1+\frac{\mathcal{Z}_2}{\mathcal{Z}_1}\right)\{(\mathcal{Z}_3+\mathcal{Z}_4)(\mathcal{Z}_2+\mathcal{Z}_5)+\mathcal{Z}_3\mathcal{Z}_4\}-\frac{\mathcal{Z}_2^2}{\mathcal{Z}_1}(\mathcal{Z}_3+\mathcal{Z}_4)}$$

$$\mathcal{U}_{i_1} = \frac{\mathcal{U}_b\{(\mathcal{Z}_3+\mathcal{Z}_4)(\mathcal{Z}_2+\mathcal{Z}_5)+\mathcal{Z}_3\mathcal{Z}_4-\mathcal{Z}_2\mathcal{Z}_4\}}{(\mathcal{Z}_3+\mathcal{Z}_4)(\mathcal{Z}_2+\mathcal{Z}_5)+\mathcal{Z}_3\mathcal{Z}_4}. \tag{11}$$

iar pentru $\mathcal{Z}_1 = 0$ se obţine

$$\mathcal{I}_{1k} = \frac{\mathcal{U}_b\{(\mathcal{Z}_3+\mathcal{Z}_4)(\mathcal{Z}_2+\mathcal{Z}_5)+\mathcal{Z}_3\mathcal{Z}_4-\mathcal{Z}_2\mathcal{Z}_4\}}{\mathcal{Z}_2\{(\mathcal{Z}_3+\mathcal{Z}_4)(\mathcal{Z}_2+\mathcal{Z}_5)+\mathcal{Z}_3\mathcal{Z}_4\}-\mathcal{Z}_2^2(\mathcal{Z}_3+\mathcal{Z}_4)}$$

astfel că

$$\mathcal{Z}_{i_1} = \frac{\mathcal{U}_{i_1}}{\mathcal{I}_{1k}} = \frac{\mathcal{Z}_2\{(\mathcal{Z}_3+\mathcal{Z}_4)(\mathcal{Z}_2+\mathcal{Z}_5)+\mathcal{Z}_3\mathcal{Z}_4\}-\mathcal{Z}_2^2(\mathcal{Z}_3+\mathcal{Z}_4)}{(\mathcal{Z}_3+\mathcal{Z}_4)(\mathcal{Z}_2+\mathcal{Z}_5)+\mathcal{Z}_3\mathcal{Z}_4} \tag{12}$$

Se împart numărătorul şi numitorul din (12) cu $(\mathcal{Z}_3+\mathcal{Z}_4)$

$$\mathcal{Z}_{i_1} = \frac{\mathcal{Z}_2\left\{(\mathcal{Z}_2+\mathcal{Z}_5)+\frac{\mathcal{Z}_3\mathcal{Z}_4}{\mathcal{Z}_3+\mathcal{Z}_4}\right\}-\mathcal{Z}_2^2}{\mathcal{Z}_2+\mathcal{Z}_5+\frac{\mathcal{Z}_3\mathcal{Z}_4}{\mathcal{Z}_3+\mathcal{Z}_4}}$$

Scanned with OKEN Scanner

sau

$$z_{i_1} = \frac{z_2\left(z_5 + \dfrac{z_3 z_4}{z_3 + z_4}\right)}{z_2 + z_5 + \dfrac{z_3 z_4}{z_3 + z_4}}. \tag{13}$$

Se mai poate obține z_{i_1} și direct din schema circuitului cu generatorul echivalent din figura 10.90 stînga sus.

Parcurgînd circuitul generatorului echivalent de la b la a pentru $\mathcal{U}_{i_1} = 0$ se obține în acel circuit z_{i_1}.

Din circuitul în conectare complexă din figura 10.90 se obține pentru $\mathcal{U}_{i_1} = 0$, deci $\mathcal{U}_b = 0$, că punctele a și c posedă același potențial.

În figura 10.91 se reprezintă circuitul în conectare complexă cînd punctele a și c posedă același potențial ($\mathcal{U}_b = 0$).

Din schema din figura 10.91 se obține între b și a, în afară de z_1, impedanța z_{i_1}.

Între b și a avem z_5 în serie cu z_3 și z_4 conectate în paralel în forma $z_5 + \dfrac{z_3 z_4}{z_3 + z_4}$ și o astfel de impedanță se găsește în paralel cu z_2.

Se obține

$$z_{i_1} = \frac{\left(z_5 + \dfrac{z_3 z_4}{z_3 + z_4}\right) z_2}{z_5 + z_2 + \dfrac{z_3 z_4}{z_3 + z_4}}.$$

În felul acesta în relația $\mathcal{U}_{i_1} = \mathcal{J}_1(z_{i_1} + z_1)$ tensiunea generatorului echivalent $\mathcal{U}_{i_1}$ și impedanța interioară a generatorului z_{i_1}, sînt cunoscute, astfel că se obține într-o formă simplă circuitul $\mathcal{J}_1$ în funcție de z_1.

Ca o aplicație importantă a metodei tensiunilor echivalente o avem în cazul mai multor generatoare pentru curenți alternativi conectate în paralel.

În figura 10.92 se prezintă două generatoare în paralel la circuitul de utilizare cu tensiune de borne $\mathcal{U}_b$.

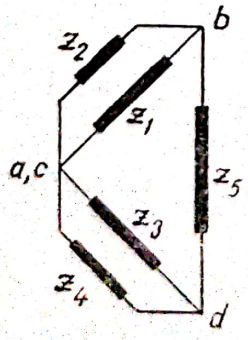


Fig. 10.91. Circuitul în conectare complexă cu $\mathcal{U}_b = 0$

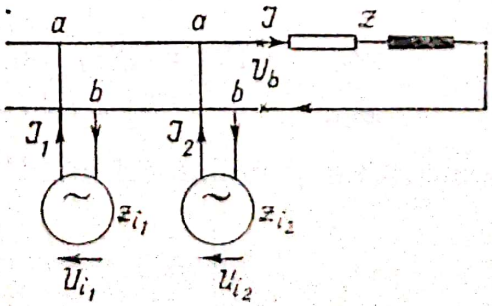


Fig. 10.92. Două generatoare pentru curent alternativ în paralel.

Scanned with OKEN Scanner

Pentru circuitul unui generator în sensul pozitiv de la b la a se obține pentru valorile momentane ecuația diferențială

$$V_b - V_a + u_{i_1} - \lambda_1 \frac{di_1}{dt} = i_1 r_1, \tag{14}$$

în care $V_a - V_b = u_b$ pentru circuitul de utilizare.

Relația (14) în forma complexă ne dă

$$\mathcal{U}_{i_1} - \mathcal{U}_b = \mathcal{I}_1 z_{i_1} \tag{15}$$

sau

$$\begin{aligned} \mathcal{U}_{i_1} - \mathcal{I}_1 z_{i_1} &= \mathcal{U}_b \\ \mathcal{U}_{i_2} - \mathcal{I}_2 z_{i_2} &= \mathcal{U}_b \end{aligned} \tag{16}$$

$$\mathcal{I}_1 + \mathcal{I}_2 = \mathcal{I} = \frac{\mathcal{U}_b}{z} \tag{17}$$

Împărțind prima relație din (16) cu z_{i_1} și a doua cu z_{i_2} și formînd suma se obține

$$\frac{\mathcal{U}_{i_1}}{z_{i_1}} + \frac{\mathcal{U}_{i_2}}{z_{i_2}} = \mathcal{U}_b \left(\frac{1}{z_{i_1}} + \frac{1}{z_{i_2}} + \frac{1}{z} \right).$$

sau

$$\mathcal{U}_b = \mathcal{I} z = \frac{\dfrac{\mathcal{U}_{i_1}}{z_{i_1}} + \dfrac{\mathcal{U}_{i_2}}{z_{i_2}}}{\dfrac{1}{z_{i_1}} + \dfrac{1}{z_{i_2}} + \dfrac{1}{z}}$$

Pentru introducerea unui generator echivalent în locul celor două generatoare în paralel din figura 10.92 cu tensiunea $\mathcal{U}_i$ și impedanța interioară z_i ca în figura 10.93 se formează:

$$(\mathcal{I} z)_{z=\infty} = \mathcal{U}_i = \frac{\dfrac{\mathcal{U}_{i_1}}{z_{i_1}} + \dfrac{\mathcal{U}_{i_2}}{z_{i_2}}}{\dfrac{1}{z_{i_1}} + \dfrac{1}{z_{i_2}}}$$

Din

$$\mathcal{I} = \frac{\dfrac{\mathcal{U}_{i_1}}{z_{i_1}} + \dfrac{\mathcal{U}_{i_2}}{z_{i_2}}}{z \left(\dfrac{1}{z_{i_1}} + \dfrac{1}{z_{i_2}} \right) + 1}$$

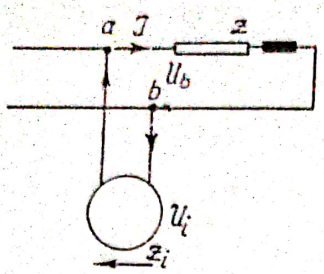


Fig. 10.93. Generator echivalent cu tensiunea $\mathcal{U}_i$ și impedanța z_i.

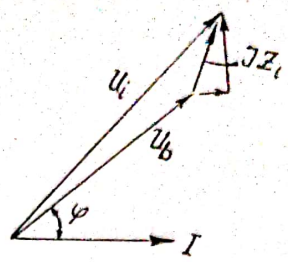


Fig. 94. Diagrama tensiunilor pentru generatorul echivalent.

și se obține pentru

$$z = 0; \quad \mathcal{J}_k = \frac{\mathcal{U}_{i_1}}{z_{i_1}} + \frac{\mathcal{U}_{i_2}}{z_{i_2}}.$$

Se obține impedanța generatorului echivalent în forma

$$\frac{\mathcal{U}_i}{\mathcal{J}_k} = z_i = \frac{1}{\frac{1}{z_{i_1}} + \frac{1}{z_{i_2}}} = \frac{z_{i_1} \cdot z_{i_2}}{z_{i_1} + z_{i_2}}.$$

Se mai poate obține z_i și în felul următor: se parcurge de la b la a în sensul pozitiv circuitul generatorului echivalent din figura 10.93 pentru $\mathcal{U}_i = 0$.

Deoarece pentru $\mathcal{U}_i = 0$ rezultă $\mathcal{U}_{i_1} = 0$, $\mathcal{U}_{i_2} = 0$ se constată că cele două impedanțe z_{i_1} și z_{i_2} devin conectate în paralel.

Ca urmare, se obține

$$\frac{1}{z_i} = \frac{1}{z_{i_1}} + \frac{1}{z_{i_2}}.$$

Din momentul în care mai multe generatoare în paralel pot fi înlocuite cu un singur generator echivalent de tensiune $\mathcal{U}_i$ și impedanță interioară z_i care produc același curent $\mathcal{J}$ în circuitul de utilizare cu impedanța z, înseamnă că se poate determina căderea de tensiune $\mathcal{J}z_i$ și pierderea de tensiune ΔU; $|U_i - U_b| = \Delta U$ pentru circuitul dat (v. fig. 10.94).

11. PUTEREA ACTIVĂ, REACTIVĂ ȘI APARENTĂ

În figura 11.95 se prezintă valorile momentane ale tensiunii de borne u_b, ale curentului electric i și ale puterii momentane $p = u_b \cdot i$ ca funcții de timp.

S-a considerat u_b și i ca funcții sinusoidale de timp.

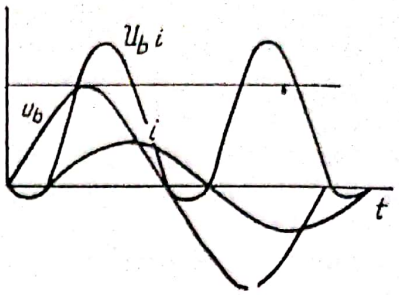


Fig. 11. 95. Tensiunea de borne u_b, curentul i şi puterea momentană $u_b\, i$ ca funcţie de timp.

Avem

$$u_b = u_m \sin \omega t$$
$$i = i_m \sin (\omega t - \varphi) \tag{1}$$
$$p = u_m i_m \sin \omega t \cdot \sin (\omega t - \varphi) =$$
$$= u_m i_m \frac{1}{2} \{\cos \varphi - \cos (2\omega t - \varphi)\}.$$

Se ţine seama de relaţiile trigonometrice

$$\cos (\alpha + \beta) = \cos \alpha \,.\, \cos \beta - \sin \alpha \cdot \sin \beta.$$
$$\cos (\alpha - \beta) = \cos \alpha \cdot \cos \beta + \sin \alpha \cdot \sin \beta.$$
$$\frac{1}{2}[\cos (\alpha - \beta) - \cos (\alpha + \beta)] = \sin \alpha \cdot \sin \beta.$$

Puterea medie în raport cu o perioadă T este

$$P = \frac{u_m i_m}{2}\left[\frac{1}{T}\int_0^T \cos \varphi \, \mathrm{d}\, t - \frac{1}{T}\int_0^T \cos (2\omega\, t - \varphi)\, \mathrm{d}\, t\right], \tag{2}$$

în care

$$\frac{1}{2\omega}[\sin\ (2\omega t - \varphi)]_0^T = 0,$$

astfel că

$$P = \frac{u_m i_m}{2} \cos \varphi = U_b I \cos \varphi. \tag{3}$$

Puterea medie în raport cu o perioadă în forma (3) se măsoară cu wattmetrul, datorită faptului, că asupra bobinei mobile a wattmetrului acţionează un cuplu mediu în raport cu o perioadă care e proporţional cu puterea medie P.

Un astfel de cuplu mediu pune bobina în rotaţie. Un alt cuplu rezistent produs de un resort, care e proporţional cu derivaţia α, compensează cuplul activ mijlociu cînd bobina mobilă se opreşte. Prin numărul de diviziuni α

indicat de arătătorul wattmetrului se va măsura cuplul mediu activ care e proporţional cu puterea medie din circuitul electric. Prin etalonarea instrumentului, numărul de diviziuni α indicat de arătător, va exprima puterea medie în waţi din circuitul dat.

Felul cum se prezintă puterea mijlocie în raport cu o perioadă în forma
(3) prezintă anumite inconveniente.

În figura 11.96 se prezintă un circuit electric şi diagrama de tensiune U_b cu curentul electric I la aceeaşi putere P.

Avem

$$I\cos\varphi = \frac{U_b}{z}\cdot\frac{r}{z} = U_b\cdot\frac{r}{z^2} = U_b\cdot g = \text{const};$$

care ne arată, că la o conductanţă g constantă puterea P se menţine constantă la diferiţi curenţi electrici I.

Pentru producătorul de energie electrică nu este indiferent dacă la o anumită putere P preluată de consumator, care în mod normal ar trebui să corespundă la un factor de putere $\cos\varphi$ admisibil, se pot totuşi forma curenţi electrici mai mari.

Efectul Joule-Lenz pe linie, în transformatoare şi în generatoare de forma I^2r, depinde de I^2, deci de curenţi care pot fi diferiţi la aceeaşi putere P. Contorul electric de energie activă, măsoară energia electrică care corespunde puterii active P. Cine suportă pierderile inadmisibile de energii calorice pe linii, transformatoare şi generatoare?

E deci necesar să se creeze o posibilitate de a îndemna pe consumatori să caute mijloace de îmbunătăţire a factorului de putere, pentru ca în felul acesta generatorul încărcat cu un curent nominal să fie încărcat şi cu o putere nominală. Se ştie că la toate maşinile electrice, temperatura admisibilă, limitează puterea maşinii, deoarece materialele izolatoare îşi păstrează calităţile de izolatoare pînă la anumite temperaturi.

Numai prin folosirea de material izolator care ar putea suporta o temperatură mai ridicată şi prin mijloace de răcire mai bune, se poate ridica puterea maşinii.

În primul rînd e necesar ca pe lîngă măsurarea puterii active P cu wattmetrul să se măsoare şi energia electrică (electromagnetică) consumată cu un contor electric spre exemplu într-un interval de timp de o lună.

Expresia energiei electrice e

$$W^{\text{kWh}} = \int_0^t u_b^{\text{V}}\cdot i^{\text{A}}\cdot \mathrm{d}t^{\text{s}}\cdot\frac{1}{1\,000}\cdot\frac{1}{3\,600}.$$

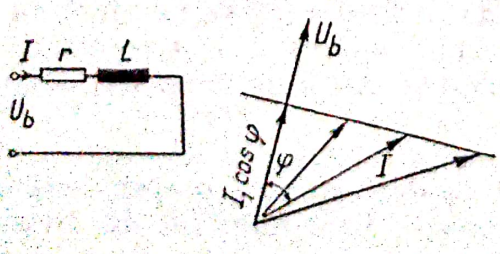


Fig. 11.96. Aceeaşi putere P la diferiţi curenţi I.

Scanned with OKEN Scanner

Discul contorului electric format din aluminiu, se pune în rotație datorită unui cuplu mediu în raport cu o perioadă T, care e proporțional cu puterea medie în raport cu o perioadă de forma

$$P = U_b I \cos \varphi.$$

Avem

$$(M_a^{mkg} \cdot 9{,}81)^J = C_1 U_b I \cos \varphi.$$

Discul trebuie să efectueze o mișcare uniform circulară, pentru ca prin numărul de ture efectuat să se poată măsura timpul t_h în ore.

Mișcarea discului devine uniform circulară prin introducerea unui cuplu rezistent $(M_r^{mkg} \cdot 9{,}81)^J$ care e produs cu ajutorul unui magnet permanent.

Prin rotirea discului în cîmpul inducției magnetice al magnetului permanent, apar tensiuni electromotoare respectiv curenți turbionari în disc, care frînează mișcarea cu un cuplu rezistent care e proporțional cu numărul de ture într-o secundă $n_s^{ture/s}$ (viteza unghiulară a discului e $2\pi n_s$).

La apariția unui cuplu activ, turația crește într-un interval de timp foarte scurt pînă se formează cuplu rezistent, astfel că regimul staționar cu n_s constant se crează foarte repede.

Din

$$(M_a^{mkg} \cdot 9{,}81)^J - (M_r^{mkg} \cdot 9{,}81)^J = 0$$

sau

$$C_1 U_b I \cos \varphi - C_2 n^{t/s} = 0$$

se obține în timp

$$C_1 \int_0^t U_b I \cos \varphi \, dt \frac{1}{1\,000} \frac{1}{3\,600} = C_2 \int n^{t/s} dt$$

sau

$$C_1 W^{kWh} = C_2 \zeta^{ture}.$$

Deoarece tensiunea de borne U_b e constantă se introduce

$$W^{kWh} = U_b^{kV} (I \cos \varphi)_{mijl} \cdot h_{ore}$$

ceea ce înseamnă că cu ajutorul contorului electric se poate deduce $(I \cos \varphi)_{mijl}$ care corespunde celor h ore de consum.

Pentru etalonarea contorului se formează

$$\frac{C_1}{C_2} W^{kWh} = C W^{kWh} = \zeta \text{ ture}.$$

în care constanta contorului C exprimă ture/kWh; spre exemplu se obține

$$C = 4\,000 \text{ t/kWh}.$$

Scanned with OKEN Scanner

Verificarea periodică a contorilor trebuie să constate că C își păstrează aceeași valoare la diferiți curenți și defazări.

Dacă s-ar putea obține experimental și determinarea mărimii $(I \sin \varphi)_{med}$ pe lîngă mărimea $(I \cos \varphi)_{med}$ atunci s-ar putea forma raportul

$$\frac{(I \sin \varphi)_{med}}{(I \cos \varphi)_{med}} = (\operatorname{tg} \varphi)_{med}$$

introdus prin definiție convențional, de unde se deduce factorul de putere mediu

$$(\cos \varphi)_{med} = \frac{1}{\sqrt{1 + (\operatorname{tg}^2 \varphi)_{med}}}.$$

În felul acesta se introduce noțiunea de putere reactivă în forma

$$U_b^{V} I^{A} \sin \varphi = P_r^{VAr} \text{ (voltamperreactiv).}$$

S-a văzut că puterea mijlocie în raport cu o perioadă P se obține din puterea momentană în forma

$$\frac{1}{T} \int_0^T u_b i \, dt = P^{W}.$$

Puterea reactivă însă, e o mărime de calcul, care nu se poate obține dintr-o expresie a unei puteri reactive momentane.

În figura 11.97 în stînga se prezintă schema montării wattmetrului în circuitul electric.

R_v reprezintă rezistența de protecție care limitează curentul i_v în circuitul bobinei de tensiune la valorile nominale. Inductivitatea bobinei mobile se neglijează. În figura 11.97 dreapta, se prezintă cele două bobine ale wattmetrului: bobina fixă de curent în care circulă curentul i și bobina de tensiune mobilă.

Asupra bobinei de tensiune acționează un cuplu momentan de forma

$$(M_{a\,mkg \cdot mom} \cdot 9{,}81)^{J} = Cii_v = Ci \frac{u_b}{R_v}$$

În paragraful 4.18 din capitolul despre fenomenul electromagnetic, s-a arătat că în cazul unui wattmetru acționează un cuplu activ, în forma

$$(M_{a\,mkg \cdot mom} \cdot 9{,}81)^{J} = i_1 i_2 \frac{\partial}{\partial \alpha} L_{12},$$

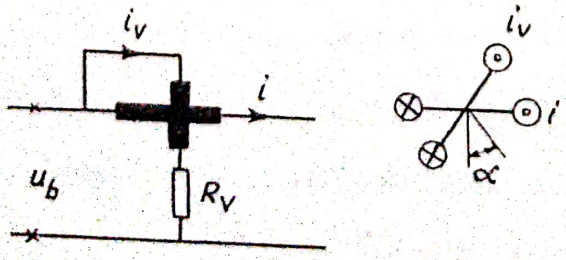


Fig. 11.97. Wattmetrul

în care admitem că

$$L_{12} = L_{12m} \cos \alpha,$$

astfel că

$$\frac{\partial L_{12}}{\partial \alpha} = - L_{12m} \sin \alpha$$

pentru $\alpha = \frac{\pi}{2}$ se obține

$$(M_{a_{\text{mkg} \cdot \text{mom}}} \cdot 9{,}81)^{\text{J}} = - i_1 i_2 L_{12m}.$$

Ca exemplu, un astfel de wattmetru la care α se menține mereu egal cu $\frac{\pi}{2}$ se prezintă în figura 11.98, denumit wattmetrul tip Ganz.

Bobina mobilă e mereu ținută perpendiculară pe bobina fixă cu ajutorul unui resort pînă cînd arătătorul revine în poziția inițială. Cadranul posedă diviziuni. E un instrument construit pe principiul electrodinamometric. Wattmetrele folosite azi indică prin poziția indicatorului un cuplu proporțional cu numărul de diviziuni la care $\frac{\partial L_{12}}{\partial \alpha}$ variază puțin, deoarece bobina mobilă nu se găsește față de bobina fixă în aceeași poziție ca la wattmetrul Ganz.

Pentru cuplul mijlociu în raport cu o perioadă, care pune bobina mobilă în mișcare, se obține

$$(M_{a_{\text{mkg} \cdot \text{med}}} \cdot 9{,}81)^{\text{J}} = C \frac{U_b}{R_v} I \cos \varphi.$$

După cum s-a relevat, cuplul rezistent la un wattmetru e produs de un resort.

Avem

$$(M_{r_{\text{mkg}}} \cdot 9{,}81)^{\text{J}} = C_1 \alpha_{\text{div}}.$$

Cînd arătătorul wattmetrului stă pe loc se obține $M_a - M_r = 0$, astfel că

$$U_b I \cos \varphi = C_w \cdot \alpha$$

în care constanta C_w e măsurată în W/diviziune e cunoscută prin etalonarea wattmetrului.

Din figura 11.99 se constată că există două posibilități de a conecta circuitul de tensiune al wattmetrului la tensiunea de borne a circuitului de utilizare.

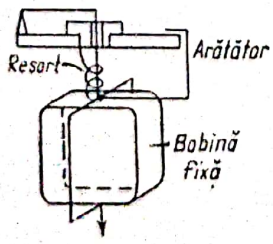


Fig. 11.98. Wattmetrul tip Ganz.

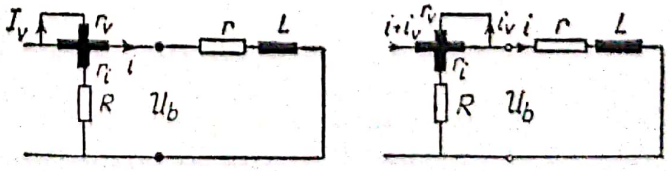


Fig. 11. 99. Măsurarea puterii P cu wattmetrul.

În figura din stînga circulă prin bobina de curent un curent electric egal cu cel din circuitul de utilizare.

În expresia puterii momentane p avem:

$$p = (u_b + ir_i)\, i = u_b \cdot i + i^2 r_i,$$

în care r_i reprezintă rezistența electrică a bobinei de curent, neglijînd căderea inductivă.

Rezultă că la măsurarea puterii mijlocii în raport cu o perioadă P în cazul cînd în bobina de curent circulă același curent ca în circuitul de utilizare, se măsoară în plus efectul Joule-Lenz din bobina de curent.

În figura din dreapta circulă prin bobina de curent o sumă de doi curenți $(i + i_v)$

Ca urmare expresia puterii momentane p ia forma

$$p = u_b(i + i_v) = u_b i + \frac{u_b^2}{R + r_v}$$

ceea ce înseamnă că se măsoară în plus efectul Joule-Lenz din circuitul de tensiune.

Din cele de mai sus, se constată că nu se măsoară just puterea din circuitul de utilizare.

Cînd se măsoară puteri mici, e necesar să se introducă o corectură.

În primul caz se cunoaște spre exemplu $I_n^2 r_i = 6\text{W}$ pentru curentul nominal $I_n = 5\,\text{A}$ considerat ca curent maxim care circulă prin bobina de curent.

În al doilea caz se ține seama că la o tensiune de borne, spre exemplu de 30 V, rezistența $r_v + R$ din circuitul de tensiune este $1\,000\,\Omega$, ceea ce înseamnă că valoarea maximă a curentului electric care circulă prin circuitul de tensiune este de 30 mA.

De obicei pînă la 30 V rezistența R se găsește în wattmetru.

Spre exemplu cînd tensiunea U_b este 120 V se conectează la bobina de tensiune o rezistență R stabilită din $\frac{120\ \text{V}}{30\ \text{V}} = 4$, ceea ce înseamnă că e necesar ca $r_v + R = 4\,000\,\Omega$ pentru a nu se depăși curentul de 30 mA.

Deoarece în wattmetru există rezistența de $1\,000\,\Omega$ se va conecta în serie $R = 3\,000\,\Omega$.

La tensiunea de 120 V, efectul Joule-Lenz din circuitul de tensiune este

$$\frac{U_b^2}{r_v + R} = \frac{120^2}{4000} = 3{,}6\ \text{W}.$$

La o tensiune de 420 V efectul Joule-Lenz în circuitul de tensiune devine deja

$$\frac{U_b^2}{r_v + R} = \frac{420^2}{4000} = 12{,}6\ \text{W}.$$

Spre exemplu la măsurarea pierderilor în fier cînd puterea ce trebuie măsurată este în forma $P = U_b I \cos\varphi$, în care

$$U_b = 420\ \text{V} \qquad I = 0{,}2\,\text{A} \qquad \cos\varphi = 0{,}3,$$

Scanned with OKEN Scanner

astfel că

$$P = 25{,}2 \text{ W}.$$

E firesc că nu se poate efectua conectarea circuitului de tensiune în așa fel ca prin bobina de curent să circule $i + i_v$, deoarece se va măsura în plus efectul Joule-Lenz din circuitul de tensiune care este de 12,6 V.

Dacă în acest exemplu se conectează circuitul de tensiune în așa fel ca prin bobina de curent să circule același curent ca în circuitul de utilizare, efectul Joule-Lenz din bobina de curent măsurat în plus e neglijabil.

Avem

$$I^2 r_i = 0{,}2^2 \left(\frac{6}{5^2}\right) = 0{,}2^2 \cdot 0{,}24 = 0{,}0096 \text{ W}.$$

Se mai constată că atunci cînd apar curenți mari și tensiuni de borne mici, spre exemplu $I = 5$ A; $U_b = 0{,}5$ V; $\cos \varphi = 1$ se obține $P = U_b I \cos \varphi = 0{,}25$ W.

Într-un astfel de caz nu se poate efectua conectarea circuitului de tensiune care va duce la curentul în bobina de curent egal cu curentul din circuitul de utilizare, deoarece s-ar măsura în plus $I^2 r_i = 6$ W.

La folosirea wattmetrului e necesar să se cunoască constanta lui exprimată prin C, W/diviziune.

C depinde de curentul maximal admis în bobina de curent și de tensiunea maximală admisă la bornele bobinei de tensiune în serie cu rezistența de protecție R. Spre exemplu pentru 5 A și 420 V puterea maximă măsurabilă este $5 \cdot 420 = 2\,100$ W.

Ca urmare

$$C = \frac{2\,100^{\text{W}}}{150 \text{ div.}} = 14 \text{ W/div.}$$

E important să se mai releve faptul că wattmetrul măsoară un cuplu mediu în raport cu o perioadă și în cazul cînd cele două bobine ale sale sînt alimentate de la două surse separate.

Unul din generatoare, alimentează bobina de curent cu curentul i, iar celălalt generator are la bornele lui cu tensiune u_b, circuitul de tensiune al wattmetrului în serie cu rezistența R.

În acest caz, expresia $U_b I \cos \varphi$ care e proporțională cu cuplul mijlociu activ, care acționează asupra bobinei mobile, nu mai exprimă puterea într-un circuit electric conectat la tensiunea u_b și în care circulă curentul i.

Aceasta se datorește faptului că puterea medie în raport cu o perioadă nu e măsurată direct, ci prin intermediul cuplului mediu care acționează asupra bobinei mobile.

Dacă în circuitul de tensiune al wattmetrului din figura 11.100 se introduce o reactanță adițională L în loc de rezistența R_v, atunci expresia

cuplului mediu activ care pune bobina de tensiune în mișcare se exprimă în forma

$$(M_{a\,\mathrm{mkg}\cdot\mathrm{med}} \cdot 9{,}81)^{\mathrm{J}} = CII_v \cos\psi = CI\frac{U_b}{x}\sin\varphi.$$

În figura 11.100 dreapta, se vede că I_v e defazat cu $\frac{\pi}{2}$ înapoi față de U_b.

După cum vedem, puterea reactivă P_r^{VAr} apare numai în expresia cuplului mediu în raport cu o perioadă care pune bobina mobilă în mișcare. Datorită unui moment de inerție mare al bobinei, ea nu e pusă în mișcare de un cuplu momentan.

Din punct de vedere matematic $U_bI\cos\varphi$ și $U_bI\sin\varphi$ posedă aceeași dimensiune; însă din punct de vedere fenomenologic ele diferă din cauza că prima e dedusă dintr-o valoare momentană a puterii și a doua o facem noi să apară în expresia cuplului mediu în raport cu o perioadă.

Avem

$$P^{\mathrm{W}} = U_b^{\mathrm{V}} I^{\mathrm{A}} \cos\varphi$$

$$P_r^{\mathrm{VAr}} = I_b^{\mathrm{V}} I^{\mathrm{A}} \sin\varphi$$

$$P_a^2 = P^2 + P_r^2 = U_b^2 I^2,$$

în care $P_a^{\mathrm{VA}} = U_b^{\mathrm{V}} \cdot I^{\mathrm{A}}$ e denumită putere aparentă. Ea se exprimă în Volt-amperi.

La un contor electric care măsoară energia reactivă, acționează asupra discului de aluminiu un cuplu mijlociu în raport cu o perioadă exprimat în forma:

$$(M_{a\,\mathrm{mkg}} \cdot 9{,}81)^{\mathrm{J}} = C(U_bI\sin\varphi).$$

Ca urmare, energia reactivă măsurată în kVoltamper reactiv ore, devine

$$W_r^{\mathrm{kVArh}} = \int_0^t (U_b^{\mathrm{V}} I^{\mathrm{A}} \sin\varphi)\,\mathrm{d}t^{\mathrm{s}}\,\frac{1}{1\,000}\cdot\frac{1}{3\,600} = U_b^{\mathrm{kV}}(I\sin\varphi)_{\mathrm{mijl.}} \cdot h_{\mathrm{ore}}.$$

Prin măsurarea energiei active și a energiei reactive se formează raportul

$$\frac{W_r}{W} = (\mathrm{tg}\,\varphi)_{\mathrm{med}}; \qquad (\cos\varphi)_{\mathrm{med}} = \frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{W_r}{W}\right)^2}}.$$

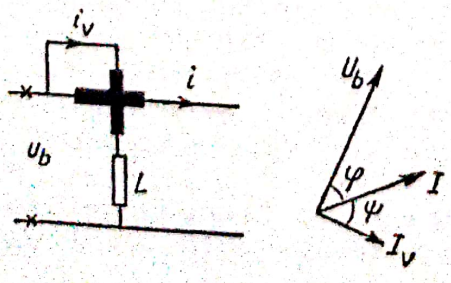


Fig. 11.100. Măsurarea puterii reactive.

În felul acesta se obţine factorul de putere mediu în raport cu durata de timp de o lună, pentru a aprecia cum trebuie fixat tariful pentru consumul de energie.

În figura 11.101, I se prezintă contorul electric pentru măsurarea energiei active. În figura 11.101, II se prezintă diagrama fluxurilor magnetice Φ_i şi Φ_U care trec prin discul de aluminiu. În paragraful 4.19 din capitolul fenomenul electromagnetic s-a arătat cum se poate obţine Φ_U care corespunde tensiunii de borne U_b decalat apoi ca un unghi β ceva mai mare ca $\frac{\pi}{2}$. Un astfel de decalaj se obţine prin anumite rezistenţe magnetice din circuitul feromagnetic dat. Prin placa de cupru şi placa de fier din figură se reglează unghiul α.

Exprimîndu-se cuplul mijlociu activ în forma

$$(M_{a\,\mathrm{mkg\cdot mijl}} \cdot 9{,}81)^{\mathrm{J}} = C\Phi_U \cdot \Phi_i \sin \psi,$$

în care

$$\Phi_U = \frac{U_b}{C_U}; \qquad \Phi_i = \frac{I}{C_i},$$

iar din

$$\psi = \beta - (\varphi + \alpha)$$

cînd se realizează

$$\beta - \alpha = \frac{\pi}{2}$$

se obţine

$$\psi = \frac{\pi}{2} - \varphi; \qquad \sin \psi = \cos \varphi,$$

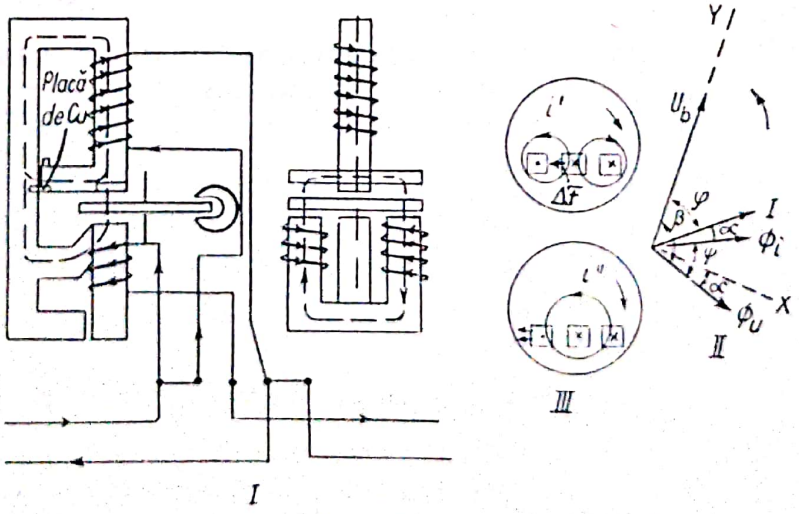


Fig. 11.101. Contor electric şi diagrama fluxurilor pentru măsurarea energiei active.

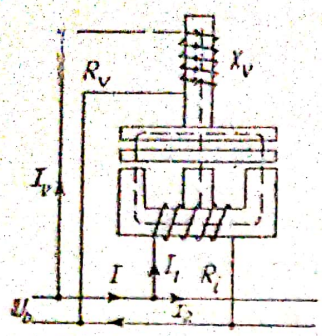


Fig. 11.102. Contor electric și diagrama fluxurilor pentru măsurarea energiei reactive.

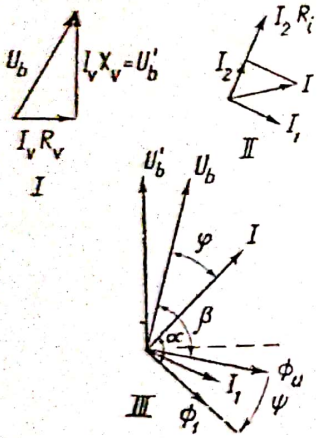


Fig. 11.103. Diagramele de tensiune în I, de curenții în II și de fluxuri în III.

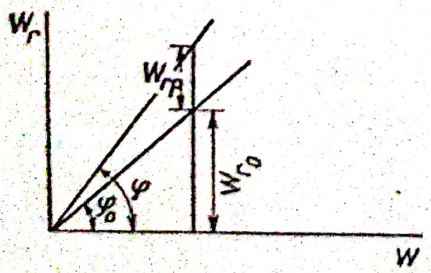


Fig. 11.104. Diagrama pentru evidențierea energiei W_{rp}.

astfel că

$$(M_{a\ \text{mkg}\cdot\text{mijl}} \cdot 9{,}81) = C_w \cdot U_b I \cos \varphi.$$

În figura 11.101, III se prezintă sus, curenții turbionari în discul de aluminiu cînd Φ_U e maxim în timp, deci Φ_i descrește în timp. Φ_U e maxim în timp cînd se consideră Φ_U în direcția axei y din figura 11.101, II.

Cînd Φ_i în sensul indicat în figură descrește în timp, înseamnă că tensiunea electromotoare respectiv curentul electric turbionar i' în disc obține sensul indicat în figură.

Ca urmare, asupra acestui curent i' acționează o forță de forma $d\mathfrak{F} = i'[d\ell\ \mathfrak{B}_U]$, care ne arată sensul de rotație al discului.

În figura 11.101, III jos se consideră cazul cînd în timp Φ_i este maximal, astfel că Φ_U crește în timp. Datorită lui Φ_U care crește în timp apar curenți electrici turbionari i'' în sensul indicat în figură; ca urmare acționează forțe de forma $d\mathfrak{F} = i''[d\ell\ \mathfrak{B}_i]$ de unde se constată că forța își menține același sens ca în primul caz. Discul de aluminiu se rotește spre dreapta.

În figura 11.102 se prezintă contorul electric pentru măsurarea energiei reactive.

În figura 11.103, I se reprezintă tensiunea U_b în componentele sale U_b' și $I_v R_v$, iar în figura 11.103, II se prezintă curentul I descompus în curenții I_1 și I_2.

Ca urmare în figura 11.103, III se reprezintă diagrama fluxurilor Φ_U și Φ_i în discul de aluminiu.

Se (obține $(\varphi + \alpha) - \beta = \psi$.

Pentru $\alpha = \beta$ rezultă $\varphi = \psi$ astfel că

$$(M_{a\ \text{mkg}\cdot\text{mijl}} \cdot 9{,}81)^J = C_W U_b \cdot I \sin \varphi.$$

Pentru realizarea unei îmbunătățiri a factorului de putere se introduce o penalizare cînd cos φ e mai mic ca spre exemplu 0,9 și o bonificare la tarif cînd cos φ e mai mare ca 0,9.

Se consideră $\cos \varphi_0 = 0{,}9$.

Din diagrama din figura 11.104 se obține pentru energia reactivă care e penalizată W_{rp} forma $W_{rp} = W_r - W_{r0}$.

Astfel că

$$W_r = W_{r0} + W_{rp}; \quad \operatorname{tg}\varphi = \frac{W_r}{W} = \operatorname{tg}\varphi_0 + \frac{W_{rp}}{W}$$

$$(\cos\varphi)_{\text{med}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\operatorname{tg}\varphi_0 + \frac{W_{rp}}{W}\right)^2}}.$$

Scanned with OKEN Scanner

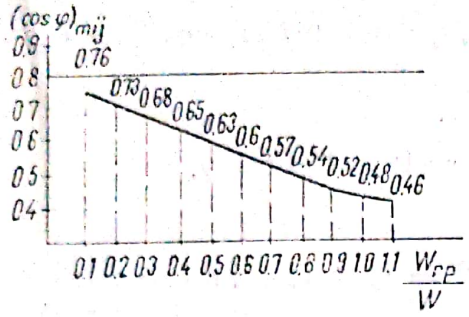


Fig. 11.105. $(\cos\varphi)_{mijl}$ în funcție de $\frac{W_{rp}}{W}$.

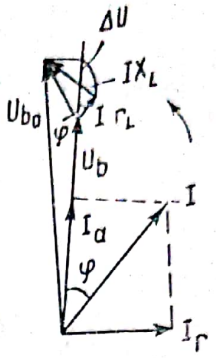


Fig. 11.106. Curent activ și curent reactiv.

Din diagrama din figura 11.105 se obține $(\cos\varphi)_{med}$ în funcție de $\frac{W_{rp}}{W}$.

Mărimea $\frac{W_{rp}}{W}$ formează un criteriu pentru fixarea penalizării.

Odată cu introducerea noțiunilor de putere activă și putere reactivă se introduc și noțiunile de curent activ și curent electric reactiv sau curent watat și curent dewatat.

În figura 11.106 se descompune curentul electric I în două componente: curentul activ în fază cu U_b și curentul reactiv defazat cu $\frac{\pi}{2}$ față de U_b. Ca și cum ar exista două circuite echivalente în paralel unul cu rezistența r_e și celălalt cu o reactanță ωL_e, conectate la tensiunea de borne U_b.

Se obține

$$U_b = I_a r_e \qquad U_b = I_r \omega L_e,$$

de unde se deduc

$$r_e = \frac{U_b}{I\cos\varphi} = \frac{U_b^2}{P}; \qquad \omega L_e = \frac{U_b}{I\sin\varphi} = \frac{U_b^2}{P_r}.$$

În figura 11.107 se prezintă circuitele electrice în paralel r_e și ωL_e la tensiunea de borne momentană u_b. Curenții momentani sînt $i = i_a + i_r$.

Circuitele din figura 11.107 reprezintă modalitatea de a evidenția prin valori momentane, cum se deosebesc puterea activă de cea reactivă; ca și cum circuitul cu r_e consumă puterea activă P, iar circuitul cu ωL_e, posedă puterea activă egală cu zero, în schimb mărimea $U_b I \sin\varphi$ e diferită de zero.

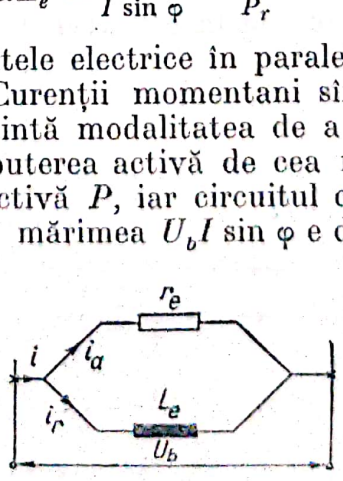


Fig. 11.107. Două circuite echivalente în paralel.

Din

$$\frac{1}{T}\int_0^T u_b(i_a + i_r)\,dt = U_b I_a \cos 0 + U_b I_r \cos\frac{\pi}{2} = U_b I \cos\varphi$$

se obține

$$U_b I_a \cos 0 = U_b I \cos\varphi,$$

iar din

$$\frac{1}{T}\int_0^T i^2\,dt = I^2 = I_a^2 + I_r^2 + 2I_a I_r \cos\frac{\pi}{2}$$

se obține că I_a și I_r apar ca curenți ortogonali.

Din figura 11.102 se obține pierderea de tensiune ΔU în forma

$$\Delta U = I r_L \cos\varphi + I x_L \sin\varphi.$$

Introducîndu-se $I\cos\varphi = I_a$; $I\sin\varphi = I_r$, pierderea de tensiune devine

$$\Delta U = I_a r_L + I_r x_L$$

ca și cum curentul activ contribuie la căderea ohmică pe linie, iar curentul reactiv produce căderea reactivă.

12. FACTORUL DE PUTERE ȘI FACTORUL DE DEFAZARE LA UN CIRCUIT MONOFAZAT

Se introduce noțiunea de putere maximă P_{max}^{watt} într-un circuit de utilizare la aceeași tensiune de borne și același efect Joule-Lenz pe linie $I^2 r_L$.

Avem

$$P_{max}^{W} = U_b I' \cos 0$$

ceea ce înseamnă că în circuitul de utilizare apare numai o rezistență electrică r^*.

Din

$$I'^2 r_L = I^2 r_I$$

rezultă că $I' = I$.

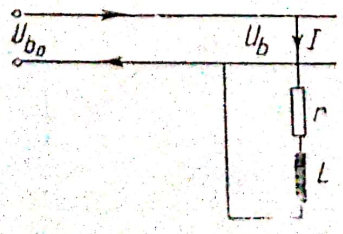


Fig. 12.108. Factorul de putere și factorul de defazare.

Scanned with OKEN Scanner

Deci

$$P_{max}^{W} = U_b I \cos 0.$$

Din

$$\frac{P}{P_{max}} = \frac{U_b I \cos \varphi}{U_b I \cos 0} = \cos \varphi = \Delta$$

se constată că la un circuit monofazat factorul de putere Δ este egal cu factorul de defazare $\cos \varphi$.

Se va vedea mai tîrziu că la un circuit trifazat nesimetric factorul de putere nu mai este egal cu factorul de defazare $\cos \varphi$.

Să considerăm cazul cînd circuitul din figura 12.108 ar reprezenta un circuit echivalent al unui circuit în conectare complexă, ca acela din figura 5.40.

Ca urmare avem

$$U_b = I z_e$$

în care

$$z_e = \sqrt{r_e^2 + x_e^2}$$

$$\operatorname{tg} \varphi_e = \frac{x_e}{r_e}.$$

Puterea totală a celor cinci ramuri ale circuitului în conectare complexă din figura 5.49 este

$$P = \sum U_\nu I_\nu \cos \varphi_\nu = U_b I \cos \varphi_e.$$

Pentru circuitul echivalent puterea maximală este

$$P_{max}^{W} = U_b I \cos 0 = I^2 r^*$$

în care

$$U_b = I r^*$$

iar pe linie efectul Joule-Lenz este $I^2 r_L$.

Din cele ce urmează se va vedea, că introducîndu-se $\cos \varphi_e^* = \cos 0 = 1$ deci $\varphi_e^* = 0$ nu înseamnă că și defazările φ_1, $\varphi_2 \ldots \varphi_5$ vor deveni nule.

Pentru a se obține puterea totală maximă, e necesar să se adune la $\varphi_1 \ldots \varphi_5$ o anumită defazare ε.

Introducîndu-se

$$P_{max} = U_1 I_1 \cos(\varphi_1 + \varepsilon) + U_2 I_2 \cos(\varphi_2 + \varepsilon) + \ldots + U_5 I_5 \cos(\varphi_5 + \varepsilon)$$

înseamnă că avem

$$\frac{\partial P_{max}}{\partial \varepsilon} = 0$$

adică pentru

$$P_{max} = \Sigma\{U_\nu I_\nu \cos \varphi_\nu \cdot \cos \varepsilon - U_\nu I_\nu \sin \varphi_\nu \sin \varepsilon\} =$$

$$= \cos \varepsilon \Sigma P_\nu - \sin \varepsilon \Sigma P_{r\nu}$$

rezultă

$$\frac{\partial P_{max}}{\partial \varepsilon} = 0 = \Sigma\{- U_\nu I_\nu \cos \varphi_\nu \cdot \sin \varepsilon - U_\nu I_\nu \sin \varphi_\nu \cdot \cos \varepsilon\} =$$

$$= - \sin \varepsilon \Sigma P_\nu - \cos \varepsilon \Sigma P_{r\nu}$$

de unde se deduce

$$\operatorname{tg} \varepsilon = - \frac{\Sigma P_{r\nu}}{\Sigma P_\nu}.$$

Se constată că pentru $\Sigma P_{r\nu} = 0$, ε devine nul.

Ca urmare, introducîndu-se în expresia puterii totale maximale pe $\operatorname{tg} \varepsilon$ de mai sus se va obține

$$P_{max} = \cos \varepsilon [\Sigma P_\nu - \operatorname{tg} \varepsilon \Sigma P_{r\nu}] = \cos \varepsilon \left[\Sigma P_\nu + \frac{\Sigma P_{r\nu}}{\Sigma P_\nu} \Sigma P_{r\nu}\right] =$$

$$= \cos \varepsilon \frac{(\Sigma P_\nu)^2 + (\Sigma P_{r\nu})^2}{\Sigma P_\nu}$$

în care

$$\cos \varepsilon = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\Sigma P_{r\nu}}{\Sigma P_\nu}\right)^2}} = \frac{\Sigma P_\nu}{\sqrt{(\Sigma P_\nu)^2 + (\Sigma P_{r\nu})^2}}$$

astfel că

$$P_{max} = \sqrt{(\Sigma P_\nu)^2 + (\Sigma P_{r\nu})^2}$$

ceea ce corespunde cu definiția dată puterii maxime pentru circuitul echivalent, deoarece avem

$$(U_b I \cos \varphi_e)^2 + (U_b I \sin \varphi_e)^2 = (U_b I)^2.$$

13. REPREZENTAREA PUTERILOR ÎN PLANUL COMPLEX

Din figura 13.109 se obține

$$\mathcal{U}_b = U_b\, e^{j\alpha} \qquad z_e = z e^{j\varphi}$$
$$\mathcal{J} = I\, e^{j(\alpha-\varphi)} \qquad \mathcal{U}_b = z\mathcal{J}$$

și ținînd seama de expresiile puterilor P, P_r și P_a

$$P = U_b I \cos\varphi \qquad P_r = U_b I \sin\varphi \qquad P_a^2 = P^2 + P_r^2$$

se introduce puterea aparentă P_a în forma complexă în felul următor: deosebim două modalități:

I. $$\mathcal{P}_a = \mathcal{U}_b \cdot \bar{\mathcal{J}} = U_b I\, e^{j\varphi} = U_b I\,(\cos\varphi + j \sin\varphi) = P + j\, P_r$$

$$\mathcal{P}_a = \mathcal{U}_b \cdot \bar{\mathcal{J}} \cdot \frac{\mathcal{J}}{\mathcal{J}} = z I^2 \text{ în care } z = r + j\, x.$$

În figura 13.109 se reprezintă puterea aparentă P_a în forma de mai sus.

II. A doua modalitate de reprezentare a puterii aparente este

$$\mathcal{P}_a = \bar{\mathcal{U}}_b \cdot \mathcal{J} = U_b I\, e^{-j\varphi} = U_b I \cos\varphi - j\, U_b I \sin\varphi = P - jP_r$$

$$\mathcal{P}_a = \bar{\mathcal{U}}_b \cdot \mathcal{J} \cdot \frac{\mathcal{U}_b}{\mathcal{U}_b} = U_b^2 \cdot y.$$

În figura 13.109 se reprezintă puterea aparentă în forma doua cu ajutorul admitanței y, în care $y = g - j\, b$.

De altfel se constată din $\mathcal{P}_a = z \cdot I^2$ că se obține forma a doua de exprimare a puterii aparente, introducîndu-se $\mathcal{P}_a = \bar{z} \cdot I^2$, deoarece

$$\mathcal{P}_a = \bar{z} I^2 \cdot \frac{z}{z} = z^2 I^2 \frac{1}{z} = U_b^2 y.$$

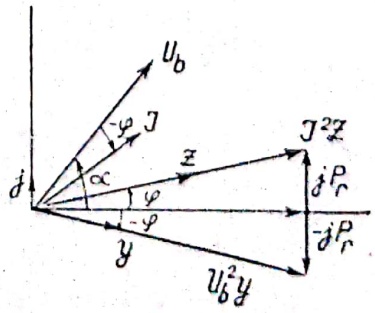


Fig. 13.109. Puterea activă P și puterea reactivă în planul complex.

În general se folosește forma a doua de exprimarea puterii aparente, pentru că circuitele sînt conectate la tensiuni de borne U_b constante.

$$\mathcal{P}_a = U_b^2\{y_1 + y_2 + \ldots y_n\}.$$

În caz cînd apar circuite în serie se va introduce

$$\mathcal{P}_a = I^2\{\bar{z}_1 + \bar{z}_2 + \ldots + \bar{z}_n\}$$

exprimîndu-se în felul acesta $\mathcal{P}_a$ în aceeași formă.

14. CALCULUL REȚELELOR CU AJUTORUL METODEI COMPLEXE

În figura 14.110 se reprezintă sus linia de distribuție și jos diagrama tensiunilor și a curenților. Pentru simplificarea calculelor se formează defazările β, γ de la axa reală. În felul acesta curentul rezultant $\mathcal{J}_{\alpha\beta}$ se poate determina fără să se construiască tensiunea $\mathcal{U}_\beta$.

Puterile aparente în circuitele de utilizare sînt

$$\mathcal{P}_{a\gamma} = \mathcal{U}_\gamma \cdot \mathcal{J}_\gamma = U_\gamma^2 y_\gamma = P_\gamma - \mathrm{j}P_{r\gamma}$$

$$\mathcal{P}_{a\beta} = \overline{\mathcal{U}_\beta} \cdot \mathcal{J}_\beta = U_\beta^2 y_\beta = P_\beta - \mathrm{j}P_{r\beta}.$$

Tensiunile pot fi exprimate cu ajutorul puterilor aparente în formele

$$\mathcal{U}_\gamma,\ \mathcal{U}_\beta = \mathcal{U}_\gamma + \mathcal{J}_\gamma z_{\beta\gamma} = \mathcal{U}_\gamma + \frac{\mathcal{P}_{a\gamma}}{\overline{\mathcal{U}_\gamma}} z_{\beta\gamma}$$

$$\mathcal{U}_\alpha = \mathcal{U}_\gamma + \mathcal{J}_\gamma z_{\beta\gamma} + (\mathcal{J}_\gamma + \mathcal{J}_\beta) z_{\alpha\beta} =$$

$$= \mathcal{U}_\gamma + \mathcal{J}_\gamma(z_{\beta\gamma} + z_{\alpha\beta}) + \mathcal{J}_\beta z_{\alpha\beta} =$$

$$= \mathcal{U}_\gamma + \frac{\mathcal{P}_{a\gamma}}{\overline{\mathcal{U}_\gamma}}(z_{\beta\gamma} + z_{\alpha\beta}) + \frac{\mathcal{P}_{a\beta}}{\overline{\mathcal{U}_\beta}} z_{\alpha\beta}.$$

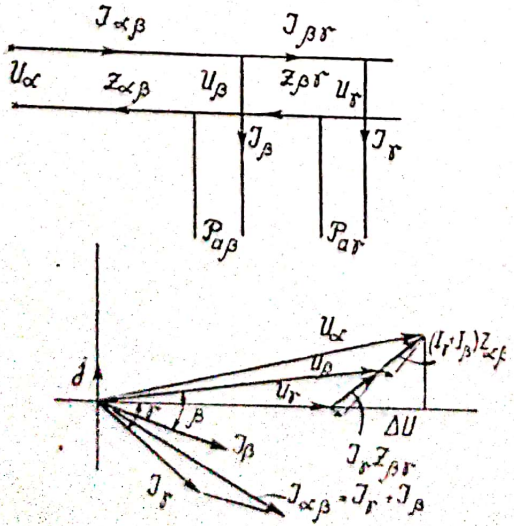


Fig. 14.110. Linie de distribuție și diagrama tensiunilor și a curenților.

Puterea totală apare în forma

$$\mathcal{P}_{\alpha} = \overline{\mathcal{U}}_{\alpha}(\mathcal{I}_{\gamma} + \mathcal{I}_{\beta}) = I^2_{\alpha\beta}\bar{z}_{\alpha\beta} + I^2_{\gamma\bar{z}\beta\gamma} + \mathcal{P}_{a\beta} + \mathcal{P}_{a\gamma}.$$

15. GENERATORUL HALL

Figura 15.111 reprezintă generatorul Hall. Efectul Hall, adică apariția tensiunii Hall U_{h_0} e cunoscut din 1879.

Plăcuța de Ge-n e străbătută de curentul de comandă i_c de la o tensiune de borne U_c. Datorită existenței intensității de cîmp electric $\mathcal{E}_x$, electronii se deplasează de la 2 către 1.

Relația

$$v = k_- \mathcal{E}_x$$

ne arată legătura dintre viteza electronilor majoritari din Ge-n și intensitatea cîmpului electric $\mathcal{E}_x$.

$\lvert k_- \rvert =$	45 cm/s · cm/V	la Cu
	3 600	Ge-n
	34 000	InSb
	65 000	InAs.

Din tabela de mai sus se vede cît e de mic factorul de mobilitate la Cu față de factorul de mobilitate la Ge-n și în special la aliajele intermetalice InSb (Indiumantimonid) și InAs (Indiumarsenid), denumite și semiconductoare sintetice.

Dat fiindcă factorul de mobilitate la semiconductoare e cu mult mai mare ca la metale, rezultă că la aceeași intensitate de cîmp electric, viteza electronilor în semiconductoare e cu mult mai mare ca la metale.

În figura 15.111 plăcuța de Ge-n e străbătută perpendicular de un cîmp de inducție magnetică $\mathcal{B}$. Prin apariția cîmpului inducției magnetice $\mathcal{B}$, apare un cîmp electric de intensitate $\mathcal{E}_y$ în forma

$$\mathcal{E}_y^{V/cm} = [v_{cm/s} \cdot \mathcal{B}^G]\, 10^{-8}.$$

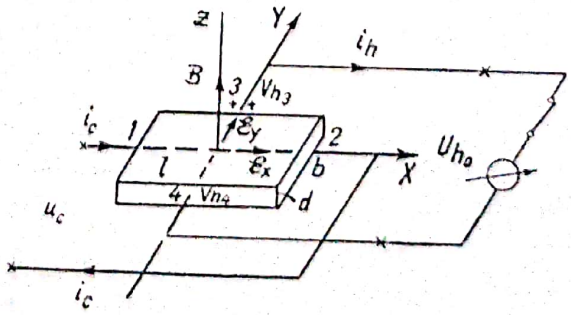


Fig. 15.111. Generatorul Hall.

În care a reprezintă viteza electronilor majoritari în spațiul ocupat de Ge-n.

Fie

$$a = v_- \, i \qquad \mathcal{B} = B \cdot k.$$

Ca urmare

$$\mathcal{E}_y = E_y \cdot \mathrm{j} = v_- \cdot B[ik]\, 10^{-8} = v_- \, B(-\mathrm{j})\, 10^{-8} = v \cdot B \cdot 10^{-8}\, \mathrm{j}.$$

Pe de altă parte

$$V_- = k_- \, E_x$$

în care

$$\lambda = nqk_- \qquad k_- = \frac{\lambda}{nq} \qquad q < 0$$

astfel că:

$$v_- = \frac{\lambda}{nq} \cdot \frac{i_c}{\mathrm{d}b\lambda} = \frac{1}{nq} \cdot \frac{1}{\mathrm{d}b}\, i_c$$

$$E_y^{\mathrm{V/cm}} = -\frac{1}{nq} \cdot \frac{1}{\mathrm{d}b}\, i_c \cdot B \cdot 10^{-8} = \frac{1}{n|q|} \cdot \frac{1}{\mathrm{d}b}\, i_c B \cdot 10^{-8} =$$

$$= R_H \frac{1}{\mathrm{d}b}\, i_c B \cdot 10^{-8},$$

în care

$$R_H = \frac{1}{n|q|}\ \mathrm{cm^3/C}.$$

reprezintă constanta Hall.

Apariția intensității cîmpului electric solenoidal $\mathcal{E}_y$ poartă denumirea de efect Hall.

Deoarece vitezele electronilor nu sînt aceleași în spațiul ocupat de Ge-n, s-a arătat în paragraful 10.8 din Adaos, că conductibilitatea λ se reprezintă în forma

$$\lambda = nq \frac{|k_-|}{\sqrt{\frac{3\pi}{8}}}$$

stabilită cu ajutorul curbei Maxwell care exprimă legătura dintre media pătratelor vitezelor electronilor $(v^2)_{mijl}$ și valoarea medie a vitezei la pătrat $\bar{v}^2$ în forma

$$\frac{(v^2)_{mijl}}{\bar{v}^2} = \frac{3\pi}{8}.$$

Ca urmare se introduce constanta Hall în forma:

$$R_H = \frac{1}{n|q|}\sqrt{\frac{3\pi}{8}}.$$

Relația ne mai arată că atunci cînd factorul de mobilitate se exprimă în forma

$$|k_-| = \frac{\lambda\sqrt{\frac{3\pi}{8}}}{n|q|} = \lambda R_H$$

și atît λ cît și R_H sînt cunoscute, se poate determina factorul de mobilitate.

În figura 15.112 se prezintă o plăcuță de Ge-n cu electronii majoritari formați din electronii cedați de către ionii monovalenți pozitivi interstițiali, spre exemplu de fosfor, denumiți ioni donatori. Expresiile

Ge_{32}^{70}	P_{15}^{31}	As_{33}^{74}	Sb_{51}^{121}
$2+8+18+4$	$2+8+5$	$2+8+18+5$	$2+8+18+18+5$

reprezintă atomii tetravalenți de germaniu și pentavalenți de P, As, Sb.

Se calculează cu $n_D = 10^{16}$ electronii majoritari/cm³.

În afară de electronii majoritari, mai există și electroni minoritari, denumiți și electroni intrinseci.

Electronii minoritari părăsesc atomul de germaniu și trec în exterior pentru un interval de timp foarte scurt de cca. 100—500μs. În acest interval de timp, atomul de unde a ieșit electronul minoritar, devine un ion monovalent pozitiv, denumit gol.

După acest interval de timp, electronul minoritar datorită micșorării impulsului e captat de un alt gol, care se transformă în atom în stare neutră.

În felul acesta, electronii minoritari se mișcă întotdeauna spre deosebire de electronii majoritari, prin salturi și în zigzaguri.

Pentru electronii minoritari se calculează cu $n = 10^{13}$ electroni pe cm³.

La capetele plăcuței de Ge-n sînt lipite două plăcuțe subțiri de Cu, cu scopul de a se realiza o repartiție a densității de curent j_c a curentului de comandă i_c cît mai uniformă la suprafața de tranziție dintre Ge-n și plăcuța de Cu.

Din fig. 15.112 se vede că liniile cîmpului electric cu intensitatea $\mathcal{E}_c$ nu sînt linii drepte din cauza apariției cîmpurilor electrice $\mathcal{E}_y$ și $\mathcal{E}'_y$.

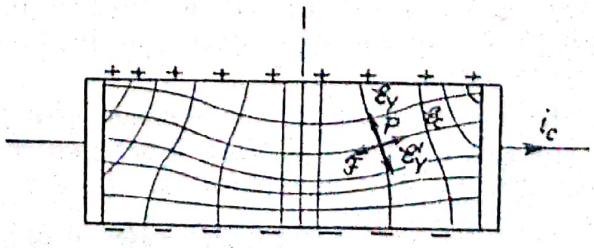


Fig. 15.112. Reprezentarea cîmpurilor $\mathcal{E}_c$, $\mathcal{E}_y$ și $\mathcal{E}'_y$ în plăcuță de Ge-n.

Relația

$$j = \rho_c v_c = \lambda \mathcal{E}_c$$

reprezintă legea lui Ohm în forma diferențială.

Prin $q\mathcal{E}_c = \mathcal{F}$ care e opusă lui $\mathcal{E}_c$ se exprimă forța activă care acționează asupra electronului majoritar și e compensată de o forță echivalentă a frecării (corespunzătoare ciocnirilor).

Ortogonal cu liniile cîmpului electric cu intensitatea $\mathcal{E}_c$ se găsesc liniile cîmpului electric cu intensitatea $\mathcal{E}_y$ exprimată în forma $\mathcal{E}_y = [v_c \mathcal{B}]$ a cărei existență depinde de viteza v a electronului și de inducția magnetică $\mathcal{B}$.

Datorită prezenței lui $\mathcal{E}_y$ acționează asupra electronului majoritar forța ortogonală pe v de forma

$$\mathcal{F}_y = \frac{q}{c}[v_c \mathcal{B}]$$

care e dirijat în sens opus cu $\mathcal{E}_y$.

Prin v_c se înțelege viteza electronului majoritar care în regim staționar își menține o valoare numerică constantă.

Prin deplasarea liniilor de cîmp ale electronilor majoritari ca în figură apare acțiunea ionilor interstițiali pozitivi la suprafața laterală de sus a plăcuței de Ge-n.

Prin îngrămădirea liniilor de cîmp ale electronilor majoritari către suprafața laterală de jos a plăcuței de Ge-n, o astfel de suprafață acționează negativ.

În figura 15.111 s-au evidențiat suprafețele laterale de sus și de jos cu semnele de plus și minus prin apariția acțiunii sarcinilor electrice pozitive și negative.

Apare, așadar, în plăcuță un cîmp electric nou cu intensitatea $\mathcal{E}'_y$ opus cu $\mathcal{E}_y$ produs de sarcinile electrice pozitive de sus și negative de jos.

Ca urmare, electronul majoritar se găsește în regimul staționar sub acțiunea unei forțe rezultante de forma

$$\mathcal{F}_r = q\{\mathcal{E}_c + \mathcal{E}_y + \mathcal{E}'_y\}$$

care acoperă pe lîngă frecare și necesitatea apariției unei forțe centripete $q\{\mathcal{E}_y + \mathcal{E}'_y\}$ acolo unde linia cîmpului posedă o curbură.

Prin $\operatorname{tg}\theta = \frac{E_y}{E_c}$ se evidențiază o caracteristică a semiconductorului datorită apariției celor două cîmpuri $\mathcal{E}_c$ și $\mathcal{E}_y$.

Se relevă că în mijlocul plăcuței liniile cîmpurilor electrice sînt paralele și porțiunea aceasta ar crește pe măsură ce lungimea plăcuței ar deveni infinit de mare.

Electronii minoritari se deosebesc de electronii majoritari, pentru că ei apar într-un interval de timp foarte scurt în exteriorul atomului de Ge-n și sub acțiunea forței $\mathcal{F}^*_r$ de forma

$$\mathcal{F}^*_r = q\{\mathcal{E}_c + \mathcal{E}^*_y + \mathcal{E}'_y\}$$

Scanned with OKEN Scanner

în care

$$\mathcal{E}_y^* = [u^* \mathcal{B}]$$

u^* exprimînd viteza electronului minoritar, efectuează o mișcare mai puțin în zigzag, prin salturi, în jos. Ca urmare mai pot să apară la suprafața laterală de sus a plăcuței de Ge-n goluri minoritare, mărind acțiunea sarcinei pozitive și la suprafața laterală de jos un surplus de electroni minoritari, mărind sarcina electrică negativă.

Mărirea acestor sarcini are loc pînă cînd $\mathcal{F}_r^*$ devine nulă. Din acest moment mișcarea electronilor minoritari se efectuează din nou în zigzaguri, pînă cînd se conectează circuitul Hall a generatorului.

În momentul cînd se conectează circuitul Hall, electronii din circuitul metalic se deplasează de la V_{h4} către V_{h3} în sensul în care potențialul crește. În *3* trec în plăcuță micșorînd sarcina pozitivă formată de golurile minoritare, deoarece ionii pozitivi unde au intrat electronii, se transformă în atomi neutri. La suprafața laterală de jos electronii minoritari, intrînd în circuitul metalic, fac ca acțiunea sarcinii electrice negative să se micșoreze. În felul acesta $\mathcal{E}_y'$ se micșorează într-atît încît, din nou electronii minoritari din plăcuță încep să fie acționați de forța $\mathcal{F}_r^*$, mișcarea în zigzaguri se micșorează, ea devine mai mult dirijată în jos, alimentînd mereu suprafața laterală de jos cu electroni care intră în circuitul metalic și la suprafața laterală de sus sînt preluați de golurile minoritare.

În felul acesta se evidențiază fenomenologic cum funcționează generatorul Hall. Numai datorită existenței electronilor minoritari apar în plăcuță două circuite electrice separate. Unul pentru electronii majoritari și celălalt pentru electronii minoritari.

În figura 15.113 se prezintă generatorul Hall încărcat. Ținîndu-se seama că între electrozii *1* și *2* apare o descreștere a potențialului V_c, rezultă că lipiturile electrozilor Hall între *3* și *4* trebuie să fie făcute perfect simetrice față de electrodul *1* pentru ca diferența de potențial $V_{c3} - V_{c4}$ la electrozii Hall să fie nulă.

În figură s-a luat cazul cînd electrodul *3* e mai aproape de *1* ca electrodul *4*. Datorită acestui fapt se obține $V_{c3} - V_{c4} > 0$.

O astfel de diferență de potențial se determină experimental cînd $\mathcal{B} = 0$; ea se numește tensiunea de zero.

Formîndu-se integrala de linie $\int_4^3 (\mathrm{d}l\, \mathcal{E})$ pentru circuitul Hall interior se obține

$$\int_4^3 (\mathrm{d}l\, \mathcal{E}) = U_{h0} + V_{h4} - V_{h3} = i_h r_{ih} \qquad (1)$$

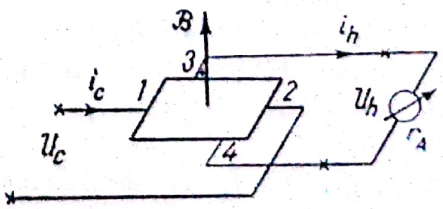


Fig. 15.113 Generatorul Hall încărcat.

în care r_{ih} reprezintă rezistența electrică din interiorul plăcuței pentru circuitul Hall, spre deosebire de rezistența electrică r_{ic} a curentului de comandă din circuitul de comandă.

Din

$$E_y = R_H \frac{1}{db} i_c B \cdot 10^{-8}$$

rezultă

$$\int_4^3 (dl\, \mathcal{E}_y) = E_y \cdot b = U_{h0} = \left(R_H \cdot \frac{1}{d}\right) i_c B \cdot 10^{-8} =$$

$$= k_0^{cm^2/C} \cdot i_c \cdot B \cdot 10^{-8}$$

Constanta Hall R_h la diferite semiconductoare.

$R_H^{cm^3/C} = 10^{-4}$ la metale.

$R_H^{cm^3/C} = 1\,000$	Ge-n
600	InSb
100	InAs

O plăcuță posedă spre exemplu dimensiunile

$d = 0{,}1$ mm; $l = 3$ mm; $b = 1{,}5$ mm (v. fig. 15.114)

Datorită felului cum se fac lipiturile, constanta Hall obține un factor de corecție G. Un astfel de factor de corecție se apropie de unitate cînd

$$\frac{l}{b} \cong 2 \qquad \frac{S}{l} = 0{,}1 \div 0{,}15.$$

Se introduce așadar

$$\frac{R_H}{d} \cdot G = k_0^{cm^2/As}$$

astfel că

$$U_{h0}^V = k_0 i_c B \cdot 10^{-8}.$$

Din cele prezentate mai sus, se vede că k_0 depinde de material și dimensiunile plăcii, de dimensiunile contactelor Hall, de inducția magnetică și de temperatură.

Denumim constanta k_0 constanta generatorului Hall.

Din figura 15.115 se vede cum variază rezistențele interioare r_{ic}, r_{ih} cu inducția magnetică, rezistența specifică cu temperatura și constanta Hall cu temperatura.

În relația (1) apare intensitatea rezultantă $\mathcal{E}$: $\mathcal{E} = \mathcal{E}_y + \mathcal{E}'_y$.

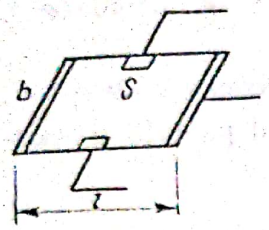


Fig. 15.114. Dimensiunile plăcuței.

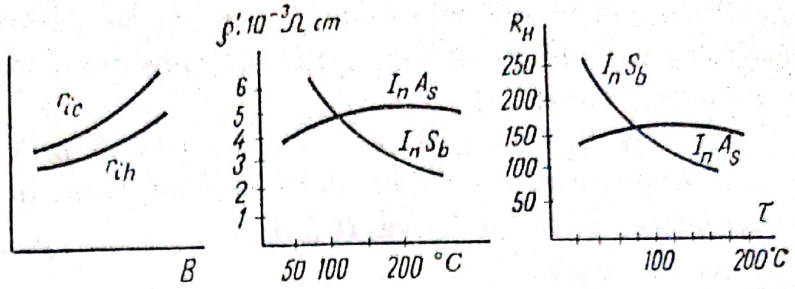


Fig. 15.115. Rezistențele, rezistența specifică și constanța Hall.

Din (1) se deduce

$$u_{h0} - i_i r_{ih} = V_{h3} - V_{h4} = u_h. \tag{2}$$

Pentru circuitul Hall din exterior, integrala $\int(\mathrm{d}l\ \mathcal{E})$ ia forma

$$\int_3^4 (\mathrm{d}l\ \mathcal{E}) = (V_{h3} - V_{h4}) + (V_{c3} - V_{c4}) = i_h r_A. \tag{3}$$

Înlocuind în (3) pe $V_{h3} - V_{h4}$ cu expresia din (2) se obține

$$u_{h0} + (V_{c3} - V_{c4}) = i_h(r_{ih} + r_A). \tag{4}$$

Relația (4) ne arată cum tensiunea de zero $(V_{c3} - V_{c4})$ poate influența curentul Hall, i_h.

În exemplul luat $(V_{c3} - V_{c4})$ fiind pozitivă, mărește curentul Hall i_h.

Deoarece tensiunea de zero $(V_{c3} - V_{c4})$ există și în cazul cînd $\mathcal{B}$ este nul, aceasta ne arată că curentul Hall i_h produs de $(V_{c3} - V_{c4})$ e considerat ca un curent în derivație al curentului de comandă i_c pentru că depinde de o diferență de potențial din circuitul de comandă.

Cînd $V_{c3} > V_{c4}$ ca în figura 15.116 se poate realiza $V_{c3} - V_{c4} = 0$, prin conectarea rezistenței reglabile r' între (1) și (4). Se formează două circuite în paralel cu curenții electrici i_c și i'.

Avem

$$i_c r_{14} = i' r'$$

$$i = i_c + i' = i_c + i_c \frac{r_{14}}{r'} = i_c \frac{r' + r_{14}}{r'},$$

astfel că

$$i_c = i \frac{r'}{r' + r_{14}}.$$

Ca urmare, căderea Ohmică $i_c r_{14}$ devine

$$i_c r_{14} = i \frac{r' \cdot r_{14}}{r' + r_{14}} = i r_e. \tag{5}$$

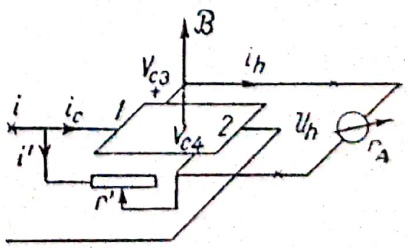


Fig. 15.116. Obținerea $V_{c3} - V_{c4} = 0$

Prin conectarea rezistenței r' cu r_{14} în paralel diferența de potențial $i_c r_{14}$ devine mai mică ca înainte de conectarea rezistenței r_e, deoarece r_e e mai mic ca r_{14}.

Se cere însă ca i să se mențină constant prin conectarea rezistenței r'.

Aceasta se poate realiza dacă se conectează în serie cu plăcuța o rezistență mare R în așa fel ca $R \gg r_{ic}$.

Se formează

$$u_c = i(R + r_{ic})$$

oricum ar varia r_{ic}, fiind mic față de R înseamnă că pentru u_c constant și i se menține constant.

Ca urmare, potențialul V_{c4} din figura 15.116 va crește, putînd deveni egal cu V_{c3}.

În felul acesta se realizează ca tensiunea de zero să devină nulă.

Chiar dacă tensiunea de zero nu e compensată, tensiunea Hall U_{h0} se poate măsura.

Conectîndu-se generatorul Hall la un galvanometru de precizie (v. §3.8 fenomenul magnetostatic) se obține

$$u_{h0} + V_{c3} - V_{c4} = i_{h1}(r_{ih} + r_g) = U_1,$$

în care $r_{ih} + r_g$ e cunoscut, iar i_{h1} e măsurat; deci se determină experimental

$$u_{h0} + V_{c3} - V_{c4} = U_1.$$

Se schimbă sensul lui B pe plăcuță. Se obține

$$u_{h0} - (V_{c3} - V_{c4}) = i_{h2}(r_{ih} + r_g) = U_2,$$

în care U_2 e cunoscut.

Ca urmare, din

$$\frac{1}{2}(U_1 + U_2) = u_{h0}$$

$$\frac{1}{2}(U_1 - U_2) = V_{c3} - V_{c4}$$

se obține atît u_{h0} cît și $V_{c3} - V_{c4}$.

Scanned with OKEN Scanner

Exemplu de generator Hall.

$$u_{h0}^{V} + (V_{c3} - V_{c4})^{V} = i_h^{A}(r_{ih}^{\Omega} + r_A^{\Omega})$$

$$V_{c3} - V_{c4} = 0{,}5 \cdot 10^{-3}\ \text{V}.$$

$$i_h = 0{,}184 \cdot 10^{-3}\ \text{A}.$$

$$r_{ih} = r_A = 1{,}925^{\Omega} + 176{,}6^{\Omega}$$

$$r_{ih} = 1{,}925^{\Omega} \quad \text{pentru} \quad B = 3\,100\ \text{G}.$$

$$r_{ic} = 0{,}83^{\Omega}$$

$$u_{h0} = 32{,}4 \cdot 10^{-3}\ \text{V}$$

$$i_c = 0{,}1\ \text{A} \quad \text{pentru} \quad B = 3\,100\ \text{G}$$

deci: $k_0 = 10\,450\ \text{cm}^2/\text{A.s}$.

În figura 15.117 se reprezintă componentele tensiunii în circuitul de comandă și în circuitul Hall pentru cazul cînd $V_{c3} - V_{c4} = 0$.

Se obțin

$$u_c = i_c r_{ic} + k_0 i_h \cdot B \cdot 10^{-8}$$

$$u_h = k_0 i_c B \cdot 10^{-8} - i_h r_{ih}.$$

Generatorul Hall poate funcționa și ca redresor.

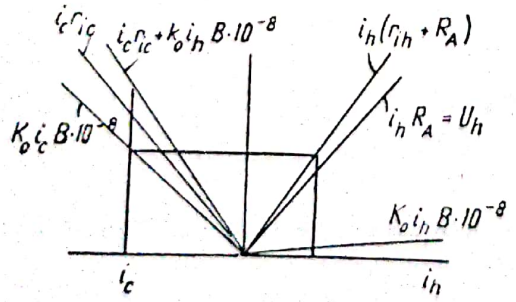
Admitem că în figura 15.118 sudurile electrozilor *3* și *4* sînt simetrice față de *1*.

Prin introducerea rezistențelor r_1 și r_2 se obține V_{c3}^{*} mai mare ca V_{c4}^{*}.

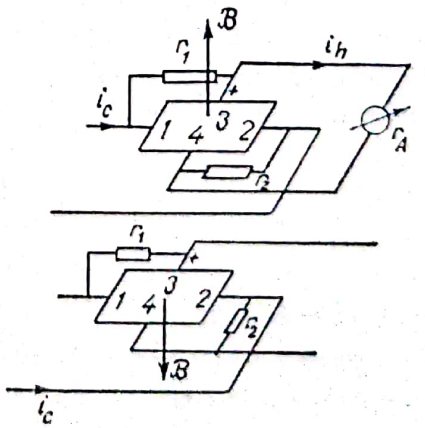
Ca urmare în relația

$$u_{h0} + V_{c3}^{*} - V_{c4}^{*} = i_h(r_{ih} + r_A) \qquad (6)$$

$V_{c3}^{*} - V_{c4}^{*}$ apare pozitiv.



15.117. Diagrama tensiunilor în circuitele de comandă și Hall.



15.118. Generator Hall ca redresor.

Admitem că curentul de comandă i_c e un curent electric sinusoidal de forma $i_c = i_{cm} \sin \omega t$.

După o jumătate de perioadă, curentul de comandă i_c schimbîndu-și sensul în circuitul de comandă, și în același timp schimbînd și sensul inducției $\mathfrak{B}$ care e considerată ca constantă în valoarea ei numerică, rezultă că polaritatea tensiunii Hall rămîne la fel ca în primul caz. Dat fiindcă de data aceasta avem $V_{c3}^{\bullet} - V_{c4}^{\bullet} < 0$ rezultă că în (6) $V_{c3}^{\bullet} - V_{c4}^{\bullet}$ devine negativ și poate fi făcut destul de mare ca i_h să devină zero.

u_{h0} și $V_{c3}^{\bullet} - V_{c4}^{\bullet}$ reprezintă două funcții sinusoidale care într-o jumătate de perioadă sînt în fază, în cealaltă jumătate de perioadă sînt în opoziție.

La utilizarea generatorului Hall se ține seama de relația fundamentală

$$u_{h0} + V_{c3} - V_{c4} = i_h(r_{th} + r_A)$$

în care tensiunea de borne $i_h r_A$ se exprimă în forma

$$u_h + (V_{c3} - V_{c4}) = i_h \cdot r_A = \frac{u_{h0} + (V_{c3} - V_{c4})}{r_{th} + r_A} r_A = \frac{u_{h0} + (V_{c3} - V_{c4})}{1 + r_{th}/r_A}. \tag{7}$$

Dacă relația (7) e folosită spre exemplu la măsurarea inducției magnetice, care apare în expresia lui u_{h0}, atunci e necesar ca tensiunea de zero să fie compensată.

Fie

$$\frac{u_{h0}}{1 + \frac{r_{th}}{r_A}} = \frac{k_0 i_c B \cdot 10^{-8}}{1 + \frac{r_{th}}{r_A}} = k i_c B \cdot 10^{-8} = i_h r_A. \tag{8}$$

Pentru obținerea curentului Hall i_h proporțional cu $\mathfrak{B}$ pentru i_c constant, trebuie ca factorul k să apară ca o constantă.

Ținîndu-se seama că k_0 și r_{th} cresc cu $\mathfrak{B}$, se poate găsi o rezistență r_{Aa} (ajustată) în așa fel încît

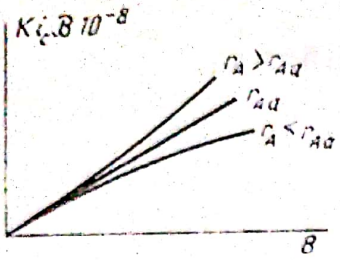
$$k = \frac{k_0}{1 + \frac{r_{th}}{r_{Aa}}} \tag{9}$$

să apară constantă.

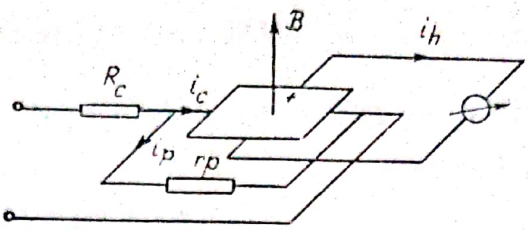
În figura 15.119 se reprezintă tensiunea de borne $k i_c B \cdot 10^{-8}$ proporțională cu $\mathfrak{B}$ pentru $r_A = r_{Aa}$.

Pentru $r_A < r_{Aa}$, numitorul va crește mai repede cu $\mathfrak{B}$ decît k_0, astfel că tensiunea de borne descrește cu $\mathfrak{B}$.

Scanned with OKEN Scanner



15.119. Tensiunea de borne $ki_cB \cdot 10^{-8}$.



15.120. Se menține $k_0 i_c$ constant.

Pentru $r_A > r_{Aa}$, rezultă că numărătorul k_0 va crește mai repede cu B decît numitorul. În cazul acesta tensiunea de borne va crește cu B.

Mai trebuie să se țină seama și de variația mărimilor k_0, r_{ih} și r_{ic} care descresc cînd temperatura crește.

În expresia

$$u_{h0} = k_0 i_c B \cdot 10^{-8}$$

considerîndu-se constanta generatorului Hall k_0 descrescînd cu temperatura, se poate realiza ca $k_0 i_c$ să se mențină constant, printr-o mică creștere a curentului i_c. În figura 15.120 se introduce rezistența r_p în paralel cu circuitul de comandă.

Se obține

$$u_c = i\left(R_c + \frac{r_p \cdot r_{ic}}{r_p + r_{ic}}\right).$$

Se ia R_c așa de, mare încît rezistența echivalentă $\frac{r_p \cdot r_{ic}}{r_p + r_{ic}}$ să devină neglijabilă față de R_c; ca urmare, pentru $u_c = \text{const.}$ și R_c constant se consideră i la mici variații ale lui $\frac{r_p \cdot r_{ic}}{r_p + r_{ic}}$ ca constant.

Din

$$i_c r_{ic} = i_p \cdot r_p$$

$$i = i_c + i_p = i_c \frac{r_p + r_{ic}}{r_p}$$

sau

$$i_c = i \frac{r_p}{r_p + r_{ic}}. \qquad (10)$$

Din (10) se vede că pentru i constant, cînd r_{ic} descrește, i_c crește puțin.

16. MĂSURĂRI CU GENERATORUL HALL

Măsurarea produsului a doi curenți

În relația

$$\frac{u_{h0} + V_{c3} - V_{c4}}{1 + \frac{r_{th}}{r_A}} = i_h r_A \tag{1}$$

se compensează tensiunea de zero $(V_{c3} - V_{c4})$ și se obține

$$\frac{u_{h0}}{1 + \frac{r_{th}}{r_A}} = k \cdot i_c B \cdot 10^{-8} = i_h r_A,$$

în care

$$k = \frac{k_0}{1 + \frac{r_{th}}{r_A}} = \text{const.}$$

Se introduce

$$B = Ci$$

astfel că

$$k i_c C i \cdot 10^{-8} = C_1 i_c i = i_h r_A. \tag{2}$$

Prin măsurarea curentului Hall i_h se obține produsul curenților $i_c \cdot i$. În figura 16.121 se prezintă schema pentru măsurarea puterii active P. Circuitul e conectat la o tensiune de borne sinusoidală.
Avem

$$u_b = U_b \sqrt{2} \sin \omega t$$

$$i = I \sqrt{2} \sin(\omega t - \varphi). \tag{3}$$

Se obține

$$i_c = \frac{U_b \sqrt{2}}{r_V + r_{tc}} \sin \omega t$$

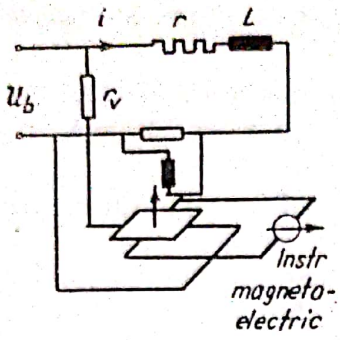
$$B \cdot 10^{-8} = Ci = CI \sqrt{2} \sin(\omega t - \varphi) \tag{4}$$

astfel că

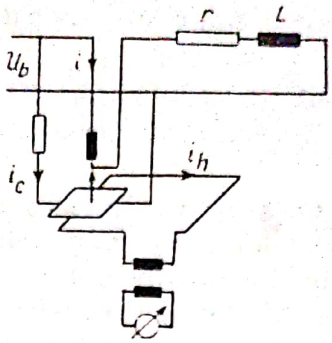
$$i_h \cdot r_A = k \frac{U_b \sqrt{2}}{r_V + r_{tc}} CI \sqrt{2} \sin \omega t \sin(\omega t - \varphi) =$$

$$= C_1 U_b I [\cos \varphi - \cos (2 \omega t - \varphi)]. \tag{5}$$

Scanned with OKEN Scanner



16.121. Măsurarea puterii active.



16.122. Măsurarea puterii aparente.

Prin conectarea tensiunii $i_h r_A$ la un instrument magnetoelectric (cu magnet permanent) se măsoară

$$i_h \cdot r_A = C_1 U_b I \cos \varphi = C_1 P. \tag{6}$$

Prin etalonarea instrumentului se determină constanta C_1.

În figura 16.122 se prezintă schema pentru măsurarea puterii aparente $P_a = U_b \cdot I$. Tensiunea Hall la bornele unui transformator ne dă din relația (5)

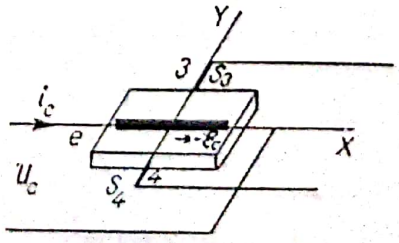
$$u_h = C_1 U_b I \{\cos \varphi - \cos (2\omega t - \varphi)\}.$$

Ca urmare, în secundarul transformatorului apare $U_h' = C' U_b I$ la un instrument magnetoelectric cu redresor. În felul acesta se măsoară puterea aparentă. Metoda a fost publicată în revista Electrotehnica [1].

În paragraful 3.8 din fenomenul magnetostatic s-a luat ca exemplu măsurarea de grosimi de cîțiva microni și măsurarea de inducții magnetice de zecimi de Gauss cu ajutorul generatorului Hall.

17. GENERATORUL HALL FORMAT DIN Ge-p

În figura 17.123 se consideră plăcuța formată din Ge-p. Se consideră mai întîi cazul cînd $\mathfrak{B} = 0$. În plăcuța de Ge-p există ioni negativi interstițiali și goluri majoritare, ale căror sarcini se compensează în exterior, pre-



17.123. Generatorul Hall din Ge-p.

[1] D. Fränkel, I. De Sabata. Măsurarea puterii aparente în sisteme mono- și trifazate cu generatorul Hall. Revista Electrotehnica nr. 4, 1962.

cum și electroni și goluri minoritare intrinseci a căror sarcini de asemenea se compensează în exterior.

Prin introducerea tensiunii de borne u_c apare în plăcuță un cîmp electric $\mathcal{E}_c$, care face ca electronii minoritari din Ge-p să treacă în firul metalic la e.

Se creează așadar în e în Ge-p un surplus de goluri minoritare care datorită mișcării electronilor minoritari prin salturi, în sens opus lui $\mathcal{E}_c$ de la c către e, formarea surplusului de goluri minoritare înaintează pînă la c unde vor fi acoperiți de electronii din circuitul metalic.

În e apare mereu o emisie de surplus de goluri minoritare, iar în c un colector de surplus de goluri minoritare.

Ca urmare, electronii liberi din circuitul metalic, se transmit din c în e prin salturi dirijați de cîmpul cu intensitatea $\mathcal{E}_c$.

În figură se vede cum electronii se deplasează prin salturi de la c la e.

Prin apariția inducției magnetice $\mathcal{B}$ perpendiculară pe plăcuță, apar forțe de forma $q\mathcal{E}_y$ în care $\mathcal{E}_y^{V/cm} = [v\mathcal{B}] \cdot 10^{-8}$ care acționează la suprafața laterală S_3 asupra electronilor minoritari ce se găsesc în mișcare, cînd ies din atomii de Ge-p.

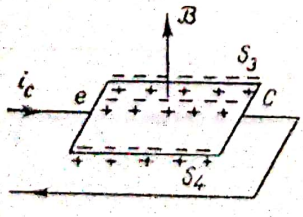
Datorită forței de forma celei de mai sus, electronii minoritari în mișcare se dirijează către golurile majoritare pe care le ocupă. Aceste goluri transformîndu-se în atomi neutri, încep să acționeze către exterior ionii interstițiali negativi, pe de o parte, apare și un surplus de goluri minoritare datorită faptului că electronii corespunzători au ocupat golurile majoritare.

Grupele de sarcini electrice pozitive și negative ce se formează pe toată plăcuța de la suprafața S_3 la suprafața S_4 se prezintă ca în figura 17.124.

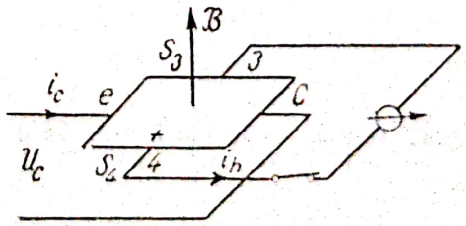
Se constată că în exterior acționează numai sarcinile electrice negative ale ionilor interstițiali negativi în S_3 și sarcinile electrice pozitive ale surplusului de goluri minoritare din S_4.

În felul acesta se formează la generatorul Hall format din Ge-p polaritatea sarcinilor la S_3 și S_4 opusă ca la Ge-n.

În figura 17.125 se prezintă generatorul Hall format din Ge-p conectat. În momentul conectării circuitului Hall se crează în circuitul metalic la



17.124. Repartizarea sarcinilor pozitive și negative în plăcuță de Ge-p, cînd apare $\mathcal{B}$.



17.125. Curentul Hall i_h la generatorul Hall din Ge-p.

sudură între cupru și plăcuță la S_3 un cîmp electric dirijat de la cupru către Ge-p.

Prin mișcarea electronilor în circuitul metalic în sensul opus lui i_h, de la S_3 către S_4 se crează la capătul firului de cupru, o sarcină electrică pozitivă care împreună cu sarcina negativă a ionilor interstițiali din Ge-p, formează un cîmp electric de o intensitate mare.

O astfel de intensitate înmulțită cu q formează forța care smulge electronul din atomul de Ge-p, trecîndu-l în firul metalic.

În felul acesta apare din nou un gol majoritar. La S_4 intensitatea de cîmp la locul sudării e dirijată către metal, ceea ce face ca electronii din circuitul metalic să fie smulși ocupînd surplusul de goluri minoritare din plăcuță.

Prin trecerea electronilor minoritari, ocupînd goluri majoritare se refac în mod continuu sarcinile electrice negative ale ionilor interstițiali la suprafața S_3 și sarcinile pozitive ale golurilor minoritare la suprafața S_4, ceea ce duce la o stabilitate de funcționare a generatorului Hall din Ge-p.

18. ELIMINAREA TENSIUNILOR PARAZITARE LA FOLOSIREA GENERATORULUI HALL PENTRU CURENT CONTINUU

Tensiunile parazitare sînt următoarele:

1) Tensiunea Hall care corespunde inducției magnetice remanente la înfășurări cu miez de fier și care corespunde cîmpului magnetic terestru.

2) Tensiunile termoelectrice care corespund atît curentului de comandă i_c cît și curentului Hall i_h. Cît timp starea de încălzire e staționară, deci temperatura constantă, astfel de tensiuni se mențin constante.

3) Tensiunea de zero este cea mai mare și care depinde de curentul de comandă i_c, de rezistența electrică în circuitul de comandă r_{ic}. Pe de altă parte rezistența r_{ic} depinde de inducția magnetică $\mathfrak{B}$ și de temperatură.

Din cele de mai sus se constată că suma tensiunilor parazitare se mențin constantă, atîta timp cît inducția magnetică $\mathfrak{B}$ și curenții electrici i_c și i_h sînt constanți, admițînd că temperatura ambiantă rămîne neschimbată.

Ca urmare, numai în cazul cînd au loc variații ale inducției magnetice $\mathfrak{B}$ și ale curentului Hall i_h (admițînd că generatorul Hall lucrează la $i_c = \text{const.}$) se poate admite că practic suma tensiunilor parazitare se menține constantă.

De aici rezultă, că numai în cazul cînd se măsoară tensiuni Hall foarte mici sau variații foarte mici ale curentului Hall, datorită variației foarte mici ale inducției magnetice, tensiunile pot fi considerate constante.

Datorită acestui fapt s-a introdus o anumită metodă de măsurare a tensiunii Hall prin care se elimină complet acțiunea tensiunilor parazitare.

Scanned with OKEN Scanner

Metoda care a fost aplicată în paragraful 3.8 din fenomenul magnetostatic folosește un generator Hall denumit de epurare și un galvanometru de precizie pentru curenți foarte mici.

În paralel cu galvanometrul se găsește conectat un element de acumulator în serie cu o rezistență variabilă R.

Se consideră mai întîi cazul cînd tensiunea generatorului Hall dat, este mică. Curentul Hall i_h e produs numai de generatorul Hall de epurare și de toate tensiunile parazitare din circuitul Hall.

Se reglează rezistența R pînă cînd galvanometrul arată zero. Curentul Hall i_h circulă așa dar numai prin elementul de acumulator cu rezistența R.

În momentul cînd apare tensiunea generatorului Hall dat, apare în circuitul galvanometrului un curent electric i_g proporțional cu tensiunea Hall dată.

În cazul cînd curentul de comandă i_c se menține constant și variază numai curentul de excitație i care produce inducția $\mathfrak{B}$, expresia tensiunii Hall ia forma

$$u_{h0} = k_0 i_c B \cdot 10^{-8} = C i_c i.$$

Într-un astfel de caz metoda folosită mai sus pentru eliminarea tensiunilor parazitare nu mai poate fi folosită, deoarece curentul i poate varia de la zero la valori cît mai mari.

Se prezintă o altă metodă care permite să se elimine numai tensiunea de zero care e cea mai mare dintre tensiunile parazitare.

Metoda constă în folosirea a două generatoare Hall conectate în serie la care se adună tensiunile Hall, în schimb se anulează acțiunea tensiunilor de zero.

În figura 18.126 sus, se prezintă tensiunile de zero la două generatoare Hall și legăturile făcute în circuitul Hall pentru ca suma lor să devină nulă.

Se stabilesc curenții de comandă i_{c1} și i_{c2} în așa fel, încît tensiunile de zero să se anuleze.

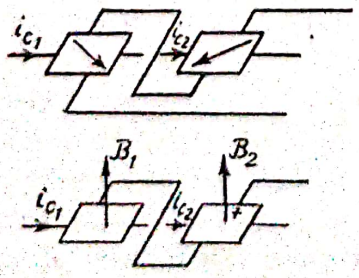
În figura 18.126 jos, se prezintă sensurile ce trebuie să le aibă inducțiile magnetice $\mathfrak{B}_1$, $\mathfrak{B}_2$ pentru ca tensiunile Hall să se adune.

Tensiunea Hall rezultantă ia forma

$$(C_1 i_{c1} + C_2 i_{c2})\ i$$

pentru care curentul i este același.

Cu toate că tensiunile de zero depind de i_c, $\mathfrak{B}$ și r_{ic} ele se anulează la toate valorile lui i, pentru că i respectiv $\mathfrak{B}$ este același pentru ambii generatori.



181.26. Compensarea tensiunilor de zero.

Scanned with OKEN Scanner

19. CIRCUITE TRIFAZATE

19.1. CIRCUITE ÎN CONECTARE STEA

Figura 19.127 reprezintă un generator sincron trifazat. Rotorul formează o roată cu poli alimentată cu curent electric continuu.

În figură este o roată cu patru poli. Numărul de perechi de poli $p = 2$.

În stator se găsesc trei bobine decalate în spațiu cu cîte 120° electrice pentru o pereche de poli. În total pentru $p = 2$ sînt două grupe de cîte trei faze. În figura 19.127 sus dreapta, se prezintă o bobină cu ζ spire.

Introducîndu-se inducția magnetică $\mathfrak{B}$ la suprafața interioară a statorului ca o funcție sinusoidală de α_e se vede din figură că pentru $p = 2$, 1/4 din circumferință corespunde la 180° electrice.

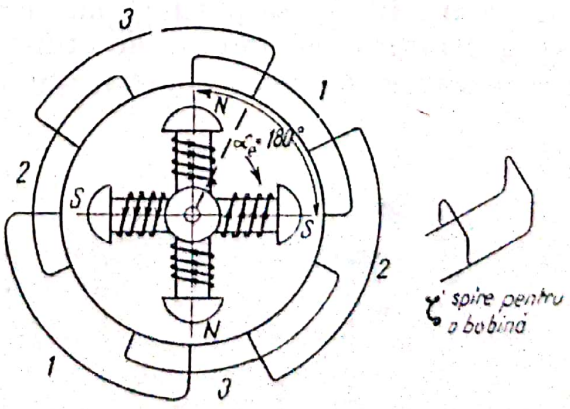
În figura 19.128 ne închipuim circumferința interioară a statorului desfășurată. Apare inducția magnetică ca o funcție sinusoidală în funcție de α pentru o mașină cu patru poli. Lățimea bobinei unei faze corespunde întotdeauna la arcul electric egal cu π.

Din figura 19.127 se constată că bobinele celor trei faze sînt decalate în spațiu cu cîte 120° $\left(\frac{2\pi}{3}\right)$.

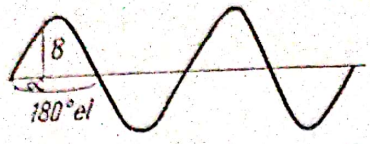
Cînd rotorul se rotește, cîmpul inducției magnetice se rotește de asemenea; apare un cîmp magnetic învîrtitor. În bobinele celor trei faze vor apărea tensiuni electromotoare defazate în timp cu $\frac{2\pi}{3}$, deoarece bobinele sînt decalate în spațiu cu cîte $\frac{2\pi}{3}$.

Notînd prin α_e arcul în spațiu se vede că arcul electric care corespunde inducției magnetice din figura 19.128 va fi $\alpha_e = p\alpha_s$.

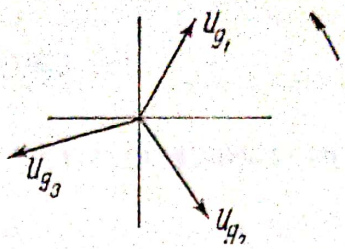
Cînd se cere ca tensiunea electromotoare să aibă frecvența f înseamnă că din $\frac{pn}{60} = f$ se deduce la numărul de perechi de poli dați, turația n ture/min a rotorului.



19.127. Generator sincron trifazat.



19.128. Repartizarea inducției magnetice la suprafața interioară a statorului.



19.129. Diagrama tensiunilor induse în generator.

Tensiunile electromotoare induse în cele trei faze din stator sînt

$$u_{g1} = u_m \sin \omega t$$

$$u_{g2} = u_m \sin \left(\omega t - \frac{2\pi}{3}\right) \tag{1}$$

$$u_{g3} = u_m \sin \left(\omega t - 2\frac{2\pi}{3}\right).$$

Admitem spre exemplu că cele două bobine pe fază sînt conectate în serie.

În figura 19.129 se prezintă diagrama valorilor efective ale tensiunilor generatorului pentru cele trei faze. Pentru $p = 2$ înseamnă că la o jumătate de tură, tensiunea electromotoare a efectuat o perioadă întreagă.

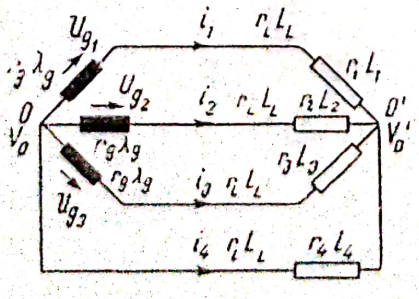
Din $(k\Phi)\, W \cdot 10^{-8} = (k\Phi)_m \cdot W \cdot 10^{-8} \cos \omega t$ se obține pentru faza 1

$$u_{g1} = -\frac{d}{dt}(k\Phi)\, W \cdot 10^{-8} = \omega (k\Phi)_{max} \cdot W \cdot 10^{-8} \sin \omega t$$

astfel că

$$U_{g1} = \frac{2\pi f}{\sqrt{2}} (k\Phi)_{max}\, W \cdot 10^{-8} = 4{,}44 (k\Phi)_m \cdot W \cdot f \cdot 10^{-8}. \tag{2}$$

În figura 19.130 se prezintă un circuit trifazat în conectare stea care unește generatorul cu circuitul de utilizare, avînd și conductorul care unește punctele neutre, denumit conductorul neutru.



19.130. Circuit trifazat în conectare stea cu conductor neutru.

Între punctele O și O' se formează pentru fiecare fază $\int(\mathrm{d}l\,\mathcal{E})$.

Se obțin

$$V_0 - V_0' + u_{g1} - L_1' \frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t} = r_1' i_1$$

$$V_0 - V_0' + u_{g2} - L_2' \frac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t} = r_2' i_2$$

$$V_0 - V_0' + u_{g3} - L_3' \frac{\mathrm{d}i_3}{\mathrm{d}t} = r_3' i_3 \qquad (3)$$

$$V_0 - V_0' - L_4 \frac{\mathrm{d}i_4}{\mathrm{d}t} = r_4 i_4$$

$$i_1 + i_2 + i_3 + i_4 = 0,$$

în care

$$L_1' = \lambda_g + L_L + L_1; \quad r_1' = r_g + r_L + r_1.$$

. . . . . .

Deoarece suma tensiunilor electromotoare e nulă, deoarece tensiunile sînt defazate cu cîte $\frac{2\pi}{3}$ avem

$$u_{g1} + u_{g2} + u_{g3} = 0.$$

În cazul cînd

$$L_1' = L_2' = L_3'; \quad r_1' = r_2' = r_3'$$

rezultă

$$3(V_0 - V_0') - L' \frac{d}{\mathrm{d}t}(i_1 + i_2 + i_3) = r'(i_1 + i_2 + i_3) \qquad (4)$$

$$0 = (L' + 3L_4) \frac{d}{\mathrm{d}t}(i_1 + i_2 + i_3) + (r' + 3r_4)(i_1 + i_2 + i_3). \qquad (5)$$

Relația (5) ne arată că în regim sinusoidal suma valorilor momentane ale celor trei curenți e nulă

$$i_1 + i_2 + i_3 = 0, \text{ deci } i_4 = 0, \; V_0 = V_0'.$$

Cei trei curenți reprezintă funcții sinusoidale defazate între ele cu cîte $\frac{2\pi}{3}$.

Avem

$$i_1 = i_{1m} \sin(\omega t - \varphi_1),$$

$$i_2 = i_{2m} \sin\left(\omega t - \frac{2\pi}{3} - \varphi_2\right)$$

$$i_3 = i_{3m} \sin\left(\omega t - 2\,\frac{2\pi}{3} - \varphi_3\right) \qquad (6)$$

$$i_{1m} = i_{2m} = i_{3m}; \quad \varphi_1 = \varphi_2 = \varphi_3.$$

de unde rezultă, în caz de simetrie, din (4)

$$V_0 - V_0' = 0.$$

Scanned with OKEN Scanner

19.2. INTRODUCEREA MĂRIMILOR ÎN FORMA COMPLEXĂ

Avem

$$\mathcal{U}_{g1} = \varepsilon_1' \mathcal{I}_1 - (\mathcal{V}_0 - \mathcal{V}_0')$$

$$\mathcal{U}_{g2} = \varepsilon_2' \mathcal{I}_2 - (\mathcal{V}_0 - \mathcal{V}_0')$$

$$\mathcal{U}_{g3} = \varepsilon_3' \mathcal{I}_3 - (\mathcal{V}_0 - \mathcal{V}_0')$$

$$\mathcal{V}_0 - \mathcal{V}_0' = z_4 \mathcal{I}_4 \tag{7}$$

$$\mathcal{I}_1 + \mathcal{I}_2 + \mathcal{I}_3 + \mathcal{I}_4 = 0.$$

Se cere să se determine $\mathcal{I}_1$, $\mathcal{I}_2$, $\mathcal{I}_3$, $\mathcal{I}_4$.

Înlocuind pe $\mathcal{V}_0 - \mathcal{V}_0'$ prin $z_4 \mathcal{I}_4$ și pe $\mathcal{I}_4$ prin $-(\mathcal{I}_1 + \mathcal{I}_2 + \mathcal{I}_3)$ se obține

$$\mathcal{U}_{g1} = (\varepsilon_1' + z_4)\, \mathcal{I}_1 + z_4 \mathcal{I}_2 + z_4 \mathcal{I}_3$$

$$\mathcal{U}_{g2} = z_4 \mathcal{I}_1 + (\varepsilon_2' + z_4)\, \mathcal{I}_2 + z_4 \mathcal{I}_3 \tag{8}$$

$$\mathcal{U}_{g3} = z_4 \mathcal{I}_1 + z_4 \mathcal{I}_2 + (\varepsilon_3' + z_4)\, \mathcal{I}_3.$$

Relațiile (8) reprezintă un sistem de trei ecuații cu trei necunoscute. $\mathcal{I}_1$, $\mathcal{I}_2$, $\mathcal{I}_3$ se pot obține mai simplu în felul următor:

Din primele trei relații din (7) se elimină $(\mathcal{I}_1 + \mathcal{I}_2 + \mathcal{I}_3)$ în felul următor

$$\mathcal{U}_{g1} \varepsilon_2' \varepsilon_3' + \mathcal{U}_{g2} \varepsilon_3' \varepsilon_1' + \mathcal{U}_{g3} \varepsilon_1' \varepsilon_2' =$$

$$= -\varepsilon_1' \varepsilon_2' \varepsilon_3' \mathcal{I}_4 \frac{z_4}{z_4} - \mathcal{I}_4 z_4 (\varepsilon_1' \varepsilon_2' + \varepsilon_2' \varepsilon_3' + \varepsilon_3' \varepsilon_1'),$$

de unde se obține $\mathcal{I}_4 z_4$

$$\mathcal{I}_4 z_4 = -\frac{\mathcal{U}_{g1} \varepsilon_2' \varepsilon_3' + \mathcal{U}_{g2} \varepsilon_3' \varepsilon_1' + \mathcal{U}_{g3} \varepsilon_1' \varepsilon_2'}{\varepsilon_1' \varepsilon_2' + \varepsilon_2' \varepsilon_3' + \varepsilon_3' \varepsilon_1' + \dfrac{\varepsilon_1' \varepsilon_2' \varepsilon_3'}{z_4}}. \tag{9}$$

Din (9) rezultă în caz de simetrie $\varepsilon_1' = \varepsilon_2' = \varepsilon_3'$, $\mathcal{I}_4 z_4 = 0$, deoarece avem

$$\mathcal{U}_{g1} + \mathcal{U}_{g2} + \mathcal{U}_{g3} = 0.$$

Scanned with OKEN Scanner

Din (7) se deduce

$$z_1'\mathcal{I}_1 = \mathcal{U}_{g1} + \mathcal{I}_4 z_4 = \mathcal{U}_{g1} = \frac{\mathcal{U}_{g1}z_2'z_3' + \mathcal{U}_{g2}z_3'z_1' + \mathcal{U}_{g3}z_1'z_2'}{z_1'z_2' + z_2'z_3' + z_3'z_1' + \frac{z_1'z_2'z_3'}{z_4}}$$

$$z_1'\mathcal{I}_1 = \frac{(\mathcal{U}_{g1} - \mathcal{U}_{g2})\, z_3'z_1' - (\mathcal{U}_{g3} - \mathcal{U}_{g1})\, z_1'z_3' + \mathcal{U}_{g1}\frac{z_1'z_2'z_3'}{z_4}}{z_1'z_2' + z_2'z_3' + z_3'z_1' + \frac{z_1'z_2'z_3'}{z_4}}$$

astfel că

$$\mathcal{I}_1 = \frac{(\mathcal{U}_{g1} - \mathcal{U}_{g2})\, z_3' - (\mathcal{U}_{g3} - \mathcal{U}_{g1})\, z_2' + \mathcal{U}_{g1}\frac{z_2'z_3'}{z_4}}{z_1'z_2' + z_2'z_3' + z_3'z_1' + \frac{z_1'z_2'z_3'}{z_4}}$$

$$\mathcal{I}_2 = \frac{(\mathcal{U}_{g2} - \mathcal{U}_{g3})\, z_1' - (\mathcal{U}_{g1} - \mathcal{U}_{g2})\, z_3' + \mathcal{U}_{g2}\frac{z_3'z_1'}{z_4}}{z_1'z_2' + z_2'z_3' + z_3'z_1' + \frac{z_1'z_2'z_3'}{z_4}} \qquad (10)$$

$$\mathcal{I}_3 = \frac{(\mathcal{U}_{g3} - \mathcal{U}_{g1})\, z_2' + (\mathcal{U}_{g2} - \mathcal{U}_{g3})\, z_1' + \mathcal{U}_{g3}\frac{z_1'z_2'}{z_4}}{z_1'z_2' + z_2'z_3' + z_3'z_1' + \frac{z_1'z_2'z_3'}{z_4}},$$

de unde se deduce $\mathcal{I}_4$ în forma

$$\mathcal{I}_4 = -(\mathcal{I}_1 + \mathcal{I}_2 + \mathcal{I}_3) = -\frac{\mathcal{U}_{g1}\frac{z_2'z_3'}{z_4} + \mathcal{U}_{g2}\frac{z_3'z_1'}{z_4} + \mathcal{U}_{g3}\frac{z_1'z_2'}{z_4}}{z_1'z_2' + z_2'z_3' + z_3'z_1' + \frac{z_1'z_2'z_3'}{z_4}}. \qquad (11)$$

Considerăm cazul de simetrie

$$z_1' = z_2' = z_3'.$$

Se obține

$$\mathcal{I}_4 = 0; \quad \mathcal{V}_0 - \mathcal{V}_0' = 0 \text{ cu } z_4 \neq 0$$

$$\mathcal{I}_1 = \frac{\mathcal{U}_{g1}\left(3z_1' + \frac{z_1'^2}{z_4}\right)}{z_1'\left(3z_1' + \frac{z_1'^2}{z_4}\right)} = \frac{\mathcal{U}_{g1}}{z_1'}; \quad \mathcal{I}_2 = \frac{\mathcal{U}_{g2}}{z_1'}; \quad \mathcal{I}_3 = \frac{\mathcal{U}_{g3}}{z_1'}. \tag{12}$$

$$\mathcal{I}_1 + \mathcal{I}_2 + \mathcal{I}_3 = 0.$$

Considerăm cazul $z_4 = 0$.

Se obține

$$\mathcal{I}_1 = \frac{\mathcal{U}_{g1}}{z_1'}; \quad \mathcal{I}_2 = \frac{\mathcal{U}_{g2}}{z_2'}; \quad \mathcal{I}_3 = \frac{\mathcal{U}_{g3}}{z_3'} \tag{13}$$

ca formă de reprezentare în caz de simetrie, însă cu $z_1' \neq z_2' \neq z_3'$, ceea ce reprezintă un caz deosebit de important pentru rețelele trifazate.

Prin folosirea sistemului trifazat la iluminat (fig. 19.131) în care impedanțele pe fază pot fi diferite, și totuși tensiunile pe fază să aibă aceeași valoare efectivă, se remarcă că introducîndu-se conductorul neutru practic cu $z_4 \cong 0$ se realizează ca pentru diferite faze să se folosească curenții $\mathcal{I}_1$, $\mathcal{I}_2$, $\mathcal{I}_3$ după (13) în loc după (10).

Considerăm cazul $z_4 = \infty$.

Circuitul trifazat în conectare stea fără conductorul neutru, folosit în general la mașinile electrice trifazate.

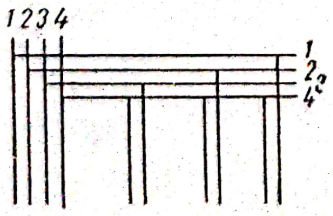
Se obțin

$$\mathcal{I}_1 = \frac{(\mathcal{U}_{g1} - \mathcal{U}_{g2})\, z_3' - (\mathcal{U}_{g3} - \mathcal{U}_{g1})\, z_2'}{z_1'z_2' + z_2'z_3' + z_3'z_1'}$$

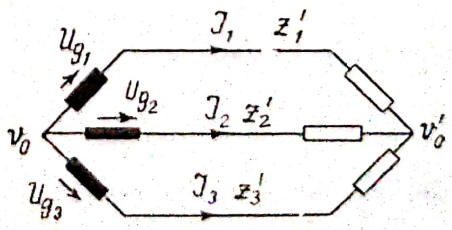
$$\mathcal{I}_2 = \frac{(\mathcal{U}_{g2} - \mathcal{U}_{g3})\, z_1' - (\mathcal{U}_{g1} - \mathcal{U}_{g2})\, z_3'}{z_1'z_2' + z_2'z_3' + z_3'z_1'}$$

$$\mathcal{I}_3 = \frac{(\mathcal{U}_{g3} - \mathcal{U}_{g1})\, z_2' - (\mathcal{U}_{g2} - \mathcal{U}_{g3})\, z_1'}{z_1'z_2' + z_2'z_3' + z_3'z_1'}. \tag{14}$$

Figura 19.132 reprezintă circuitul trifazat fără conductorul neutru ($z_4 = \infty$).



19.131. Rețea trifazată pentru iluminat.



19.132. Circuit trifazat fără conductor neutru în conectare stea.

$\underline{z}'_1 \neq \underline{z}'_2 \neq \underline{z}'_3$ reprezintă impedanțele totale de la generator, linie și circuit de utilizare.

Relațiile (14) reprezintă curenții electrici $\mathcal{I}_1$, $\mathcal{I}_2$, $\mathcal{I}_3$.

În figura 19.133 se prezintă tensiunile pe fază ale generatorului $\mathcal{U}_{g1}$, $\mathcal{U}_{g2}$, $\mathcal{U}_{g3}$.

În expresiile curenților electrici din (14) apar tensiunile înlănțuite în forma

$$\begin{aligned} \mathcal{U}_{g12} &= \mathcal{U}_{g1} - \mathcal{U}_{g2} \\ \mathcal{U}_{g23} &= \mathcal{U}_{g2} - \mathcal{U}_{g3} \\ \mathcal{U}_{g31} &= \mathcal{U}_{g3} - \mathcal{U}_{g1}. \end{aligned} \tag{15}$$

În figura 19.133 tensiunile înlănțuite formează un triunghi. Deoarece tensiunile de fază au aceleași valori efective, însă sînt defazate cu 120°, înseamnă că tensiunile înlănțuite formează un triunghi echilateral.

Din circuitul trifazat din figura 19.132 se obține pentru $\underline{z}'_1 \neq \underline{z}'_2 \neq \underline{z}'_3$:

$$\begin{aligned} \mathcal{U}_{g1} + (\mathcal{V}_0 - \mathcal{V}'_0) &= \mathcal{I}_1 \underline{z}'_1 = \mathcal{U}_1 \\ \mathcal{U}_{g2} + (\mathcal{V}_0 - \mathcal{V}'_0) &= \mathcal{I}_2 \underline{z}'_2 = \mathcal{U}_2 \\ \mathcal{U}_{g3} + (\mathcal{V}_0 - \mathcal{V}'_0) &= \mathcal{I}_3 \underline{z}'_3 = \mathcal{U}_3. \end{aligned} \tag{16}$$

În figura 19.133 sînt trecute tensiunile $\mathcal{U}_1$, $\mathcal{U}_2$, $\mathcal{U}_3$ și $\mathcal{V}_0 - \mathcal{V}'_0 = \overline{O'O}$.

Deoarece curenții electrici se pot obține analitic din (14), se vor determina și tensiunile $\mathcal{U}_1$, $\mathcal{U}_2$, $\mathcal{U}_3$ și după aceea se deduce diferența de potențial $(\mathcal{V}_0 - \mathcal{V}'_0)$.

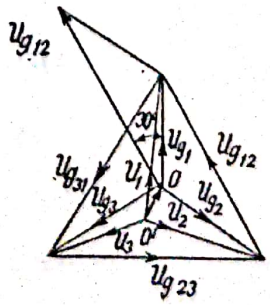
Se va vedea mai tîrziu că se vor folosi metode mai simple pentru determinarea curenților $\mathcal{I}_1$, $\mathcal{I}_2$, $\mathcal{I}_3$.

Se remarcă din diagrama din figura 19.133 că în cazul de simetrie $\underline{z}'_1 = \underline{z}'_2 = \underline{z}'_3$ punctele O și O' se suprapun astfel că $\mathcal{V}_0 - \mathcal{V}'_0 = 0$.

Din relațiile (15) se constată că în cazul cînd tensiunile de fază posedă aceleași valori efective și sînt defazate cu 120°, deci tensiuni simetrice, atunci tensiunea înlănțuită $\mathcal{U}_{g12}$ posedă o valoare efectivă egală cu $U_{g1}\sqrt{3}$ și e defazată față de $\mathcal{U}_{g1}$ cu 30° înainte, așa cum e prezentată în figura 19.133. Tensiunile de borne la circuitul de utilizare pot fi simetrice sau nesimetrice.

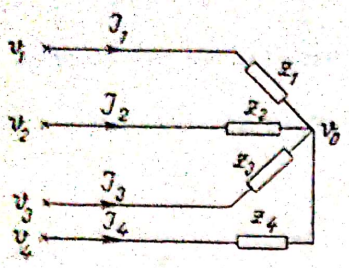
De asemenea cînd impedanțele celor trei faze ale circuitului de utilizare sînt egale, circuitul poate fi considerat ca simetric, în caz contrar e nesimetric.

Se iveşte deseori cazul că tensiunile de borne simetrice se găsesc la un circuit trifazat nesimetric.



19.133. Diagrama tensiunilor.

19.2. CIRCUITE DE UTILIZARE ÎN CONECTARE STEA FĂRĂ CIRCUITUL SURSĂ



19.134. Circuit de utilizare trifazat cu conductor neutru.

Figura 19.134 reprezintă un circuit de utilizare trifazat cu conductorul neutru.

Se obţin relaţiile

$$\begin{aligned} \mathcal{V}_1 - \mathcal{V}_0' &= \mathcal{U}_1 = \mathcal{Z}_1\mathcal{J}_1 \\ \mathcal{V}_2 - \mathcal{V}_0' &= \mathcal{U}_2 = \mathcal{Z}_2\mathcal{J}_2 \\ \mathcal{V}_3 - \mathcal{V}_0' &= \mathcal{U}_3 = \mathcal{Z}_3\mathcal{J}_3 \\ \mathcal{V}_4 - \mathcal{V}_0' &= \mathcal{U}_4 = \mathcal{Z}_4\mathcal{J}_4 \\ \mathcal{J}_1 + \mathcal{J}_2 + \mathcal{J}_3 + \mathcal{J}_4 &= 0. \end{aligned} \tag{1}$$

Se formează

$$\Sigma \frac{\mathcal{V}_\nu}{\mathcal{Z}_\nu} - \mathcal{V}_0' \Sigma \frac{1}{\mathcal{Z}_\nu} = 0 \tag{2}$$

în care $\nu = 1, 2, 3$.

Rezultă potenţialul $\mathcal{V}_0'$ în forma

$$\mathcal{V}_0' = \frac{\Sigma \dfrac{\mathcal{V}_\nu}{\mathcal{Z}_\nu}}{\Sigma \dfrac{1}{\mathcal{Z}_\nu}}. \tag{3}$$

Cînd se cunosc potenţialele $\mathcal{V}_1$, $\mathcal{V}_2$, $\mathcal{V}_3$, $\mathcal{V}_4$ faţă de potenţialul pămîntului şi impedanţele $\mathcal{Z}_1$, $\mathcal{Z}_2$, $\mathcal{Z}_3$, $\mathcal{Z}_4$ se obţin curenţii $\mathcal{J}_1$, $\mathcal{J}_2$, $\mathcal{J}_3$, $\mathcal{J}_4$.

Avem

$$\mathcal{J}_1 = \frac{1}{\mathcal{Z}_\nu}\left(\mathcal{V}_1 - \frac{\Sigma \dfrac{\mathcal{V}_\nu}{\mathcal{Z}_\nu}}{\Sigma \dfrac{1}{\mathcal{Z}_\nu}}\right) = \frac{1}{\mathcal{Z}_1} \frac{(\mathcal{V}_1 - \mathcal{V}_2)\dfrac{1}{\mathcal{Z}_2} - (\mathcal{V}_3 - \mathcal{V}_1)\dfrac{1}{\mathcal{Z}_3} + (\mathcal{V}_1 - \mathcal{V}_4)\dfrac{1}{\mathcal{Z}_4}}{\dfrac{\mathcal{Z}_1\mathcal{Z}_2\mathcal{Z}_3 + \mathcal{Z}_2\mathcal{Z}_3\mathcal{Z}_4 + \mathcal{Z}_3\mathcal{Z}_4\mathcal{Z}_1 + \mathcal{Z}_4\mathcal{Z}_1\mathcal{Z}_2}{\mathcal{Z}_1\mathcal{Z}_2\mathcal{Z}_3\mathcal{Z}_4}} =$$

$$= \frac{(\mathcal{V}_1 - \mathcal{V}_2)\mathcal{Z}_3\mathcal{Z}_4 - (\mathcal{V}_3 - \mathcal{V}_1)\mathcal{Z}_2\mathcal{Z}_4 + (\mathcal{V}_1 - \mathcal{V}_4)\mathcal{Z}_2\mathcal{Z}_3}{\mathcal{Z}_1\mathcal{Z}_2\mathcal{Z}_3 + \mathcal{Z}_2\mathcal{Z}_3\mathcal{Z}_4 + \mathcal{Z}_3\mathcal{Z}_4\mathcal{Z}_1 + \mathcal{Z}_4\mathcal{Z}_1\mathcal{Z}_2}$$

$$\mathcal{J}_1 = \frac{\mathcal{U}_{12}\mathcal{Z}_3 - \mathcal{U}_{31}\mathcal{Z}_2 + (\mathcal{V}_1 - \mathcal{V}_4)\dfrac{\mathcal{Z}_2\mathcal{Z}_3}{\mathcal{Z}_4}}{\mathcal{Z}_1\mathcal{Z}_2 + \mathcal{Z}_2\mathcal{Z}_3 + \mathcal{Z}_3\mathcal{Z}_1 + \dfrac{\mathcal{Z}_1\mathcal{Z}_2\mathcal{Z}_3}{\mathcal{Z}_4}} \tag{4}$$

$$\mathcal{J}_2 = \frac{\mathcal{U}_{23}\mathcal{Z}_1 - \mathcal{U}_{12}\mathcal{Z}_3 + (\mathcal{V}_2 - \mathcal{V}_4)\dfrac{\mathcal{Z}_3\mathcal{Z}_1}{\mathcal{Z}_4}}{\mathcal{Z}_1\mathcal{Z}_2 + \mathcal{Z}_2\mathcal{Z}_3 + \mathcal{Z}_3\mathcal{Z}_1 + \dfrac{\mathcal{Z}_1\mathcal{Z}_2\mathcal{Z}_3}{\mathcal{Z}_4}} \tag{5}$$

$$\mathcal{I}_3 = \frac{\mathcal{U}_{31}\mathcal{Z}_2 - \mathcal{U}_{23}\mathcal{Z}_1 + (\mathcal{V}_3 - \mathcal{V}_4)\frac{\mathcal{Z}_1\mathcal{Z}_2}{\mathcal{Z}_4}}{\mathcal{Z}_1\mathcal{Z}_2 + \mathcal{Z}_2\mathcal{Z}_3 + \mathcal{Z}_3\mathcal{Z}_1 + \frac{\mathcal{Z}_1\mathcal{Z}_2\mathcal{Z}_3}{\mathcal{Z}_4}} \tag{6}$$

$$\mathcal{I}_4 = -(\mathcal{I}_1 + \mathcal{I}_2 + \mathcal{I}_3)$$

$$\mathcal{I}_4 = -\frac{(\mathcal{V}_1 - \mathcal{V}_4)\frac{\mathcal{Z}_2\mathcal{Z}_3}{\mathcal{Z}_4} + (\mathcal{V}_2 - \mathcal{V}_4)\frac{\mathcal{Z}_3\mathcal{Z}_1}{\mathcal{Z}_4} + (\mathcal{V}_3 - \mathcal{V}_4)\frac{\mathcal{Z}_1\mathcal{Z}_2}{\mathcal{Z}_4}}{\mathcal{Z}_1\mathcal{Z}_2 + \mathcal{Z}_2\mathcal{Z}_3 + \mathcal{Z}_3\mathcal{Z}_1 + \frac{\mathcal{Z}_1\mathcal{Z}_2\mathcal{Z}_3}{\mathcal{Z}_4}} \tag{7}$$

în care

$$\mathcal{V}_1 - \mathcal{V}_2 = \mathcal{U}_{12},\ \mathcal{V}_2 - \mathcal{V}_3 = \mathcal{U}_{23},\ \mathcal{V}_3 - \mathcal{V}_1 = \mathcal{U}_{31}.$$

Considerăm cazul general

$$\mathcal{Z}_4 = 0$$

astfel că

$$\mathcal{V}_4 = \mathcal{V}_0'.$$

Ca urmare

$$\mathcal{I}_4 = -\frac{(\mathcal{V}_1 - \mathcal{V}_0')\mathcal{Z}_2\mathcal{Z}_3 + (\mathcal{V}_2 - \mathcal{V}_0')\mathcal{Z}_3\mathcal{Z}_1 + (\mathcal{V}_3 - \mathcal{V}_0')\mathcal{Z}_1\mathcal{Z}_2}{\mathcal{Z}_1\mathcal{Z}_2\mathcal{Z}_3} =$$

$$= -\left((\mathcal{V}_1 - \mathcal{V}_0')\frac{1}{\mathcal{Z}_1} + (\mathcal{V}_2 - \mathcal{V}_0')\frac{1}{\mathcal{Z}_2} + (\mathcal{V}_3 - \mathcal{V}_0')\frac{1}{\mathcal{Z}_3}\right)$$

în care

$$\mathcal{I}_1 = (\mathcal{V}_1 - \mathcal{V}_0')\frac{1}{\mathcal{Z}_1};\quad \mathcal{I}_2 = (\mathcal{V}_2 - \mathcal{V}_0')\frac{1}{\mathcal{Z}_2};\quad \mathcal{I}_3 = (\mathcal{V}_3 - \mathcal{V}_0')\frac{1}{\mathcal{Z}_3}. \tag{8}$$

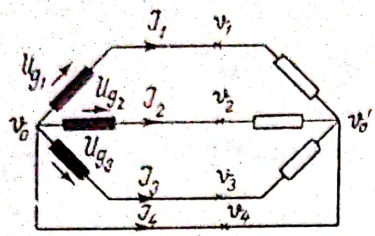
Ținîndu-se seama de circuitul trifazat cu conductorul neutru format din sursă și circuitul de utilizare, din figura 19.135 cu $\mathcal{Z}_4 = 0$, se constată

$$\mathcal{V}_0 = \mathcal{V}_0' = \mathcal{V}_4$$

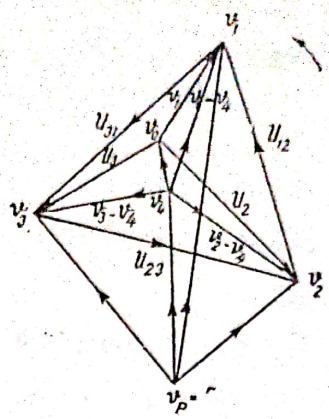
$$\mathcal{V}_1 - \mathcal{V}_0' = \mathcal{V}_1 - \mathcal{V}_0$$

$$\mathcal{V}_1 - \mathcal{V}_0 - \mathcal{U}_{g1} = -\mathcal{I}_1\mathcal{Z}_g$$

$$\mathcal{V}_1 - \mathcal{V}_0 = \mathcal{V}_1 - \mathcal{V}_0' = \mathcal{U}_{g1} - \mathcal{I}_1\mathcal{Z}_g. \tag{9}$$



19.135. Circuit trifazat cu conductor netru cu $z_4 = 0$.



19.136. Diagrama tensiunilor în circuitul în conectare stea cu $z_4 \neq 0$.

Dat fiindcă impedanța z_g e formată din rezistența bobinajului pe fază și reactanța fluxului de dispersie, înseamnă că este o impedanță mică. Ca urmare, tensiunea de fază în circuitul de utilizare, așa cum ne arată (9), e practic egală cu $\mathcal{U}_{g1}$.

Figura 19.136 reprezintă diagrama tensiunilor în circuitul trifazat în conectare stea cu $z_4 \neq 0$ care corespunde curenților electrici din (4), (5), (6), (7).

Se reprezintă diferențele de potențial față de potențialul pământului $\mathcal{V}_P = 0$.

Se obține

$$(\mathcal{V}_1 - \mathcal{V}_P),\ (\mathcal{V}_2 - \mathcal{V}_P),\ (\mathcal{V}_3 - \mathcal{V}_P),\ (\mathcal{V}_4 - \mathcal{V}_P).$$

Se determină ușor diferențele de potențial

$$\mathcal{V}_1 - \mathcal{V}_2 = \mathcal{U}_{12} = (\mathcal{V}_1 - \mathcal{V}_P) - (\mathcal{V}_2 - \mathcal{V}_P).$$

De asemenea diferența de potențial $\mathcal{V}'_0 - \mathcal{V}_P$ este cunoscută.

Se obține din

$$\mathcal{V}'_0 - \mathcal{V}_P = \frac{\Sigma \frac{\mathcal{V}_\nu}{z_\nu}}{\Sigma \frac{1}{z_\nu}} - \mathcal{V}_P = \frac{\frac{\mathcal{V}_1 - \mathcal{V}_P}{z_1} + \frac{\mathcal{V}_2 - \mathcal{V}_P}{z_2} + \frac{\mathcal{V}_3 - \mathcal{V}_P}{z_3} + \frac{\mathcal{V}_4 - \mathcal{V}_P}{z_4}}{\frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2} + \frac{1}{z_3} + \frac{1}{z_4}} \quad (10)$$

care experimental reprezintă în diagramă mărimea $\mathcal{V}'_0 - \mathcal{V}_P$.

Trecem la circuitul trifazat în conectare stea fără conductorul neutru ($z_4 = \infty$).

Curenții electrici $\mathcal{I}_1$, $\mathcal{I}_2$, $\mathcal{I}_3$ devin

$$\mathcal{I}_1 = \frac{\mathcal{U}_{12}\underline{z}_3 - \mathcal{U}_{31}\underline{z}_2}{\underline{z}_1\underline{z}_2 + \underline{z}_2\underline{z}_3 + \underline{z}_3\underline{z}_1}$$

$$\mathcal{I}_2 = \frac{\mathcal{U}_{23}\underline{z}_1 - \mathcal{U}_{12}\underline{z}_3}{\underline{z}_1\underline{z}_2 + \underline{z}_2\underline{z}_3 + \underline{z}_3\underline{z}_1} \qquad (11)$$

$$\mathcal{I}_3 = \frac{\mathcal{U}_{31}\underline{z}_2 - \mathcal{U}_{23}\underline{z}_1}{\underline{z}_1\underline{z}_2 + \underline{z}_2\underline{z}_3 + \underline{z}_3\underline{z}_1}.$$

În figura 19.137 se obțin

$$\mathcal{U}_1 - \mathcal{U}_2 = \mathcal{U}_{12},\ \mathcal{U}_2 - \mathcal{U}_3 = \mathcal{U}_{23},\ \mathcal{U}_3 - \mathcal{U}_1 = \mathcal{U}_{31},$$

în care

$$\mathcal{U}_1 = \mathcal{I}_1\underline{z}_1,\ \mathcal{U}_2 = \mathcal{I}_2\underline{z}_2,\ \mathcal{U}_3 = \mathcal{I}_3\underline{z}_3.$$

Calculul numeric

Pentru calculul curentului $\mathcal{I}_1$ se introduc tensiunile înlănțuite în formele

$$\begin{aligned} \mathcal{V}_1 - \mathcal{V}_2 &= \mathcal{U}_{12} = U_{12}\,e^{j\,120} \\ \mathcal{V}_2 - \mathcal{V}_3 &= \mathcal{U}_{23} = U_{23}\,e^{j0} \\ \mathcal{V}_3 - \mathcal{V}_1 &= \mathcal{U}_{31} = U_{31}\,e^{-j\,120} \end{aligned} \qquad (12)$$

$$\underline{z}_1 = z_1 e^{j\varphi_1},\ \underline{z}_2 = z_2\,e^{j\varphi_2},\ \underline{z}_3 = z_3\,e^{j\varphi_3}. \qquad (13)$$

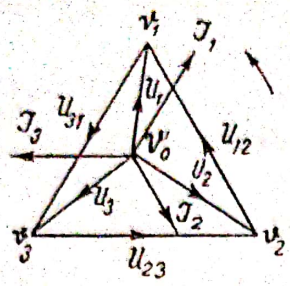
Se formează

$$\mathcal{U}_{12}\underline{z}_3 - \mathcal{U}_{31}\underline{z}_2 = U_{12}z_3\ \cos\ (120 + \varphi_3) - U_{31}z_2\ \cos\ (-120 + \varphi_2) +$$
$$+ j\,[U_{12}z_3\ \sin\ (120 + \varphi_3) - U_{31}z_2\ \sin\ (-120 + \varphi_2)] = A + j\,B. \qquad (14)$$

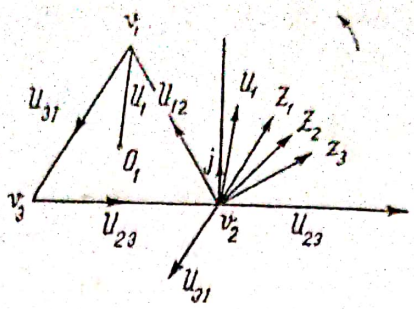
$$\underline{z}_1\underline{z}_2 + \underline{z}_2\underline{z}_3 + \underline{z}_3\underline{z}_1 = z_1z_2\ \cos\,(\varphi_1 + \varphi_2) + z_2z_3\ \cos\,(\varphi_2 + \varphi_3) +$$
$$+ z_3z_1\ \cos\,(\varphi_3 + \varphi_1) + j\,[z_1z_2\ \sin\,(\varphi_1 + \varphi_2) + z_2z_3\ \sin\,(\varphi_2 + \varphi_3) +$$
$$+ z_3z_1\ \sin\,(\varphi_3 + \varphi_1)] = a + j\,b. \qquad (15)$$

De unde se deduce

$$\mathcal{I}_1 = \frac{A + j\,B}{a + j\,b} = \frac{\sqrt{A^2 + B^2}\,e^{j\psi_1}}{\sqrt{a^2 + b^2}\,e^{j\psi_2}} = \sqrt{\frac{A^2 + B^2}{a^2 + b^2}}\,e^{(\psi_1 - \psi_2)} = I\,e^{j\alpha_1}. \qquad (16)$$



19.137. Diagrama tensiunilor pentru $z_4 = \infty$.



19.138. Tensiunile înlănțuite.

în care

$$\operatorname{tg}(\psi_1 - \psi_2) = \frac{\operatorname{tg}\psi_1 - \operatorname{tg}\psi_2}{1 + \operatorname{tg}\psi_1 \cdot \operatorname{tg}\psi_2}; \quad \operatorname{tg}\psi_1 = \frac{B}{A}; \quad \operatorname{tg}\psi_2 = \frac{b}{a}; \tag{17}$$

$$I = \sqrt{\frac{A^2 + B^2}{a^2 + b^2}}; \quad \alpha_1 = \psi_1 - \psi_2. \tag{17}$$

Se formează apoi

$$\mathcal{U}_1 = \mathcal{J}_1 \underline{z}_1 = I_1 z_1 \, e^{j(\alpha_1 + \varphi_1)}$$

și se trece în diagrama triunghiului din figura 19.138.

Se consideră un circuit trifazat în conectare stea fără conductorul neutru ($z_4 = \infty$) cu impedanțele neegale cu tensiuni de borne (tensiuni înlănțuite) neegale, datorită spre exemplu unei încărcări nesimetrice a rețelei.

Figura 19.139 reprezintă diagrama tensiunilor în cazul cînd tensiunile de borne nu sînt simetrice.

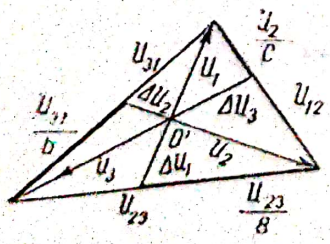
Din

$$\begin{aligned} \mathcal{V}_1 - \mathcal{V}_2 &= \mathcal{U}_{12} \\ \mathcal{V}_2 - \mathcal{V}_3 &= \mathcal{U}_{23} \\ \mathcal{V}_3 - \mathcal{V}_1 &= \mathcal{U}_{31} \end{aligned} \tag{18}$$

rezultă că întotdeauna suma tensiunilor înlănțuite e nulă.

Avem

$$\mathcal{U}_{12} + \mathcal{U}_{23} + \mathcal{U}_{31} = 0. \tag{19}$$



19.139. Tensiuni înlănțuite nesimetrice.

În cele ce urmează se arată că atunci cînd tensiunile de fază $\mathcal{U}_1$, $\mathcal{U}_2$, $\mathcal{U}_3$ se găsesc pe medianele triunghiului, rezultă

$$\mathcal{U}_1 + \mathcal{U}_2 + \mathcal{U}_3 = 0. \tag{20}$$

Din figură se obține

$$\mathcal{U}_1 + \Delta\mathcal{U}_1 = \frac{\mathcal{U}_{23}}{a} + \mathcal{U}_{12}$$

$$\mathcal{U}_2 + \Delta\mathcal{U}_2 = \frac{\mathcal{U}_{31}}{b} + \mathcal{U}_{23}$$

$$\mathcal{U}_3 + \Delta\mathcal{U}_3 = \frac{\mathcal{U}_{12}}{c} + \mathcal{U}_{31},$$

de unde se deduce

$$\mathcal{U}_1 + \mathcal{U}_2 + \mathcal{U}_3 + \Delta\mathcal{U}_1 + \Delta\mathcal{U}_2 + \Delta\mathcal{U}_3 = \\ = \frac{\mathcal{U}_{23}}{a} + \frac{\mathcal{U}_{31}}{b} + \frac{\mathcal{U}_{12}}{c}. \tag{21}$$

În cazul cînd $\mathcal{U}_1$, $\mathcal{U}_2$, $\mathcal{U}_3$ se găsesc pe mediane, se obține

$$a = b = c = 2. \tag{22}$$

Ca urmare avem

$$\Delta\mathcal{U}_1 = \frac{\mathcal{U}_1}{2}, \quad \Delta\mathcal{U}_2 = \frac{\mathcal{U}_2}{2}, \quad \Delta\mathcal{U}_3 = \frac{\mathcal{U}_3}{2} \tag{23}$$

Introducînd pe (22) și (23) în (21) se obține

$$\frac{3}{2}(\mathcal{U}_1 + \mathcal{U}_2 + \mathcal{U}_3) = \frac{1}{2}(\mathcal{U}_{23} + \mathcal{U}_{31} + \mathcal{U}_{12}) = 0. \tag{24}$$

Relația (21) ne arată că în cazul cînd a, b, c nu sînt egale, nu se mai obține o relație de forma (24), astfel că suma tensiunilor $(\mathcal{U}_1 + \mathcal{U}_2 + \mathcal{U}_3)$ nu mai devine nulă. Spre exemplu în cazul cînd $\mathcal{U}_1$, $\mathcal{U}_2$, $\mathcal{U}_3$ se găsesc pe bisectoare, suma lor nu mai e nulă.

Din expresiile curenților $\mathcal{I}_1$, $\mathcal{I}_2$, $\mathcal{I}_3$ din (11) se obține în cazul cînd avem

$$\varepsilon_1^* = \varepsilon_2^* = \varepsilon_3^*$$

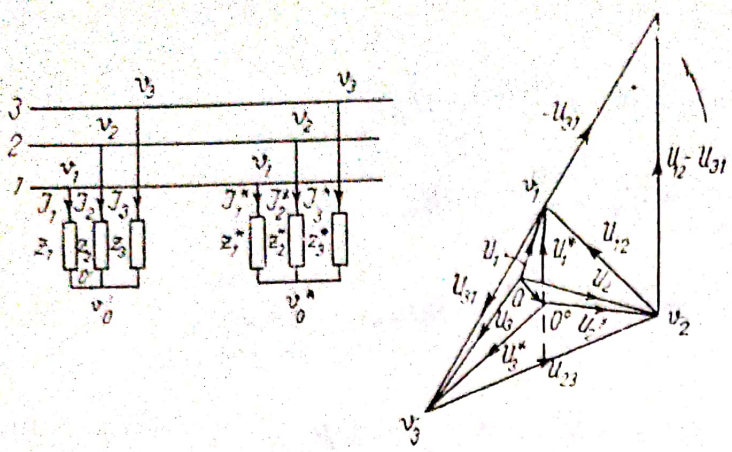
$$\mathcal{I}_1^* \varepsilon_1^* = \mathcal{U}_1^* = \frac{\mathcal{U}_{12} - \mathcal{U}_{31}}{3},$$

de unde se obține $3\mathcal{U}_1^* = \mathcal{U}_{12} - \mathcal{U}_{31}$.

Din figura 19.140 dreapta, se constată că segmentul $\mathcal{U}_{12} - \mathcal{U}_{31}$ e paralel cu $\mathcal{U}_1^*$.

Se formează două triunghiuri asemenea cu vîrful în $\mathcal{V}_3$ în care latura $\frac{3}{2}\mathcal{U}_1^*$ e paralelă cu latura $\mathcal{U}_{12} - \mathcal{U}_{31}$.

Scanned with OKEN Scanner



19.140. Circuite în conectare stea cu $z_1 \neq z_2 \neq z_3$ cu $z_1^* = z_2^* = z_3^*$.

Din figură rezultă

$$\frac{\frac{3}{2}\mathcal{U}_1^*}{\mathcal{U}_{12} - \mathcal{U}_{31}} = \frac{1}{2},$$

ceea ce ne arată că latura $\mathcal{U}_{23}$ e împărțită în două părți egale. În felul acesta se verifică, că ori de cîte ori $z_1^* = z_2^* = z_3^*$ înseamnă că $\mathcal{U}_1^*$ se găsește pe mediană.

În figura 19.140 stînga, se prezintă două circuite în conectare stea cu

$$z_1 \neq z_2 \neq z_3 \quad \text{cu} \quad z_1^* = z_2^* = z_3^*.$$

Se cere să se determine diferența de potențial

$$\Delta\mathcal{U} = \mathcal{V}_0^* - \mathcal{V}_0' \tag{25}$$

între punctele neutre O^* și O'.

Din diagrama tensiunilor din figura 19.140 dreapta, se obține

$$\begin{aligned} \mathcal{U}_1 &= \Delta\mathcal{U} + \mathcal{U}_1^* \\ \mathcal{U}_2 &= \Delta\mathcal{U} + \mathcal{U}_2^* \\ \mathcal{U}_3 &= \Delta\mathcal{U} + \mathcal{U}_3^*, \end{aligned} \tag{26}$$

în care $\mathcal{U}_1^*$, $\mathcal{U}_2^*$, $\mathcal{U}_3^*$ corespund impedanțelor

$$z_1^* = z_2^* = z_3^* \tag{27}$$

și se găsesc pe mediane, astfel că

$$\mathcal{U}_1^* + \mathcal{U}_2^* + \mathcal{U}_3^* = 0. \tag{28}$$

Tensiunile $\mathcal{U}_1$, $\mathcal{U}_2$, $\mathcal{U}_3$ corespund impedanțelor care nu sînt egale

$$z_1 \neq z_2 \neq z_3. \tag{29}$$

Scanned with OKEN Scanner

Analitic se determină $\Delta\mathcal{U}$ *în felul următor:*
Se înmulțesc relațiile (26) cu admitanțele y_1, y_2, y_3 și se obțin

$$\begin{aligned}\mathcal{I}_1 &= y_1\mathcal{U}_1 = y_1(\Delta\mathcal{U} + \mathcal{U}_1^*)\\ \mathcal{I}_2 &= y_2\mathcal{U}_2 = y_2(\Delta\mathcal{U} + \mathcal{U}_2^*)\\ \mathcal{I}_3 &= y_3\mathcal{U}_3 = y_3(\Delta\mathcal{U} + \mathcal{U}_3^*)\end{aligned} \tag{30}$$

în care avem

$$\mathcal{I}_1 + \mathcal{I}_2 + \mathcal{I}_3 = 0. \tag{31}$$

Ca urmare, din (31) și (30) se obține

$$\Delta\mathcal{U} = -\frac{\mathcal{U}_1^* y_1 + \mathcal{U}_2^* y_2 + \mathcal{U}_3^* y_3}{y_1 + y_2 + y_3}. \tag{32}$$

Determinarea tensiunii $\mathcal{U}_1$ *cu ajutorul admitanțelor*
Se formează $\mathcal{U}_1$ din (26) în forma

$$\begin{aligned}\mathcal{U}_1 = \Delta\mathcal{U} + \mathcal{U}_1^* &= -\frac{\mathcal{U}_1^* y_1 + \mathcal{U}_2^* y_2 + \mathcal{U}_3^* y_3}{y_1 + y_2 + y_3} + \mathcal{U}_1^* =\\ &= \frac{(\mathcal{U}_1^* - \mathcal{U}_2^*)\, y_2 - (\mathcal{U}_3^* - \mathcal{U}_1^*)\, y_3}{y_1 + y_2 + y_3} = \frac{\mathcal{U}_{13} y_2 - \mathcal{U}_{31} y_3}{y_1 + y_2 + y_3}.\end{aligned} \tag{33}$$

În mod analog se determină și tensiunile de fază $\mathcal{U}_2$ și $\mathcal{U}_3$.
Introducîndu-se impedanțele z_1, z_2, z_3 se revine la relația cunoscută pentru $\mathcal{I}_1$.
Se formează

$$\mathcal{U}_1 = \mathcal{I}_1 z_1 = \frac{\mathcal{U}_{12}\frac{1}{z_1} - \mathcal{U}_{31}\frac{1}{z_3}}{\frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2} + \frac{1}{z_3}} = \frac{\mathcal{U}_{12} z_3 - \mathcal{U}_{31} z_2}{z_1 z_2 + z_2 z_3 + z_3 z_1} \cdot \frac{z_1 z_2 z_3}{z_2 z_3} \tag{34}$$

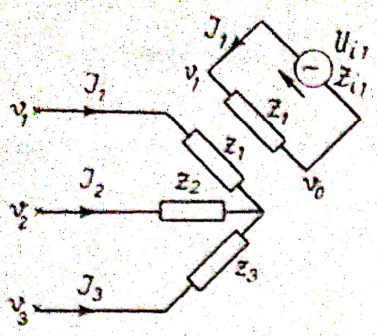
Din (34) se obține $\mathcal{I}_1$ în forma cunoscută,
Din (32) se constată că pentru $y_1^* = y_2^* = y_3^*$ devine zero, deoarece avem

$$\mathcal{U}_1^* + \mathcal{U}_2^* + \mathcal{U}_3^* = 0.$$

19.3. APLICAREA METODEI TENSIUNILOR ECHIVALENTE LA CIRCUITELE TRIFAZATE ÎN CONECTARE STEA

În figura 19.141 se prezintă un circuit trifazat în conectare stea fără conductor neutru, nesimetric ($z_1 \neq z_2 \neq z_3$).
Se poate considera circuitul între $\mathcal{V}_1$ și $\mathcal{V}_2$ cu impedanța z_1 conectat la generator monofazat de tensiune $\mathcal{U}_{i_1}$ și o impedanță interioară z_{i_1} care să producă curentul electric $\mathcal{I}_1$ egal cu acela din circuitul trifazat.

Scanned with OKEN Scanner



19.141. Aplicarea metodei tensiunilor echivalente.

Se introduce relația

$$\mathcal{U}_{i_1} = \mathcal{J}_1 (z_{i_1} + z_1). \tag{1}$$

Se cere să se determine tensiunea generatorului echivalent $\mathcal{U}_{i_1}$ și impedanța interioară z_{i_1}.

Ne folosim de legătura liniară dintre diferența de potențial $v_0' - v_1$ cînd circuitul trece prin bobina generatorului și curentul electric $\mathcal{J}_1$. Avem

$$\mathcal{V}_0' - \mathcal{V}_1 + \mathcal{U}_{i_1} = \mathcal{J}_1 z_{i_1}, \tag{2}$$

de unde rezultă

$$\mathcal{V}_1 - \mathcal{V}_0' = \mathcal{U}_{i_1} - \mathcal{J}_1 z_{i_1} = \mathcal{C}_1 \mathcal{J}_1 + \mathcal{C}_2. \tag{3}$$

Pe de altă parte

$$\mathcal{V}_1 - \mathcal{V}_0' = \mathcal{J}_1 z_1. \tag{4}$$

Pentru determinarea constantelor $\mathcal{C}_1$ și $\mathcal{C}_2$ se consideră mai întîi $z_1 = \infty$. Se obține $\mathcal{J}_1 = 0$, iar $(\mathcal{J}_1 z_1)_{z_1 = \infty}$ devine

$$(\mathcal{J}_1 z_1)_{z_1 = \infty} = \mathcal{C}_2 = \mathcal{U}_{i_1}. \tag{5}$$

Pe de altă parte pentru $z_1 = 0$ se obține

$$\mathcal{J}_1 z_1 = 0 = \mathcal{U}_{i_1} + \mathcal{C}_1 \mathcal{J}_{1k}$$

din care rezultă

$$\mathcal{C}_1 = -\frac{\mathcal{U}_{i_1}}{\mathcal{J}_{1k}} = -z_{i_1}. \tag{6}$$

Din

$$\mathcal{J}_1 = \frac{\mathcal{U}_{12} z_3 - \mathcal{U}_{31} z_2}{z_1 z_2 + z_2 z_3 + z_1 z_3} \tag{7}$$

Pentru $z_1 = \infty$ se obține din (7)

$$\mathcal{U}_{i_1} = (\mathcal{J}_1 z_1)_{z_1 = \infty} = \frac{\mathcal{U}_{12} z_3 - \mathcal{U}_{31} z_2}{z_2 + z_3 + \left(\frac{z_2 z_3}{z_1}\right)_{z_1 = \infty}} = \frac{\mathcal{U}_{12} z_3 - \mathcal{U}_{31} z_2}{z_2 + z_3}. \tag{8}$$

Pentru $z_1 = 0$ se obține $\mathcal{J}_{1k}$ în forma

$$\mathcal{J}_{1k} = \frac{\mathcal{U}_{12} z_3 - \mathcal{U}_{31} z_2}{z_2 z_3}, \tag{9}$$

de unde se obține

$$\frac{\mathcal{U}_{i_1}}{\mathcal{J}_{1k}} = \mathcal{Z}_{i_1} = \frac{\mathcal{Z}_2\mathcal{Z}_3}{\mathcal{Z}_2 + \mathcal{Z}_3}. \tag{10}$$

Impedanța echivalentă $\mathcal{Z}_{i_1}$ se poate obține direct din circuitul trifazat din figura 19.141.

Pentru $\mathcal{U}_{12} = 0$ și $\mathcal{U}_{31} = 0$ rezultă $\mathcal{U}_{i_1} = 0$.

Punctele *1, 2, 3* se găsesc unite la același potențial.

Afară de circuitul $\mathcal{Z}_1$, celelalte două circuite sînt conectate în paralel. Se obține

$$\mathcal{Z}_{i_1} = \frac{\mathcal{Z}_2\mathcal{Z}_3}{\mathcal{Z}_2 + \mathcal{Z}_3}.$$

Aplicarea metodei tensiunilor echivalente la determinarea curentului $\mathcal{J}_1$ la un circuit trifazat în conectare stea prezintă avantajul obținerii acestui curent, din cercetarea a două circuite monofazate.

Din figura 19.142 dreapta, se constată că pentru $\mathcal{Z}_1 = \infty$ se obține

$$\mathcal{V}_1 - \mathcal{V}_0'' = \mathcal{U}_{i_1}$$

$$\mathcal{J}_{20} + \mathcal{J}_{30} = 0, \text{ adică } \mathcal{J}_{30} = -\mathcal{J}_{20}$$

$$\mathcal{V}_2 - \mathcal{V}_3 = \mathcal{U}_{23} = \mathcal{J}_{20}\mathcal{Z}_2 - \mathcal{J}_{30}\mathcal{Z}_3 = \mathcal{J}_{20}(\mathcal{Z}_2 + \mathcal{Z}_3)$$

ca la un circuit monofazat cu impedanța $\mathcal{Z}_2 + \mathcal{Z}_3$. Din diagrama tensiunilor se vede cum se obține

$$\mathcal{U}_{23} = \mathcal{J}_{20}\mathcal{Z}_3 + \mathcal{J}_{20}\mathcal{Z}_2$$

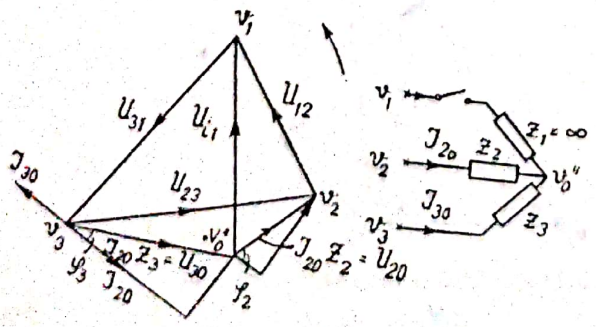
și tensiunea

$$\mathcal{U}_{i_1} = \mathcal{V}_1 - \mathcal{V}_0''.$$

Avem

$$\mathcal{V}_1 - \mathcal{V}_2 = \mathcal{U}_{12} = -\mathcal{J}_{20}\mathcal{Z}_2 + \mathcal{V}_1 - \mathcal{V}_0''.$$

Pe de altă parte se mai constată din diagramă că pentru $\varphi_3 < \varphi_2$ punctul $\mathcal{V}_0''$ se găsește în exteriorul triunghiului tensiunilor de borne.



19.142. Determinarea tensiunii $\mathcal{U}_{i_1}$ pentru $\varphi_3 < \varphi_2$.

În figura 19.143 se consideră $\varphi_3 > \varphi_2$.

Se constată că $\mathcal{V}_0''$ se găsește în interiorul triunghiului format din tensiunile de borne.

După ce s-a format impedanța de interior a generatorului echivalent z_{i_1} din relația (1) se obține cel de-al doilea circuit monofazat.

La tensiunea $\mathcal{U}_{i_1}$ al acestui circuit exprimată în diagrama din figura 19.144 se conectează impedanța formată din $z_{i_1} + z_1$.

Ca urmare se obține $\mathcal{I}_1$ din

$$\mathcal{I}_1 = \frac{\mathcal{U}_{i_1}}{z_{i_1} + z_1}.$$

Se formează căderea $\mathcal{I}_1 z_{i_1}$ exprimată prin $\mathcal{V}_0'' O$ obținîndu-se punctul O. Prin determinarea poziției punctului O cele trei tensiuni de fază $\mathcal{I}_1 z_1$, $\mathcal{I}_2 z_2$, $\mathcal{I}_3 z_3$ devin cunoscute.

Din relația

$$\mathcal{U}_{i_1} = \mathcal{I}_1(z_{i_1} + z_1) = \mathcal{I}_{1k} z_{i_1}. \tag{11}$$

Se mai poate exprima tensiunea $\mathcal{U}_1$ în felul următor:

$$(\mathcal{I}_{1k} - \mathcal{I}_1) z_{i_1} = \mathcal{I}_1 z_1 = \mathcal{U}_1 \tag{12}$$

sau

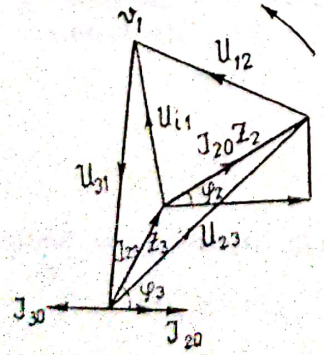
$$\left(\frac{\mathcal{U}_{12} z_3 - \mathcal{U}_{31} z_2}{z_2 z_3} - \frac{\mathcal{U}_{12} z_3 - \mathcal{U}_{31} z_2}{z_1 z_2 + z_2 z_3 + z_3 z_1}\right) \frac{z_2 z_3}{z_2 + z_3} = \mathcal{U}_1 \tag{13}$$

$$\frac{\mathcal{U}_{12} z_3 - \mathcal{U}_{31} z_2}{z_2 z_3} \left(1 - \frac{z_2 z_3}{z_1 z_2 + z_2 z_3 + z_3 z_1}\right) \frac{z_2 z_2}{z_2 + z_3} = \mathcal{U}_1$$

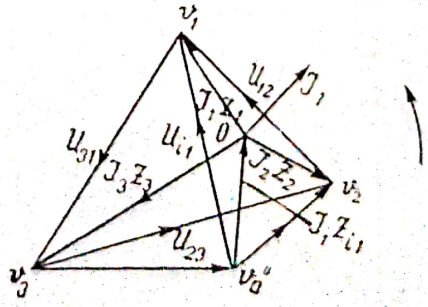
$$\mathcal{U}_1 = \mathcal{I}_{1k} \frac{z_1(z_2 + z_3)}{z_1 z_2 + z_2 z_3 + z_3 z_1} \cdot \frac{z_2 z_3}{z_2 + z_3} = \mathcal{I}_{1k} \frac{z_1 z_2 z_3}{z_1 z_2 + z_2 z_3 + z_3 z_1}. \tag{14}$$

Din

$$\frac{1}{z_p} = \frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2} + \frac{1}{z_3},$$



19.143. Diagrama tensiunii $\mathcal{U}_{i_1}$ pentru $\varphi_3 > \varphi_2$.



19.144. Determinarea tensiunii $\mathcal{U}_1 = \mathcal{I}_1 z_1$.

Scanned with OKEN Scanner

se obține

$$z_p = \frac{z_1 z_2 z_3}{z_1 z_2 + z_2 z_3 + z_3 z_1}. \tag{15}$$

Ca urmare, relația (14) devine

$$\mathcal{U}_1 = \mathcal{J}_1 z_1 = \mathcal{J}_{1k} \cdot z_p. \tag{16}$$

Pentru $z_1 = 0$ avem $\mathcal{U}_{1k} = \mathcal{J}_{1k} z_1 = 0$.
Înseamnă că potențialul $\mathcal{V}_0'''$ devine egal cu $\mathcal{V}_1$.
Figura 19.145 dreapta, reprezintă circuitul în conectare stea cu $z_1 = 0$.
Din diagramă se obține pentru $z_1 = 0$ tensiunile $\mathcal{U}_{2k}$ și $\mathcal{U}_{3k}$.
Avem

$$\mathcal{U}_{2k} = -\mathcal{U}_{12} \quad \mathcal{U}_{3k} = \mathcal{U}_{31}.$$

Din

$$\mathcal{U}_{2k} = \mathcal{J}_{2k} z_2 \quad \text{și} \quad \mathcal{U}_{3k} = \mathcal{J}_{3k} z_3$$

se obțin curenții $\mathcal{J}_{2k}$ și $\mathcal{J}_{3k}$.
Deoarece avem

$$\mathcal{J}_{1k} + \mathcal{J}_{2k} + \mathcal{J}_{3k} = 0$$

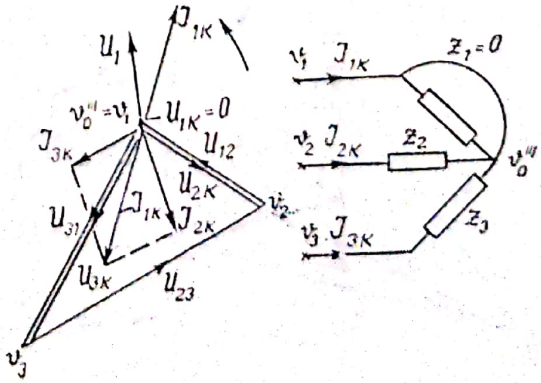
se obține

$$-\mathcal{J}_{1k} = \mathcal{J}_{2k} + \mathcal{J}_{3k},$$

astfel că $\mathcal{J}_{1k}$ este determinat.
Se formează produsul $\mathcal{J}_{1k} z_p$ și se obține tensiunea de fază $\mathcal{U}_1$ a circuitului cu impedanțele z_1, z_2, z_3.
Dacă revenim la formula (33) din § 19.2 în forma

$$\mathcal{U}_1 = \frac{\mathcal{U}_{12} y_2 - \mathcal{U}_{31} y_3}{y_1 + y_2 + y_3}$$

se vede că ea exprimă exact formula (16).



19.145. Determinarea tensiunii $\mathcal{U}_1$ din $\mathcal{U}_1 = \mathcal{J}_{1k} z_p$.

Scanned with OKEN Scanner

Avem

$$y_1 + y_2 + y_3 = \frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2} + \frac{1}{z_3} = \frac{1}{z_p}$$

$$\mathcal{U}_{12} y_2 = \frac{\mathcal{U}_{12}}{z_2} = -\mathcal{J}_{2k}$$

$$\mathcal{U}_{31} y_3 = \frac{\mathcal{U}_{31}}{z_3} = \mathcal{J}_{3k}$$

$$-\mathcal{J}_{2k} - \mathcal{J}_{3k} = \mathcal{J}_{1k}$$

pentru $z_1 = 0$, astfel că formula de mai sus pentru $\mathcal{U}_1$ ia forma $\mathcal{U}_1 = z_p \cdot \mathcal{J}_{1k}$.

Aplicarea metodei tensiunilor echivalente la circuitul trifazat în conectare stea cu conductor neutru

În figura 19.146 dreapta, se reprezintă circuitul trifazat în conectare stea cu conductor neutru cu circuitul z_4 întrerupt.

Din § 19.2 se obține pentru $z_4 = \infty$ din formula (7)

$$\mathcal{U}_{i_4} = (\mathcal{J}_4 \cdot z_4)_{z_4=\infty} = \frac{(\mathcal{V}_1 - \mathcal{V}_4) z_2 z_3 + (\mathcal{V}_2 - \mathcal{V}_4) z_3 z_1 + (\mathcal{V}_3 - \mathcal{V}_4) z_1 z_2}{z_1 z_2 + z_2 z_3 + z_3 z_1}$$

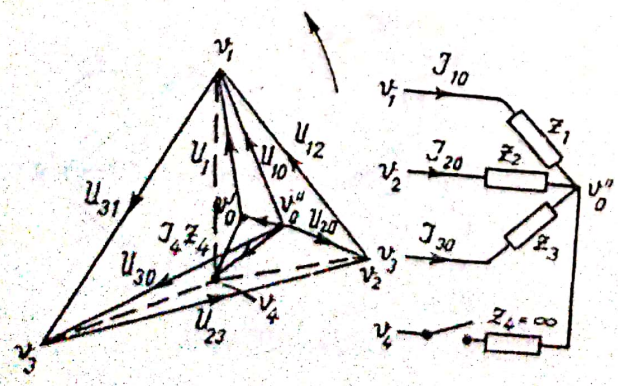
pentru $z_4 = 0$ rezultă

$$\mathcal{J}_{4k} = \frac{(\mathcal{V}_1 - \mathcal{V}_4) z_2 z_3 + (\mathcal{V}_2 - \mathcal{V}_4) z_3 z_1 + (\mathcal{V}_3 - \mathcal{V}_4) z_1 z_2}{z_1 z_2 z_3}$$

se formează

$$\frac{\mathcal{U}_{i_4}}{\mathcal{J}_{4k}} = z_{i_4} = \frac{z_1 z_2 z_3}{z_1 z_2 + z_2 z_3 + z_3 z_1}$$

z_{i_4} corespunde impedanțelor z_1, z_2, z_3 în paralel.



19.146. Determinarea potențialului $\mathcal{V}_0$.

Se obține

$$\mathcal{U}_{i_4} = \mathcal{J}_4(\varepsilon_{i_4} + \varepsilon_4) \tag{17}$$

cînd se face $\varepsilon_4 = \infty$ punctul neutru obține potențialul $\mathcal{V}_0''$.

Se determină poziția punctului $\mathcal{V}_0''$ ca în cazul unui circuit trifazat în conectare stea fără conductor neutru.

Potențialul $\mathcal{V}_4$ se obține din $(\mathcal{V}_1 - \mathcal{V}_4)$, $(\mathcal{V}_2 - \mathcal{V}_4)$ și $(\mathcal{V}_3 - \mathcal{V}_4)$ care sînt cunoscute. Dreptele punctate în diagrama din figura 19.146 reprezintă $(\mathcal{V}_1 - \mathcal{V}_4)$, $(\mathcal{V}_2 - \mathcal{V}_4)$ și $(\mathcal{V}_3 - \mathcal{V}_4)$. Ca urmare, segmentul care exprimă $(\mathcal{V}_4 - \mathcal{V}_0'') = \mathcal{U}_{i_4}$ devine cunoscut din diagramă.

Din relația (17) se obține $\mathcal{J}_4$ respectiv căderile de tensiune $\mathcal{J}_4\varepsilon_{i_4}$ și $\mathcal{J}_4\varepsilon_4$.

Se construiesc în diagramă aceste căderi. În felul acesta se obține punctul $\mathcal{V}_0'$.

Tensiunea de fază $\mathcal{V}_1 - \mathcal{V}_0' = \mathcal{U}_1$ devine cunoscută. Odată cu cunoașterea punctului $\mathcal{V}_0'$ devin cunoscute și tensiunile de fază $\mathcal{U}_2$, $\mathcal{U}_3$. $\mathcal{V}_4 - \mathcal{V}_0' = \mathcal{J}_4\varepsilon_4$ a fost deja determinată.

Metoda prezintă importanță pentru urmărirea variației poziției punctului $\mathcal{V}_0'$ cu variația impedanței ε_4.

Circuit trifazat în conectare V

În figura 19.147 stînga, se prezintă circuitul trifazat în conectare V. El corespunde unui circuit trifazat normal în conectare stea cînd s-a făcut $\varepsilon_2 = 0$.

Ca urmare se obține diagrama tensiunilor și a curenților din figura 19.147 dreapta.

Avem $\mathcal{U}_2 = \mathcal{J}_2\varepsilon_2 = 0$ pentru $\varepsilon_2 = 0$, deci $\mathcal{V}_2 = \mathcal{V}_0'$.

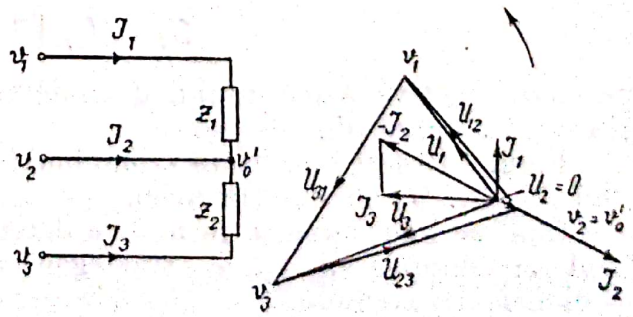
Tensiunile de fază $\mathcal{U}_1$, $\mathcal{U}_3$ devin cunoscute.

Se obține $\mathcal{U}_1 = \mathcal{U}_{12}$, $\mathcal{U}_3 = -\mathcal{U}_{23}$.

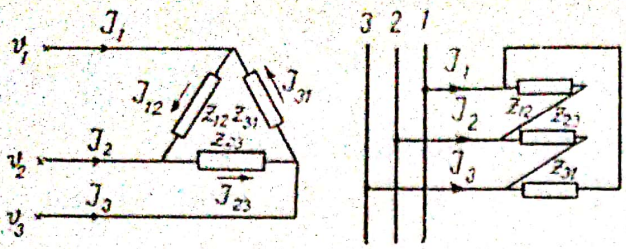
Curenții $\mathcal{J}_1$ și $\mathcal{J}_3$ sînt cunoscuți

$$\mathcal{J}_1 = \mathcal{U}_1 \frac{1}{\varepsilon_1} \qquad \mathcal{J}_3 = \mathcal{U}_3 \frac{1}{\varepsilon_3}.$$

Din $\mathcal{J}_1 + \mathcal{J}_2 + \mathcal{J}_3 = 0$ se obține $\mathcal{J}_2$.



19.147. Circuit trifazat în conectare V.



19.148. Circuit trifazat în conectare triunghi.

19.4. CIRCUIT TRIFAZAT ÎN CONECTARE TRIUNGHI

La circuitele trifazate în conectare stea deosebim: tensiunile de fază, tensiunile de borne (tensiuni înlănțuite), curenții de linie aceiași cu curenții de fază. În schema din figura 19.148 stînga, la un circuit în conectare triunghi, tensiunile de fază sînt și tensiuni de borne iar curenții de linie se deosebesc de curenții de fază.

Pentru un circuit trifazat în conectare triunghi se poate forma schema și în forma din figura 19.148 dreapta.

Pentru cele trei puncte de derivație ale curenților se obțin relațiile.

$$\begin{aligned} \mathcal{J}_1 + \mathcal{J}_{31} &= \mathcal{J}_{12} \\ \mathcal{J}_2 + \mathcal{J}_{12} &= \mathcal{J}_{23} \\ \mathcal{J}_3 + \mathcal{J}_{23} &= \mathcal{J}_{31}, \end{aligned} \tag{1}$$

de unde se deduc curenții de linie în funcție de curenții de fază

$$\begin{aligned} \mathcal{J}_1 &= \mathcal{J}_{12} - \mathcal{J}_{31} \\ \mathcal{J}_2 &= \mathcal{J}_{23} - \mathcal{J}_{12} \\ \mathcal{J}_3 &= \mathcal{J}_{31} - \mathcal{J}_{23}. \end{aligned} \tag{2}$$

Din (2) se constată că întotdeauna suma curenților de linie este nulă.

Avem

$$\mathcal{J}_1 + \mathcal{J}_2 + \mathcal{J}_3 = 0. \tag{3}$$

Cînd curenții de fază $\mathcal{J}_{12}$, $\mathcal{J}_{23}$, $\mathcal{J}_{31}$ sînt simetrici, adică posedă aceleași valori efective și sînt defazați cu cîte 120°, rezultă din diagrama curenților, din figura 19.149:

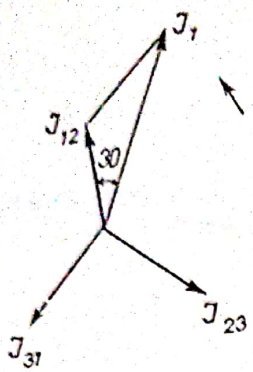
$$\mathcal{J}_1 = I_{12}\sqrt{3}\,e^{j(\varphi_{12}-30)}$$

valoarea efectivă a curentului de linie este $\sqrt{3}$ ori mai mare ca valoarea efectivă a curentului de fază.

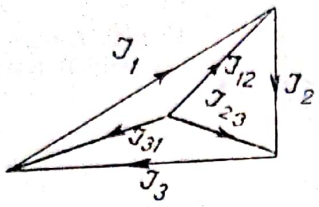
Figura 19.150 reprezintă triunghiul format din curenții de linie $\mathcal{J}_1$, $\mathcal{J}_2$, $\mathcal{J}_3$ cînd $\mathcal{J}_1$, $\mathcal{J}_2$, $\mathcal{J}_3$ nu sînt simetrici.

Cînd se dau curenții de linie se determină curenții de fază $\mathcal{J}_{12}$, $\mathcal{J}_{23}$, $\mathcal{J}_{31}$. Cînd impedanțele z_{12}, z_{23}, z_{31} sînt egale atunci curenții de fază se găsesc pe medianele triunghiului.

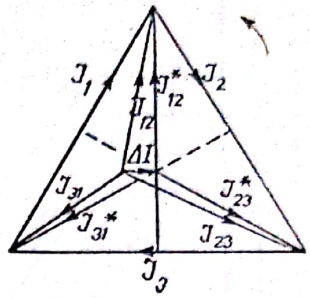
Scanned with OKEN Scanner



19.149. Curenții de fază $\mathcal{J}_{12}$, $\mathcal{J}_{23}$, $\mathcal{J}_{31}$ sînt asimetrici.



19.150. Curenții de linie și de fază.



19.151. Determinarea curenților de linie

În figura 19.151 se construiesc curenții $\mathcal{J}_{12}^*$, $\mathcal{J}_{23}^*$, $\mathcal{J}_{31}^*$ card corespund cazului cînd ε_{12}, ε_{23}, ε_{31} ar fi egale. Construcția lor e simplă pentru că se construiesc medianele triunghiului.

Din diagramă se poate stabili legătura dintre curenții pe care trebuie să-i determinăm $\mathcal{J}_{12}$, $\mathcal{J}_{23}$, $\mathcal{J}_{31}$ în funcție de curenții care coincid cu medianele $\mathcal{J}_{12}^*$, $\mathcal{J}_{23}^*$, $\mathcal{J}_{31}^*$.

Se obține

$$\mathcal{J}_{12} = \mathcal{J}_{12}^* + \Delta\mathcal{J}$$
$$\mathcal{J}_{23} = \mathcal{J}_{23}^* + \Delta\mathcal{J}$$
$$\mathcal{J}_{31} = \mathcal{J}_{31}^* + \Delta\mathcal{J}. \qquad (4)$$

Ținîndu-se seama că suma curenților $\mathcal{J}_{12}^*$, $\mathcal{J}_{23}^*$, $\mathcal{J}_{31}^*$ e nulă se obține din (4);

$$\mathcal{J}_{12} + \mathcal{J}_{23} + \mathcal{J}_{31} = 3\Delta\mathcal{J}. \qquad (5)$$

Introducîndu-se $\varepsilon_{12}\mathcal{J}_{12} = \mathcal{U}_{12}$; $\varepsilon_{23}\mathcal{J}_{23} = \mathcal{U}_{23}$; $\varepsilon_{31}\mathcal{J}_{31} = \mathcal{U}_{31}$, ceea ce înseamnă că relațiile (4) se înmulțesc cu ε_{12}, ε_{23} și ε_{31}, rezultă

$$\mathcal{U}_{12} + \mathcal{U}_{23} + \mathcal{U}_{31} = 0 = \mathcal{J}_{12}^*\varepsilon_{12} + \mathcal{J}_{23}^*\varepsilon_{23} + \mathcal{J}_{31}^*\varepsilon_{31} + \Delta\mathcal{J}\,(\varepsilon_{12} + \varepsilon_{23} + \varepsilon_{31}),$$

de unde se deduce

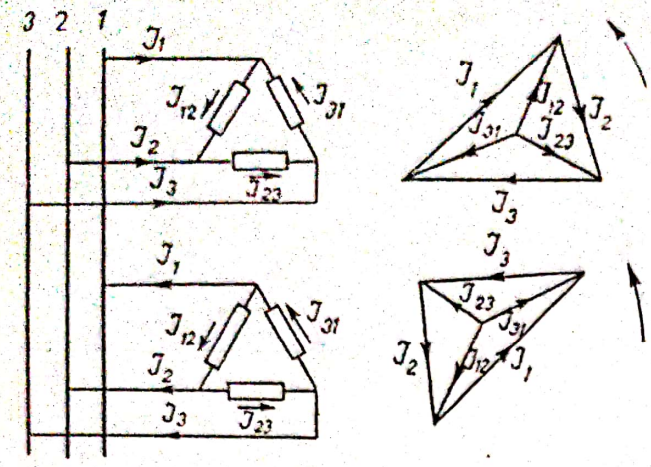
$$\Delta\mathcal{J} = -\frac{\mathcal{J}_{12}^*\varepsilon_{12} + \mathcal{J}_{23}^*\varepsilon_{23} + \mathcal{J}_{31}^*\varepsilon_{31}}{\varepsilon_{12} + \varepsilon_{23} + \varepsilon_{31}}. \qquad (6)$$

Din (6) rezultă pentru $\varepsilon_{12} = \varepsilon_{23} = \varepsilon_{31}$, $\Delta\mathcal{J} = 0$.

Întoducîndu-se pe (6) în (4) se obține

$$\mathcal{J}_{12} = \mathcal{J}_{12}^2 - \frac{\mathcal{J}_{12}^*\varepsilon_{12} + \mathcal{J}_{23}^*\varepsilon_{23} + \mathcal{J}_{31}^*\varepsilon_{31}}{\varepsilon_{12} + \varepsilon_{23} + \varepsilon_{31}} = \frac{(\mathcal{J}_{12}^* - \mathcal{J}_{23}^*)\,\varepsilon_{23} - (\mathcal{J}_{31}^* - \mathcal{J}_{12}^*)\,\varepsilon_{31}}{\varepsilon_{12} + \varepsilon_{23} - \varepsilon_{31}}. \qquad (7)$$

Scanned with OKEN Scanner



19.152. Diagrama curenţilor cînd se schimbă sensul pozitiv la curenţii de linie.

Din diagrama din figura 19.151 rezultă

$$\mathcal{J}_{12}^{*} - \mathcal{J}_{23}^{*} = -\mathcal{J}_2 \qquad \mathcal{J}_{31}^{*} - \mathcal{J}_{12}^{*} = -\mathcal{J}_1 \tag{8}$$

astfel că

$$\mathcal{J}_{12} = \frac{-\mathcal{J}_2 z_{23} + \mathcal{J}_1 z_{31}}{z_{12} + z_{23} + z_{31}}. \tag{9}$$

Cunoscîndu-se curenţii de linie care se măsoară şi dîndu-se impedanţele z_{12}, z_{23}, z_{31} se determină curenţii de fază $\mathcal{J}_{12}$, $\mathcal{J}_{23}$, $\mathcal{J}_{31}$.

Se obţin

$$\mathcal{J}_{23} = \frac{(\mathcal{J}_{23}^{*} - \mathcal{J}_{31}^{*})z_{31} - (\mathcal{J}_{12}^{*} - \mathcal{J}_{23}^{*})z_{12}}{z_{12} + z_{23} + z_{31}} = \frac{-\mathcal{J}_3 z_{31} + \mathcal{J}_2 z_{12}}{z_{12} + z_{23} + z_{31}}$$

$$\mathcal{J}_{31} = \frac{(\mathcal{J}_{31}^{*} - \mathcal{J}_{12}^{*})z_{12} - (\mathcal{J}_{23}^{*} - \mathcal{J}_{31}^{*})z_{23}}{z_{12} + z_{23} + z_{31}} = \frac{-\mathcal{J}_1 z_{12} + \mathcal{J}_3 z_{23}}{z_{12} + z_{23} + z_{31}} \tag{10}$$

În figura 19.152 se prezintă două circuite în conectarea triunghi cu sensurile pozitive ale curenţilor de linie schimbate aşa cum se întîmplă la circuitul de utilizare (sus) şi sursă (jos).

În dreapta, se prezintă diagrama curenţilor în cele două cazuri.

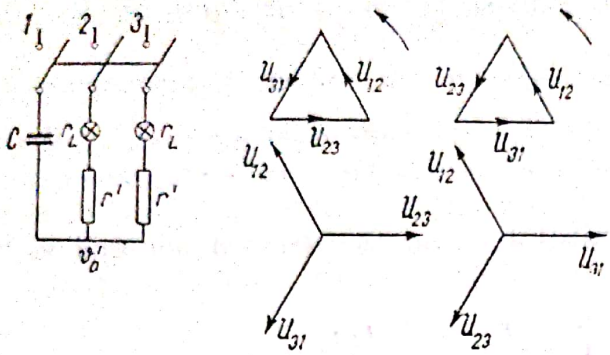
În ambele cazuri s-a considerat $\mathcal{J}_2$ defazat înapoi faţă de $\mathcal{J}_1$ şi $\mathcal{J}_3$ defazat înapoi faţă de $\mathcal{J}_2$, corespunzător tensiunilor de borne $\mathcal{U}_{12}$, $\mathcal{U}_{23}$, $\mathcal{U}_{31}$.

19.5 APLICAŢII CU METODA TENSIUNILOR ECHIVALENTE

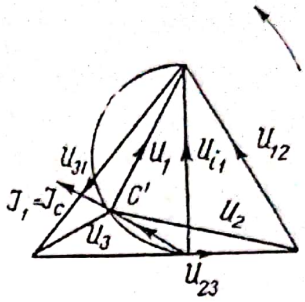
În figura 19.153 stînga, se prezintă bornele unei reţele electrice trifazate. Se cere să se determine felul de succedare al tensiunilor de borne (secvenţa tensiunilor de borne).

În figura 19.153 dreapta, se prezintă cele două posibilităţi de succedare ale tensiunilor.

Scanned with OKEN Scanner



19.153. Determinarea felului de succesiune al fazelor.



19.154. Cazul $\mathcal{U}_{23}$ defazat înapoi față de $\mathcal{U}_{12}$.

Sus apare cazul cînd $\mathcal{U}_{23}$ e defazat înapoi față de $\mathcal{U}_{12}$ cu 120° și $\mathcal{U}_{31}$ înapoi față de $\mathcal{U}_{23}$ cu 120°. Jos apare cazul cînd $\mathcal{U}_{23}$ e defazat înainte față de $\mathcal{U}_{12}$ cu 120° și $\mathcal{U}_{31}$ defazat înainte cu 120° față de $\mathcal{U}_{23}$.

Pentru a se determina felul de succedare al fazelor se introduce un circuit trifazat în conectare stea. În faza 1 se găsește un condensator de capacitate C, iar în celelalte două faze un bec electric cu cîte o rezistență adițională r'.

Admitem cazul cînd $\mathcal{U}_{23}$ e defazat înapoi față de $\mathcal{U}_{12}$ și $\mathcal{U}_{31}$ înapoi față de $\mathcal{U}_{23}$ ca în figura 19.154.

Pentru determinarea tensiunilor de fază folosim metoda tensiunilor echivalente.

Admitem

$$z_1 = \infty \left(\frac{1}{\omega C} = \infty \right).$$

Deoarece fazele 2 și 3 posedă cîte o rezistență de forma $r_L + r' = r$ înseamnă că $\mathcal{I}_{23}$ cade în fază cu $\mathcal{U}_{23}$, iar $\mathcal{U}_{20}$ este egal cu $\mathcal{U}_{30}$.

Tensiunea $\mathcal{U}_{23}$ e împărțită în două părți egale. Ca urmare, tensiunea echivalentă $\mathcal{U}_{i1}$ devine cunoscută.

Spre exemplu, la o rețea trifazată cu $\mathcal{U}_{12} = 110^{V}$ și cu un bec de 60 W se obține

$$I_{bec} = \frac{60}{110} = 0{,}545 \text{ A}, \quad r_L = \frac{110}{0{,}545} = 202\ \Omega, \quad r = r_L + r'$$

impedența z_{i_1} este

$$z_{i_1} = \frac{z_2 z_3}{z_2 + z_3} = \frac{r^2}{2r} = \frac{r}{2}.$$

La tensiunea $\mathcal{U}_{i_1}$ se găsește conectată reactanța capacitivă $-j\frac{1}{\omega C}$ și rezistența $\frac{r}{2}$.

Căderile $\mathcal{I}_1 \frac{r}{2}$ și $-\mathcal{I}_1 j \frac{1}{\omega C}$ sînt decalate cu $\frac{\pi}{2}$, iar curentul $\mathcal{I}_1$ e defazat înaintea tensiunii $-\mathcal{I}_1 j \frac{1}{\omega C}$. În diagramă s-a construit un semicerc pe care se găsește fixat punctul O'. În felul acesta s-au fixat $\mathcal{U}_1$ și $\mathcal{I}_1 z_{i_1}$. Rămîne să se determine capacitatea C și rezistența r' pentru ca să se realizeze punctul O'.

Din diagramă U_2 devine cunoscut.

Deoarece curentul I_2 dorim să fie egal cu curentul nominal al becului electric, se obține

$$\frac{U_2}{0{,}545} = r = r' + r_L,$$

de unde se determină r'.

Tot din diagramă se cunoaște tensiunea $I_1 z_{i_1} = I_1 \frac{r}{2} = U'$ de unde se determină I_1, deoarece r este cunoscut.

În sfîrșit, din $U_1 = I_1 \frac{1}{\omega C}$ în care U_1 este cunoscut din diagramă se obține capacitatea C.

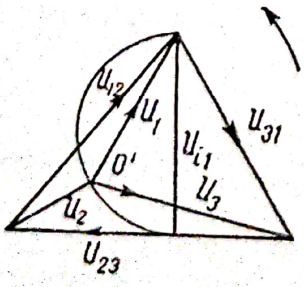
Dacă într-adevăr tensiunea de borne $\mathcal{U}_{23}$ este defazată înapoi cu 120° față de $\mathcal{U}_{12}$, atunci se obțin tensiunile din diagramă din figura 19.154.

Deoarece $\mathcal{U}_3 < \mathcal{U}_2$ înseamnă că numai becul din faza 2 va lumina normal. În felul acesta se verifică că într-adevăr sensul de succedare al fazelor coincide cu cel fixat anterior. Cînd însă becul din faza a treia arde normal și becul din faza doua arde mai slab, înseamnă că felul de succedare al fazelor nu corespunde cu cel fixat mai sus. Înseamnă că $\mathcal{U}_{23}$ e defazat înainte față de $\mathcal{U}_{12}$.

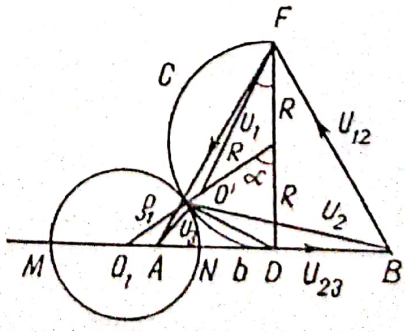
Se poate păstra aceeași diagramă din figura 19.154 numai că se introduce în stînga $\mathcal{U}_{12}$ și în dreapta $\mathcal{U}_{31}$ cu sensuri inverse. În diagrama din figura 19.155 se prezintă cazul cînd $\mathcal{U}_{23}$ e defazat înainte față de $\mathcal{U}_{12}$. Se remarcă că tensiunile $\mathcal{U}_2$ și $\mathcal{U}_3$ sînt și ele inverse față de cele din diagrama 19.154.

Se cere ca raportul $\frac{U_2}{U_3}$ să fie maximal în diagrama din figura 19.154.

Se cere să se fixeze punctul O' așa fel ca raportul $\frac{U_2}{U_3}$ să fie maxim (v. fig. 19.156).



19.155. Cazul cînd $\mathcal{U}_{23}$ este defazat înainte față de $\mathcal{U}_{12}$.



19.156. Se stabilește raportul $\frac{U_2}{U_3}$ max.

Cînd raportul $\frac{U_2}{U_3} = \text{const.}$, punctul O' se mișcă pe cercul Appolonius cu centrul în O_1 și raza ρ_1. Pe măsură ce raportul $\frac{U_2}{U_3}$ obține valori din ce în ce mai mari, raza cercului ρ_1 se micșorează și O_1 se apropie de A.

Din aceste cercuri unul e tangent la cercul C dat. Punctul O' se va găsi în același timp atît pe cercul Appolonius cît și pe cercul C.

Se cere să se determine ρ_1 și centrul O_1.

Pentru cele două cercuri tangente, segmentul $\rho_1 + R$ trece prin O'. Fie $\overline{AD} = b$.

Se obține $(\rho_1 + R)^2 = (\overline{O_1A} + b)^2 + R^2$, de unde se deduce

$$\rho_1^2 - \overline{O_1A}^2 = b^2 + 2\overline{O_1A}b - 2\rho_1 R. \tag{1}$$

Se mai formează $\frac{\overline{NB}}{\overline{NA}} = \frac{\overline{MB}}{\overline{MA}}$

$$\frac{2b - (\rho_1 - \overline{O_1A})}{\rho_1 - \overline{O_1A}} = \frac{\rho_1 + \overline{O_1A} + 2b}{\rho_1 + \overline{O_1A}} \tag{2}$$

$$2b\ \overline{O_1A} = \rho_1^2 - \overline{O_1A}^2.$$

Din (1) și (2) se deduc $b^2 = 2\rho_1 R$

$$\rho_1 = \frac{b}{2R}.$$

Pe de altă parte se obțin $\cos\alpha$ și $\cos\frac{\alpha}{2}$ în felul următor:

Din $(\rho_1 + R)\cos\alpha = R$ se obține $\cos\alpha = \frac{R}{\rho_1 + R}$.

Se formează

$$\cos\alpha = \cos\left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\alpha}{2}\right) = 2\cos^2\frac{\alpha}{2} - 1$$

$$\cos^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2}(1 + \cos\alpha) = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{R}{\rho_1 + R}\right)$$

$$\cos\frac{\alpha}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{\frac{\rho_1 + 2R}{\rho_1 + R}}$$

$$2R\cos\frac{\alpha}{2} = U_1 = \frac{2R}{\sqrt{2}}\sqrt{\frac{\rho_1 + 2R}{\rho_1 + R}}$$

$$U_1^2 = \frac{4R^2}{2}\frac{\rho_1 + 2R}{\rho_1 + R}$$

Scanned with OKEN Scanner

Fie tensiunea

$$U = \overline{DO'}.$$

Se obţine

$$U^2 = (2R)^2 - U_1^2 = (2R)^2 - \frac{4R^2}{2}\,\frac{\rho_1 + 2R}{\rho_1 + R} = 4R^2\,\frac{\rho_1}{2(\rho_1 + R)}.$$

Ca urmare

$$\frac{U^2}{U_1^2} = \frac{\rho_1}{\rho_1 + 2R}, \quad \frac{U}{U_1} = \sqrt{\frac{\rho_1}{\rho_1 + 2R}}.$$

Din

$$U_{12}\frac{\sqrt{3}}{2} = 2R, \quad \frac{U_{12}}{2} = b, \quad U_{12}^2\,\frac{3}{4} = 4R^2$$

în care

$$U_1 = \frac{I}{\omega C}; \quad U = Ir^*, \quad r^* = \frac{r}{2};$$

rezultă

$$\frac{U}{U_1} = \frac{r^*}{\frac{1}{\omega C}} = \sqrt{\frac{\frac{b^2}{2R^2}}{\frac{b^2}{2R} + 2R}} = \sqrt{\frac{b^2}{b^2 + 4R^2}} = \sqrt{\frac{\frac{U_{12}^2}{4}}{U_{12}^2}} = \frac{1}{2}$$

astfel că $\frac{1}{\omega C} = 2r^* = r$.

În figura 19.157 se reprezintă o linie trifazată. Se cere să se determine experimental capacitatea faţă de pămînt C_0 pe cale experimentală. Capacitatea între conductoare C_{12}, C_{23}, C_{31} este considerată la sfîrşitul liniei ca un circuit trifazat cu reactanţă în conectare triunghi.

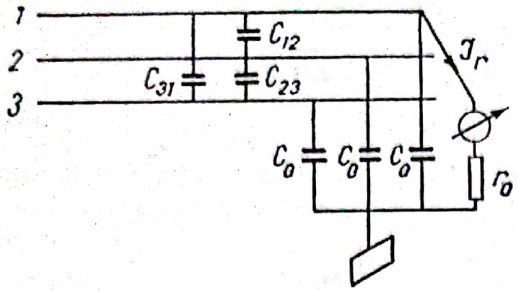
Capacităţile C_0 faţă de pămînt, formează o conectare de reactanţe în stea.

În faza întîi în paralel cu C_0 se găseşte conectat un ampermetru în serie cu o rezistenţă r_0.

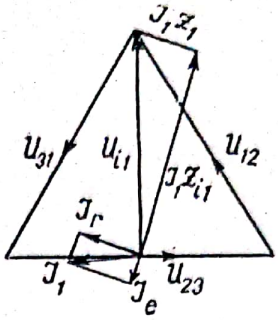
Din cele ce urmează se va vedea că atunci cînd r_0 este mic se obţine pentru curentul electric I_r o valoare numerică exprimată în forma

$$I_r = \sqrt{3}\,U_{12}\omega C_0, \tag{3}$$

Scanned with OKEN Scanner



19.157. Determinarea experimentală a capacităţii C_0.



19.158. Diagrama tensiunilor şi a curenţilor electrici.

Spre exemplu pentru:

$$U_{12} = 380^{\text{V}}, \quad \omega = 314, \quad C_0 \cong 0{,}05 \cdot 10^{-6}\text{F}$$

se obţine

$$I_r = 0{,}0103\ \text{A},$$

ceea ce se poate măsura cu un ampermetru. Se constată din (3) că prin măsurarea curentului electric I_r şi a tensiunii de borne U_{12} se determină capacitatea C_0.

Pentru determinarea curentului $\mathcal{I}_r$ considerăm circuitul în conectare stea ca un circuit trifazat nesimetric în conectare stea.

Ne folosim de metoda tensiunilor echivalente.

Se obţine

$$\mathcal{U}_{i_1} = \mathcal{I}_1 (z_{i_1} + z_1) = \mathcal{I}_1 z_{1e} \tag{4}$$

în care

$$z_{1e} = z_{i_1} + z_1. \tag{5}$$

Pentru curentul $\mathcal{I}_r$ se formează

$$\frac{\mathcal{U}_{i_1}}{z_{1e}} z_1 = \mathcal{I}_r r_0 \tag{6}$$

(vezi diagrama din figura 19.158) de unde se deduce

$$\mathcal{I}_r = \frac{\mathcal{U}_{i1}}{z_{1e}} \cdot \frac{z_1}{r_0}, \tag{7}$$

în care

$$z_{i_1} = \frac{z_2 z_3}{z_2 + z_3} = -\mathrm{j}\,\frac{1}{2\omega C_0} \tag{8}$$

$$z_1 = \frac{z_r \cdot z_c}{z_r + z_c} = \frac{r_0}{(r_0\omega C_0)^2 + 1} - \mathrm{j}\,\frac{r_0^2\omega C_0}{(r_0\omega C_0)^2 + 1} \tag{9}$$

$$z_r = r_0, \quad z_c = -\mathrm{j}\,\frac{1}{\omega C_0}.$$

Admitem că

$$r_0\omega C_0 \cong \frac{1}{100}.$$

Spre exemplu pentru $C_0^* = 0{,}125\ \mu\mathrm{F/km}$ se obține pentru $l = 500$ m: $C_0 = 0{,}0625 \cdot 10^{-6}$ F.

Se obține pentru $r_0 = 637\ \Omega$ și $C_0 = 0{,}05 \cdot 10^{-6}$ F $(r_0\omega C_0)^4 = 10^{-4}$ care e neglijabil față de 1.

Ca urmare

$$z_1 = r_0 - \mathrm{j}\, r_0^2\omega C_0. \tag{10}$$

Pe de altă parte din

$$z_1^2 = r_0^2 + (r_0^2\omega C_0)^2 = r_0^2(1 + r_0^2\omega^2 C_0^2) \cong r_0^2.$$

Rezultă

$$z_1 = r_0\, \mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi_1}$$

$$\operatorname{tg}\varphi_1 = -\, r_0\omega C_0.$$

Determinarea impedanței z_{1e}

Avem

$$z_{1e} = r_0 - \mathrm{j}\, r_0^2\,\omega C_0 - \mathrm{j}\,\frac{1}{2\omega C_0} = r_0 - \mathrm{j}\,\frac{2r_0^2\omega^2 C_0^2 + 1}{2\omega C_0} \cong r_0 - \mathrm{j}\,\frac{1}{2\omega C_0}$$

în care $2r_0^2\omega^2 C_0^2$ e neglijabil față de 1.

Din

$$z_{1e}^2 = r_0^2 + \frac{1}{4\omega^2 C_0^2} = \frac{4r_0^2\omega^2 C_0^2 + 1}{4\omega^2 C_0^2} \cong \frac{1}{4\omega^2 C_0^2}$$

se obține

$$z_{1e} = \frac{1}{2\omega C_0}\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi_{1e}} \qquad \operatorname{tg}\varphi_{1e} = -\,\frac{1}{2\omega C_0 r_0}.$$

$\mathcal{I}_r$ din (7) ia forma

$$\mathcal{I}_r = I_r\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi_r} = \frac{U_{i1}}{r_0} \cdot 2 \cdot \omega C_0 r_0\, \mathrm{e}^{\mathrm{j}(\varphi_1 - \varphi_{1e})}$$

Scanned with OKEN Scanner

de unde se obține pentru valoarea efectivă a curentului I_r

$$I_r = 2U_{f1}\omega C_0 = \sqrt{3}U_{12}\omega C_0$$

independent de r_0.

Deoarece conectarea reactanțelor $-\mathrm{j}\frac{1}{\omega C_{12}}$ e efectuată în triunghi, în caz cînd ele sînt egale se pot ușor înlocui cu alte reactanțe conectate în stea ca să apară aceiași curenți de linie la aceleași tensiuni de borne (v. diagrama din fig. 19.159).

Se formează

$$U_{12} = I_{12}\frac{1}{\omega C_{12}} = \frac{I_1}{\sqrt{3}}\frac{1}{\omega C_{12}}$$

$$U_1 = I_1\frac{1}{\omega C_1} \qquad U_{12} = \sqrt{3}U_1 = \sqrt{3}I_1\frac{1}{\omega C'}$$

de unde se deduce

$$\frac{I_1}{\sqrt{3}}\frac{1}{\omega C_{12}} = \sqrt{3}I_1\frac{1}{\omega C'}$$

astfel că $C' = 3C_{12}$.

Ca urmare capacitatea totală pe fază C la un circuit trifazat simetric în conectare stea se reprezintă în forma

$$C = C_0 + 3C_{12}.$$

Măsurîndu-se tensiunile și curenții electrici la începutul liniei, cînd nu e încărcată, se obține capacitatea totală C pe fază.

Prin determinarea separată a capacității C_0 se deduce C_{12}.

Considerăm cazul cînd r_0 din fig. 19.157 variază de la infinit la zero.

Se cere să se determine impedanța z_1, z_{1e} și poziția centrului O' din triunghiul format de tensiunile înlănțuite $\mathcal{U}_{12}$, $\mathcal{U}_{23}$, $\mathcal{U}_{31}$.

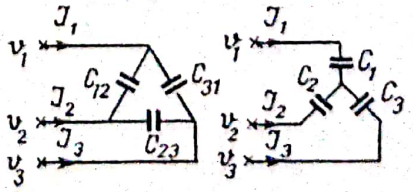
Din

$$\frac{1}{r_0} = y_r$$

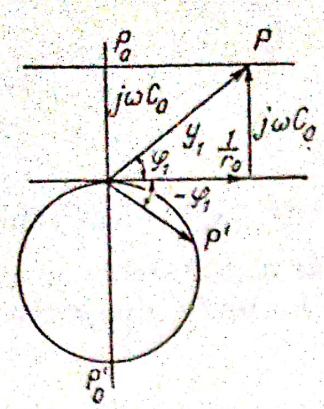
$$\mathrm{j}\omega C_0 = y_c$$

rezultă

$$y_1 = y_r + y_c = \frac{1}{r_0} + \mathrm{j}\omega C_0 = g_1 - \mathrm{j}\,b_1$$



19.159. Transfigurarea unui circuit trifazat simetric din conectare triunghi în conectare stea.



19.160. Locul geometric al impedanței z_1.

în care

$$g_1 = \frac{1}{r_0}, \quad b_1 = -\omega C_0$$

avem $b_1 =$ constant și g_1 variabil. În figura 19.160 se reprezintă admitanța y_1 cu vîrful pe dreapta $\overline{P_0P}$. Pentru $r_0 = \infty$, $y_{1\infty}$ e în P_0 și pentru $r_0 = 0$, $y_{10} = \infty$.

Impedanța $z_1 = \frac{1}{y_1}$ se deplasează pe un cerc cu vîrful în P'. Pentru $r_0 = \infty$ avem $z_{1\infty} = \overline{OP'_0}$ și pentru $r_0 = 0$ apare $z_{10} = 0$.

Din

$$r_1^2 + x_1^2 = \frac{1}{g_1^2 + b_1^2} \qquad \frac{x_1}{b_1} = \frac{r_1}{g_1}$$

se obține ecuația cercului în forma

$$r_1^2 + x_1^2 - \frac{x_1}{b_1} = 0$$

sau

$$r_1^2 + \left(x_1 - \frac{1}{2b_1}\right)^2 = \frac{1}{(2b_1)^2} = \rho_1^2$$

în care $2\rho_1$ reprezintă diametrul cercului

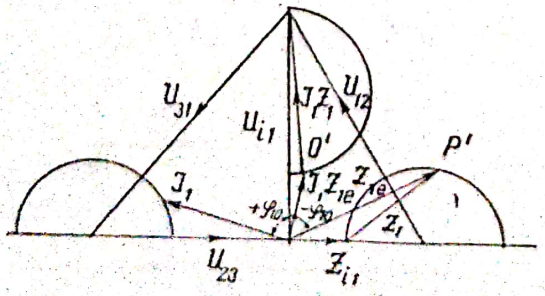
$$2\rho_1 = \frac{1}{\omega C_0} = \frac{1}{b_1}.$$

S-a obținut în (8) $z_{i_1} = -\mathrm{j}\frac{1}{2\omega C_0}$. Se ia în sensul lui $\mathcal{U}_{i_1}$ axa reală. Ca urmare, z_{i_1} e defazat cu $\frac{\pi}{2}$ înapoi față de axa reală. S-a văzut că vîrful lui z_1 se deplasează pe un cerc. În figura 19.161 sînt trecute z_{i_1} și z_1.

Ca urmare, impedanța z_{1e} se mișcă pe un cerc.

Din

$$\mathcal{J}_1 = \frac{\mathcal{U}_{i_1}}{z_{1e}} = \frac{U_{i_1}}{z_{1e}} e^{-\mathrm{j}\varphi_{1e}}$$



19.161. Diagrama tensiunilor $\mathcal{J}_1 z_{1e}$ și $\mathcal{J}_1 z_1$

se constată că $\mathcal{J}_1$ se deplasează pe un alt cerc construit în stînga. Se constată că $\mathcal{J}_1 z_{1e}$ e defazat înapoi față de $\mathcal{J}_1$ cu $\frac{\pi}{2}$ și cum z_{1e} e constant, rezultă că punctul O' se deplasează pe un cerc ca în figură.

Din figură se vede cum variază $\mathcal{J}_1 z_1$ cu originea în O'.

Avem

$$\mathcal{J}_1 z_1 = \mathcal{U}_1.$$

Cînd $\mathcal{U}_1$ devine cunoscut se determină $\mathcal{U}_2$ și $\mathcal{U}_3$.

În figura 19.162 se prezintă o linie trifazată, formată din 3 cabluri subterane conectate la bornele unui generator trifazat.

În figura 19.162 se consideră linia trifazată în mersul în gol.

Se cere să se determine inductivitatea L a bobinei de stingere (tip Petersen) așa fel, ca atunci cînd unul din cabluri e străpuns și faza respectivă obține un scurtcircuit, curentul electric din acea fază să devină nul.

Să se determine și ceilalți curenți electrici cînd una din faze se găsește în scurtcircuit.

În figura 19.163 se prezintă tensiunile induse și tensiunile înlănțuite ale generatorului.

Avem

$$\mathcal{U}_{g1} = U_{g1}\, e^{j\,0°}; \quad \mathcal{U}_{g2} = U_{g2}\, e^{-j\,120°}; \quad \mathcal{U}_{g3} = U_{g3}\, e^{-j\,240°}$$

$$\mathcal{U}_{12} = U_{12}\, e^{j\,30°}; \quad \mathcal{U}_{23} = U_{23}\, e^{-j\,90°}; \quad \mathcal{U}_{31} = U_{31}\, e^{j\,150°}$$

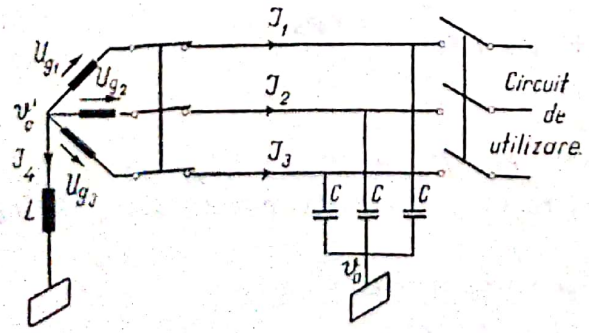
Impedanțele cablurilor sînt egale.

Avem

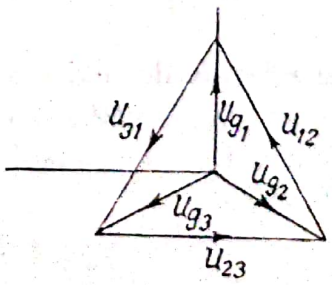
$$z_1 = z_2 = z_3 = z = \sqrt{r^2 + x_c^2}\; e^{-j\varphi}, \; z_4 = \sqrt{r_4^2 + x_L^2}\; e^{j\varphi_4}$$

în care

$$x_c = -\frac{1}{\omega C} \qquad \operatorname{tg}\varphi = -\frac{x_c}{r} \qquad \operatorname{tg}\varphi_4 = \frac{x_L}{r_4}.$$



19.162. Linia trifazată formată din 3 cabluri subterane conectate la bornele unui generator.



19.163. Tensiunile trifazate în planul complex.

Pentru fiecare fază se obține

$$\mathcal{U}_{g1} = \mathcal{I}_1 z_1 + \mathcal{V}_0 - \mathcal{V}_0'$$
$$\mathcal{U}_{g2} = \mathcal{I}_2 z_2 + \mathcal{V}_0 - \mathcal{V}_0'$$
$$\mathcal{U}_{g3} = \mathcal{I}_3 z_3 + \mathcal{V}_0 - \mathcal{V}_0'$$
$$\mathcal{I}_1 + \mathcal{I}_2 + \mathcal{I}_3 + \mathcal{I}_4 = 0 \quad \mathcal{V}_0' - \mathcal{V}_0 = \mathcal{I}_4 z_4.$$

Din

$$\mathcal{U}_{g1} z_2 z_3 + \mathcal{U}_{g2} z_3 z_1 + \mathcal{U}_{g3} z_1 z_2 =$$
$$= - \mathcal{I}_4 z_1 z_2 z_3 - \mathcal{I}_4 z_4 (z_2 z_3 + z_3 z_1 + z_1 z_2)$$

se obține

$$\mathcal{I}_4 z_4 = - \frac{\mathcal{U}_{g1} z_2 z_3 + \mathcal{U}_{g2} z_3 z_1 + \mathcal{U}_{g3} z_1 z_2}{z_1 z_2 + z_2 z_3 + z_3 z_1 + \frac{z_1 z_2 z_3}{z_4}}$$

$$\mathcal{I}_1 z_1 = \frac{(\mathcal{U}_{g1} - \mathcal{U}_{g2}) z_3 z_1 + (\mathcal{U}_{g1} - \mathcal{U}_{g3}) z_1 z_2 + \mathcal{U}_{g1} \frac{z_1 z_2 z_3}{z_4}}{z_1 z_2 + z_2 z_3 + z_3 z_1 + \frac{z_1 z_2 z_3}{z_4}}$$

$$\mathcal{I}_1 = \frac{\mathcal{U}_{12} z_3 - \mathcal{U}_{31} z_2 + \mathcal{U}_{g1} \frac{z_2 z_3}{z_4}}{z_1 z_2 + z_2 z_3 + z_3 z_1 + \frac{z_1 z_2 z_3}{z_4}}$$

$$\mathcal{I}_2 = \frac{\mathcal{U}_{23} z_1 - \mathcal{U}_{12} z_3 + \mathcal{U}_{g2} \frac{z_3 z_1}{z_4}}{z_1 z_2 + z_2 z_3 + z_3 z_1 + \frac{z_1 z_2 z_3}{z_4}}$$

$$\mathcal{I}_3 = \frac{\mathcal{U}_{31} z_2 - \mathcal{U}_{23} z_1 + \mathcal{U}_{g3} \frac{z_1 z_2}{z_4}}{z_1 z_2 + z_2 z_3 + z_3 z_1 + \frac{z_1 z_2 z_3}{z_4}}.$$

În relațiile de mai sus avem

$$\mathcal{U}_{12} + \mathcal{U}_{23} + \mathcal{U}_{31} = 0 \quad \text{și} \quad \mathcal{U}_{g1} + \mathcal{U}_{g2} + \mathcal{U}_{g3} = 0.$$

Pentru linia la mersul în gol, rezultă din relația pentru $\mathcal{I}_4 z_4$ că $\mathcal{I}_4 = 0$. Se obține

$$\mathcal{I}_4 z_4 = - \frac{(\mathcal{U}_{g1} + \mathcal{U}_{g2} + \mathcal{U}_{g3}) z^2}{3z^2 + \frac{z^3}{z_4}} = 0.$$

Scanned with OKEN Scanner

Pentru curenții $\mathcal{I}_1$, $\mathcal{I}_2$, $\mathcal{I}_3$ se obține pentru linia în mers în gol

$$\mathcal{I}_1 = \frac{3\,\mathcal{U}_{g1} + \mathcal{U}_{g1}\dfrac{z}{z_4}}{3z + \dfrac{z^2}{z_4}} = \frac{\mathcal{U}_{g1}}{z};\quad \mathcal{I}_2 = \frac{\mathcal{U}_{g2}}{z};\quad \mathcal{I}_3 = \frac{\mathcal{U}_{g3}}{z}.$$

Considerăm cazul cînd cablul din faza 1 e străpuns și apare faza 1 în scurtcircuit.

În figura 19.164 se prezintă cazul cînd cablul din faza 1 e străpuns și apar curenții $\mathcal{I}_{1k}$, $\mathcal{I}_{2k}$, $\mathcal{I}_{3k}$, $\mathcal{I}_{4k}$.

Se cere să se determine inductivitatea L așa fel ca $\mathcal{I}_{1k} = 0$.

Prin punerea în scurtcircuit a fazei 1 se consideră pentru faza 1 o impedanță z_1 foarte mică diferită de z.

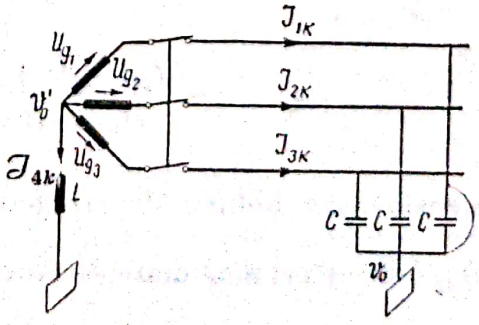
Se obține

$$\mathcal{I}_{1k} = \frac{(\mathcal{U}_{12} - \mathcal{U}_{31})z + \mathcal{U}_{g1}\dfrac{z^2}{z_4}}{z_1\left(2z + \dfrac{z^2}{z_4}\right) + z^2} = \frac{\mathcal{U}_{g1}\left(3z + \dfrac{z^2}{z_4}\right)}{z_1\left(2z + \dfrac{z^2}{z_4}\right) + z^2}$$

$$\mathcal{I}_{2k} = \frac{\mathcal{U}_{23}z_1 - \mathcal{U}_{12}z + \mathcal{U}_{g2}\dfrac{zz_1}{z_4}}{z_1\left(2z + \dfrac{z^2}{z_4}\right) + z^2};$$

$$\mathcal{I}_{3k} = \frac{\mathcal{U}_{31}z - \mathcal{U}_{23}z_1 + \mathcal{U}_{g3}\dfrac{zz_1}{z_4}}{z_1\left(2z + \dfrac{z^2}{z_4}\right) + z^2};$$

$$\mathcal{I}_{4k}z_4 = -\frac{(\mathcal{U}_{g1}z^2 + zz_1\mathcal{U}_{g2} + \mathcal{U}_{g3})}{z_1\left(2z + \dfrac{z^2}{z_4}\right) + z^2} = -\frac{(\mathcal{U}_{g1}z^2 - zz_1)}{z_1\left(2z + \dfrac{z^2}{z_4}\right) + z^2}.$$



19.164. Cablul din faza 1 e străpuns.

Se verifică uşor că

$$\mathcal{I}_{1k} + \mathcal{I}_{2k} + \mathcal{I}_{3k} = -\mathcal{I}_{4k}.$$

Punîndu-se condiţia ca $\mathcal{I}_{1k} = 0$, se creează condiţia

$$3\varepsilon + \frac{\varepsilon^2}{\varepsilon_4} = 0$$

astfel că

$$3\varepsilon_4 = -\varepsilon$$

adică

$$3\varepsilon_4 e^{j\varphi_4} = -z e^{j\varphi} = z e^{j(\varphi + 180°)}$$

$$3z_4 = z \qquad \varphi_4 = \varphi + 180°$$

se vede că pentru $\varphi = -90°$ (reactanţa capacitivă) se obţine $\varphi_4 = 90°$ (reactanţa inductivă).

În realitate există şi rezistenţe electrice, ceea ce face ca suma $3z + \frac{\varepsilon^2}{\varepsilon_4}$ să nu devină exact nulă. Neglijînd rezistenţele şi luîndu-se în consideraţie determinarea lui z_4 din $z_4 = \omega L$ în care se ia $z = \frac{1}{\omega C}$ se deduce

$$L = \frac{1}{3\omega^2 C}$$

pentru $3\varepsilon_4 = -\varepsilon$ se obţine $\mathcal{I}_{2k}$, $\mathcal{I}_{3k}$, $\mathcal{I}_{4k}$ în formele

$$\mathcal{I}_{2k} = \frac{(\mathcal{U}_{23} - 3\mathcal{U}_{g2})\varepsilon_1 - \mathcal{U}_{12}\varepsilon}{\varepsilon(\varepsilon - \varepsilon_1)}$$

$$\mathcal{I}_{3k} = \frac{\mathcal{U}_{31}\varepsilon - (\mathcal{U}_{23} + 3\mathcal{U}_{g3})\varepsilon_1}{\varepsilon(\varepsilon - \varepsilon_1)}$$

$$\mathcal{I}_{4k} = \frac{-\mathcal{U}_{g1}(-3\varepsilon + 3\varepsilon_1)}{\varepsilon(\varepsilon - \varepsilon_1)} = \frac{3\mathcal{U}_{g1}}{\varepsilon}.$$

Cînd se dimensionează bobina de stingere aşa fel ca să avem $\varepsilon_4 = -\frac{\varepsilon}{3}$, rezultă că $\mathcal{I}_{4k}$ e de 3 ori mai mare ca curentul capacitiv exprimat prin $\frac{\mathcal{U}_{g1}}{\varepsilon}$.

Scanned with OKEN Scanner

20. MĂSURAREA PUTERII ACTIVE ȘI REACTIVE LA CIRCUITE TRIFAZATE ÎN CONECTARE STEA

20.1. PUTEREA ACTIVĂ LA CIRCUITE TRIFAZATE ÎN CONECTARE STEA

Într-un circuit trifazat în conectare stea, puterea momentană totală e

$$p = (V_1 - V_0')\, i_1 + (V_2 - V_0')\, i_2 + (V_3 - V_0')\, i_3 = V_1 i_1 + V_2 i_2 + V_3 i_3, \quad (1)$$

deoarece avem

$$i_1 + i_2 + i_3 = 0.$$

Puterea totală în circuitul trifazat în conectare stea e independentă de potențialul V_0' (v. fig. 20.165).

Se formează puterea mijlocie în raport cu o perioadă

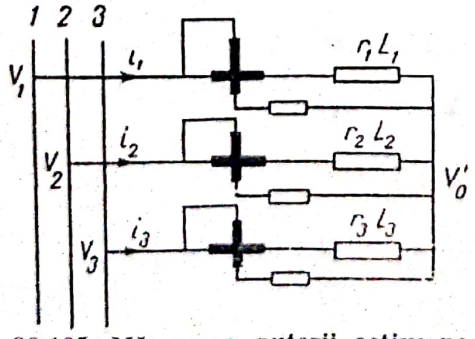
$$P = \frac{1}{T}\int_0^T u_1 i_1 \,\mathrm{d}\, t + \frac{1}{T}\int_0^T u_2 i_2 \,\mathrm{d}\, t + \frac{1}{T}\int_0^T u_3 i_3 \,\mathrm{d}\, t.$$

Se obține

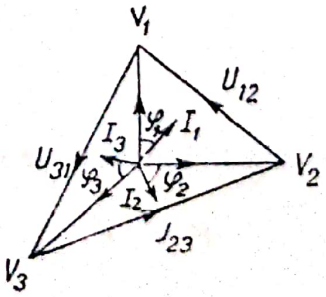
$$P = U_1 I_1 \cos \varphi_1 + U_2 I_2 \cos \varphi_2 + U_3 I_3 \cos \varphi_3. \quad (2)$$

În figura 20.166 se prezintă diagrama tensiunilor și a curenților electrici cu defazările între tensiunile de fază și curenții de fază.

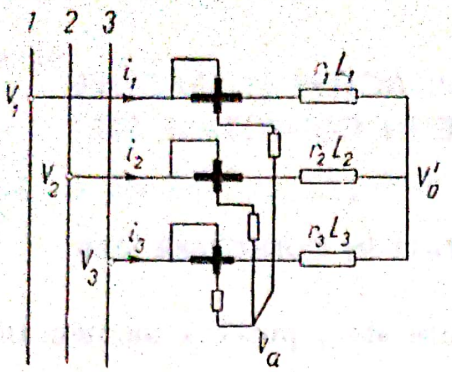
Deoarece puterea totală este independentă de potențialul V_0' se iau în figura 20.167 circuitele de tensiune ale wattmetrelor cu un punct neutru exterior care va avea un potențial V_a diferit de V_0', deoarece circuitul de utilizare este nesimetric și circuitele de tensiune ale celor trei wattmetre sînt simetrice.



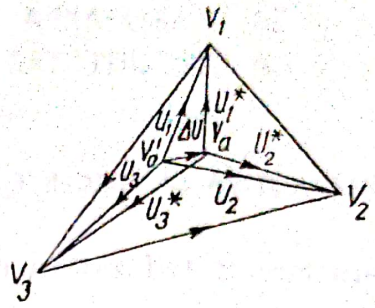
20.165. Măsurarea puterii active pe fiecare fază.



20.166. Diagrama curenților și a tensiunilor pe fază.



20.167. Circuitele de tensiuni ale wattmetrelor posedă un punct neutru separat de punctul neutru al circuitului.



20.168. Diagrama tensiunilor.

În figura 20.168 se vede cît este de mare diferența de potențial între punctele neutre exprimate prin $V_a - V_0' = \Delta U$.

Se obține

$$V - V_0' = V_a - V_0' + V_1 - V_a$$

sau

$$U_1 = U_1^* + \Delta U.$$

Puterea totală momentană este

$$p = (V_1 - V_a)\, i_1 + (V_2 - V_a)\, i_2 + (V_3 - V_a)\, i_3 = V_1 i_1 + V_2 i_2 + V_3 i_3, \quad (3)$$

iar puterea mijlocie în raport cu o perioadă măsurată de cele trei wattmetre este

$$P = U_1^* I_1 \cos \varphi_1^* + U_2^* I_2 \cos \varphi_2^* + U_3^* I_3 \cos \varphi_3^*. \quad (4)$$

Din relațiile tensiunilor în formă complexă

$$\begin{aligned} \mathcal{U}_1 &= \Delta\mathcal{U} + \mathcal{U}_1^* \\ \mathcal{U}_2 &= \Delta\mathcal{U} + \mathcal{U}_2^* \\ \mathcal{U}_3 &= \Delta\mathcal{U} + \mathcal{U}_3^* \end{aligned} \quad (5)$$

se obține prin înmulțirea lor cu $\overline{\mathcal{I}}_1, \overline{\mathcal{I}}_2, \overline{\mathcal{I}}_3$

$$P + \mathrm{j}\, P_r = \Delta\mathcal{U}(\mathcal{I}_1 + \mathcal{I}_2 + \mathcal{I}_3) + P + \mathrm{j}\, P_r, \quad (6)$$

deoarece

$$\mathcal{I}_1 + \mathcal{I}_2 + \mathcal{I}_3 = 0$$

avem

$$P = U_1 I_1 \cos \varphi_1 + U_2 I_2 \cos \varphi_2 + U_3 I_3 \cos \varphi_3 =$$
$$= U_1^* I_1 \cos \varphi_1^* + U_2^* I_2 \cos \varphi_2^* + U_3^* I_3 \cos \varphi_3^* \quad (7)$$

$$P_r = U_1 I_1 \sin \varphi_1 + U_2 I_2 \sin \varphi_2 + U_3 I_3 \sin \varphi_3 =$$
$$= U_1^* I_1 \sin \varphi_1^* + U_2^* I_2 \sin \varphi_2^* + U_3^* I_3 \sin \varphi_3^*. \quad (8)$$

S-a relevat că puterea aparentă în forma complexă se exprimă cu $\overline{\mathcal{U}}$ conjugat în forma $\mathcal{I}\overline{\mathcal{U}}$. În cazul acesta pentru a nu se mai scrie încă odată relațiile (5) cu tensiuni conjugate, s-a folosit expresia puterii aparente cu $\overline{\mathcal{I}}$ conjugat. Problema cere să se arate că atît tensiunile $\mathcal{U}_1$, $\mathcal{U}_2$, $\mathcal{U}_3$ cît și tensiunile $\mathcal{U}_1^*$, $\mathcal{U}_2^*$, $\mathcal{U}_3^*$ produc aceeași putere totală activă respectiv reactivă.

Metoda celor două wattmetre

Deoarece potențialul V_a poate fi luat arbitrar, se constată că dacă e făcut egal cu V_3, se economisește un wattmetru.

În figura 20.169 se prezintă schema celor doi wattmetri. Potențialul neutru V_a este făcut egal cu V_3.

Din diagrama tensiunilor se obține

$$\mathcal{U}_1 = \mathcal{U}_3 - \mathcal{U}_{31}$$
$$\mathcal{U}_2 = \mathcal{U}_3 + \mathcal{U}_{23} \quad (9)$$
$$\mathcal{U}_3 = \mathcal{U}_3 + 0,$$

în care $\mathcal{U}_3$ din sumă reprezintă pe $\Delta\mathcal{U}$.

Înmulțind relațiile (9) cu $\overline{\mathcal{I}}_1$, $\overline{\mathcal{I}}_2$, $\overline{\mathcal{I}}_3$, se obține

$$P + \mathrm{j}\, P_r = \mathcal{U}_3(\overline{\mathcal{I}}_1 + \overline{\mathcal{I}}_2 + \overline{\mathcal{I}}_3) + P + \mathrm{j}\, P_r \quad (10)$$

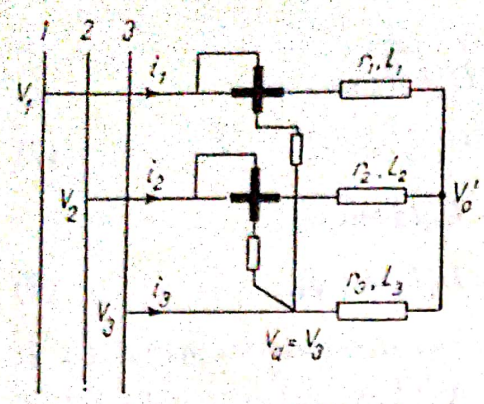
deoarece $\overline{\mathcal{I}}_1 + \overline{\mathcal{I}}_2 + \overline{\mathcal{I}}_3 = 0$.

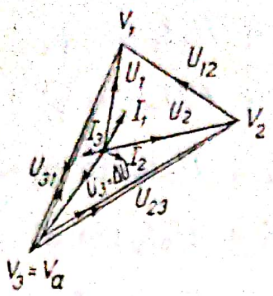
Avem

$$P = U_1 I_1 \cos \varphi_1 + U_2 I_2 \cos \varphi_2 + U_3 I_3 \cos \varphi_3 =$$
$$= U_{13} I_1 \cos \varphi_{13} + U_{23} I_2 \cos \varphi_{23} \quad (11)$$

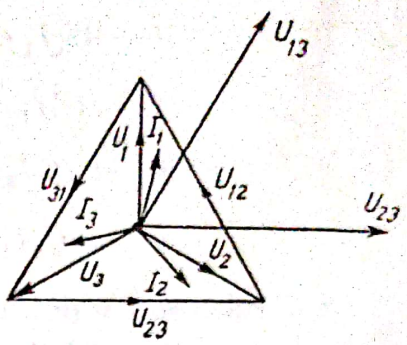
$$P_r = U_1 I_1 \sin \varphi_1 + U_2 I_2 \sin \varphi_2 + U_3 I_3 \sin \varphi_3 =$$
$$= U_{13} I_1 \sin \varphi_{13} + U_{23} I_2 \sin \varphi_{23} \quad (12)$$

Scanned with OKEN Scanner





20.169. Aplicarea metodei celor două wattmetre şi diagrama tensiunilor.



20.170. Tensiunile şi curenţii din puterile P_{13} şi P_{23}.

Considerăm cazul cînd tensiunile de borne sînt simetrice.

Din diagrama din figura 20.170 se vede cum se prezintă puterile P_{13} şi P_{23} pentru $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon_3$.

Avem

$$P = U_{13}I_1 \cos (30 - \varphi_1) + U_{23}I_2 \cos (30 + \varphi_2), \tag{13}$$

în care $\varphi_1 = \varphi_2$

$$P_{13} = U_{13}I_1 \cos (30 - \varphi_1)$$

$$P_{23} = U_{23}I_2 \cos (30 + \varphi_2)$$

se obţine

$$P = U_{13}I_1 \, 2 \frac{\sqrt{3}}{2} \cos \varphi_1 = \sqrt{3}\, U_{13}I_1 \cos \varphi_1. \tag{14}$$

În cazul cînd tensiunile de borne sînt simetrice şi $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon_3$, încărcarea este simetrică, avem

$$P = 3U_1I_1 \cos \varphi_1 = 3 \frac{U_{12}}{\sqrt{3}} I_1 \cos \varphi_1 = \sqrt{3}\, U_{12}I_1 \cos \varphi_1. \tag{15}$$

Din

$$P_{13} - P_{23} = U_{12}I_1 \sin \varphi_1$$

se obţine puterea reactivă P_r în forma

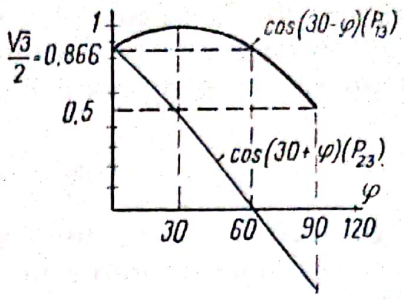
$$P_r = \sqrt{3}(P_{13} - P_{23}) = \sqrt{3}\, U_{12}I_1 \sin \varphi_1. \tag{16}$$

Se remarcă că prin măsurarea celor două puteri P_{13} şi P_{23} se formează tg φ în forma

$$\frac{P_r}{P} = \operatorname{tg} \varphi = \frac{P_{13} - P_{23}}{P_{13} + P_{23}} \sqrt{3}$$

fără să fie nevoie să se cunoască tensiunile de borne şi curenţii.

Scanned with OKEN Scanner



20.171. cos (30 − φ) și cos (30 + φ).

Din diagrama din figura 20.171 se vede cum variază cos (30 − φ) și cos (30 + φ) în funcție de φ.

Cînd apare o încărcare ohmică, cu curenți electrici în fază cu tensiunile de fază, deci $\varphi_1 = \varphi_2 = \varphi_3 = 0$ amîndouă wattmetrele reprezintă același număr de diviziuni ale scalei.

Pentru $\varphi = 30°$ unul din wattmetre arată o deviație mai mare.

Pentru $\varphi = 60°$ unul din wattmetre arată zero.

Pentru φ mai mare ca 60° la unul din wattmetre trebuie comutat curentul electric din bobina de tensiune, ca arătătorul să se deplaseze spre dreapta.

La măsurarea puterii la un motor asincron în mersul în gol la care defazarea între tensiunea de fază și curentul electric e mai mare de 60°, se va constata că la unul din cele două wattmetre, se comută curentul electric în bobina de tensiune.

Să nu se lase motoarele asincrone să funcționeze mult timp în mersul în gol, deoarece au un cos φ foarte mic și încarcă inutil generatoarele.

Prin folosirea celor două wattmetre la măsurarea puterilor P_{13} și P_{23} se vede că există posibilitatea să urmărim cum se comportă reactanța în circuit.

Cînd P_{13} este mai mic ca P_{23}, atunci apare φ negativ.

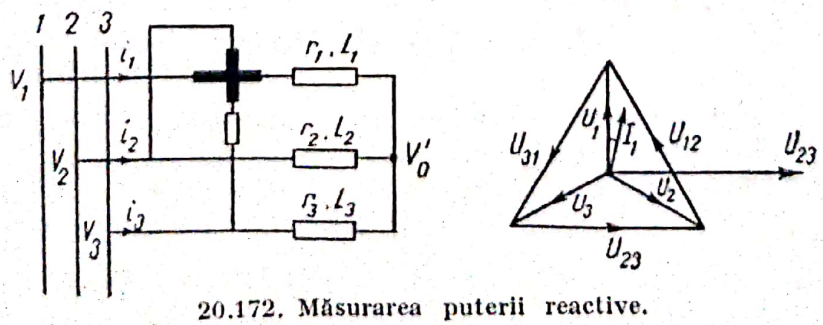
Încărcarea este capacitivă.

Avem

$$P_{13} = U_{13} I_1 \cos (30 + \varphi)$$

$$P_{23} = U_{23} I_2 \cos (30 - \varphi).$$

În cazul cînd $z_1 = z_2 = z_3$ și tensiunile de borne sînt simetrice se remarcă că se poate măsura puterea reactivă cu un singur wattmetru ca în figura 20.172.



20.172. Măsurarea puterii reactive.

În figura 20.172 se prezintă wattmetrul conectat la tensiunea de borne U_{23} care este ortogonală la tensiunea de fază U_1.

În felul acesta se măsoară $U_{23}I_1 \sin \varphi_1$.

Avem

$$P_r = \sqrt{3}\, U_{23} I_1 \sin \varphi_1.$$

În figura 20.173 se prezintă schema pentru măsurarea puterii active în cazul cînd tensiunile de borne nu sînt simetrice și $\varepsilon_1 \neq \varepsilon_2 \neq \varepsilon_3$ cu un singur wattmetru.

Se cunosc tensiunile de borne U_{12}, U_{23}, U_{31} și curenții I_1, I_2, I_3.

În diagrama din stînga se prezintă triunghiul format din tensiunile de borne, iar în dreapta triunghiul format din curenții I_1, I_2, I_3.

Wattmetrul folosește numai la fixarea poziției tensiunii de borne U_{12} față de I_1 în R.

Din

$$P_{12} = U_{12} I_1 \cos \varphi_{12}$$

se deduce φ_{12}.

Se așază curenții I_1 în R, I_2 în S și I_3 în T.

Se duc perpendiculare pe I_2 și I_3 și se stabilește poziția punctului a_1.

Din diagramă se formează ca sume geometrice.

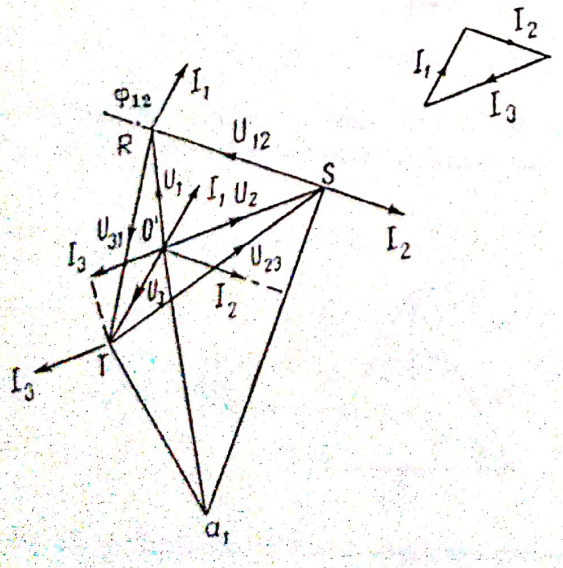
$$U_1 = \overline{O'a_1} + \overline{a_1R}$$

$$U_2 = \overline{O'a_1} + \overline{a_1S}$$

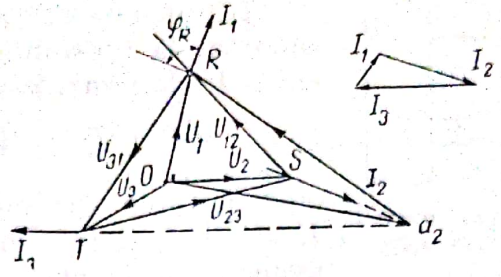
$$U_3 = \overline{O'a_1} + \overline{a_1T}.$$

Înmulțind tensiunile U_1, U_2, U_3 ca și cum ar fi vectori cu I_1, I_2, I_3, scalar, se obține

$$P = U_1 I_1 \cos \varphi_1 + U_2 I_2 \cos \varphi_2 + U_3 I_3 \cos \varphi_3 = \overline{a_1R}\, I_1 \cos \varphi_R$$



20.173. Măsurarea puterii active și reactive cu un wattmetru.



20.174. Măsurarea puterii reactive cu un wattmetru.

deoarece

$$\overline{a_1 S} I_2 \cos 90° = 0$$

$$\overline{a_1 T} I_3 \cos 90° = 0.$$

Din cele de mai sus se vede, că din momentul ce punctul a_1 este fixat, segmentul $\overline{a_1 R}$ devine cunoscut, cît și φ_R unghiul ce-l formează $\overline{a_1 R}$ cu I_1.

Ca urmare, se stabilește produsul $\overline{a_1 R} I_1 \cos \varphi_R$ care exprimă puterea totală P.

La măsurarea puterii reactive totale cu un singur wattmetru, se duc $\overline{Sa_2}$ în sensul lui I_2 și $\overline{Ta_2}$ în sensul lui I_3 (v. fig. 20.174).

Se fixează punctul a_2.

Se obțin următoarele sume geometrice pentru tensiuni

$$U_1 = \overline{O' a_2} + \overline{a_2 R}$$

$$U_2 = \overline{O' a_2} + \overline{a_2 S}$$

$$U_3 = \overline{O' a_2} + \overline{a_2 T}.$$

Se reprezintă puterea reactivă totală în forma

$$P_r = U_1 I_1 \sin \varphi_1 + U_2 I_2 \sin \varphi_2 + U_3 I_3 \sin \varphi_3 = \overline{a_2 R}\, I_1 \sin \varphi_R,$$

deoarece

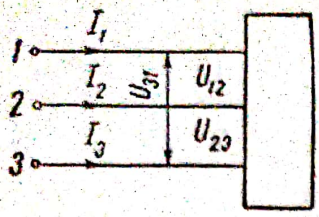
$$\overline{a_2 S}\, I_2 \sin 0 = 0$$

$$\overline{a_2 T}\, I_3 \sin 0 = 0.$$

21. FACTORUL DE PUTERE ȘI FACTORUL DE DEFAZARE LA UN CIRCUIT TRIFAZAT

În paragraful 12.1 s-a văzut că la un circuit monofazat la aceeași tensiune de borne U_b și la același efect Joule-Lenz pe linie $I^2 r_L = I'^2 r_L$ puterea în circuit devine maximă cînd pentru $I = I'$ se introduce în circuitul de utilizare numai o rezistență electrică r^* așa fel ca

$$P^W_{max} = U_b I \cos 0 = I^2 r^* \qquad U_b = I r^*.$$



21.175. Puterea maximă la un circuit trifazat.

La un circuit trifazat ca acela din figura 21.175 conectat la tensiunile U_{12}, U_{23}, U_{31} și pentru același efect Joule-Lenz, pe linie se obține

$$(I_1^2 + I_2^2 + I_3^2)r_L = (I_1'^2 + I_2'^2 + I_3'^2)r_L \qquad (1)$$

cînd puterea devine maximală cu curenții electrici I_1', I_2' și I_3' și tensiunile de fază U_1^*, U_2^* și U_3^*, deoarece avem $r_1^* = r_2^* = r_3^*$.

Puterea maximă devine

$$P_{max} = (U_1^{*2} + U_2^{*2} + U_3^{*2})\frac{1}{r^*} = (I_1'^2 + I_2'^2 + I_3'^2)r^*$$

sau

$$P_{max} = \sqrt{(U_1^{*2} + U_2^{*2} + U_3^{*2})(I_1'^2 + I_2'^2 + I_3'^2)}$$

sau

$$P_{max} = \sqrt{(U_1^{*2} + U_2^{*2} + U_3^{*2})(I_1^2 + I_2^2 + I_3^2)}. \qquad (2)$$

Puterea P_{max} fiind cunoscută înseamnă că la tensiunile U_1^*, U_2^*, U_3^* date se obține r^*.

Ca urmare, factorul de putere la un circuit trifazat oarecare fără conductor neutru se reprezintă prin

$$\Delta = \frac{P^W}{P^W_{max}} \qquad (3)$$

Ținîndu-se seama de expresia puterii aparente în forma complexă

$$\mathcal{P}_a = U_1^2\psi_1 + U_2^2\psi_2 + U_3^2\psi_3 \qquad (4)$$

sau

$$\mathcal{P}_a = I_1^2\bar{z}_1 + I_2^2\bar{z}_2 + I_3^2\bar{z}_3$$

în care

$$\psi_1 = g_1 - \mathrm{j}\, b_1.$$

Se obține

$$P = U_1^2 g_1 + U_2^2 g_2 + U_3^2 g_3$$
$$P_r = U_1^2 b_1 + U_2^2 b_2 + U_3^2 b_3 \qquad (5)$$
$$\mathcal{P}_a = P - \mathrm{j}\, Pr,$$

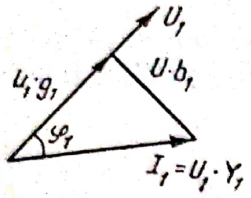
în care

$$U_1^2 g_1 = I_1 \cos\varphi_1 U_1$$
$$U_1^2 b_1 = I_1 \sin\varphi_1 U_1 \qquad (6)$$

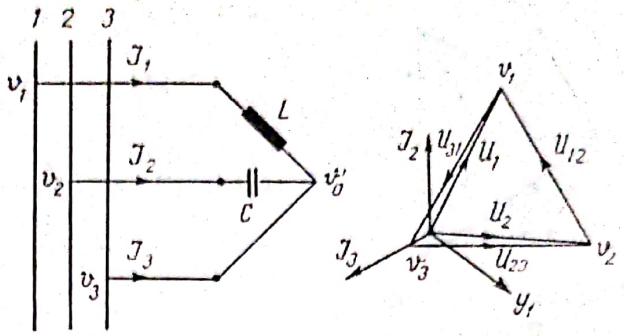
Așa cum ne arată diagrama din figura 21.176 rezultă

$$P_a = \sqrt{P^2 + P_r^2}. \qquad (7)$$

Scanned with OKEN Scanner



21.176. Componentele lui I_1.



21.177. Circuit trifazat nesimetric

Ca urmare, factorul de defazare se reprezintă prin

$$\delta' = \frac{P^{W}}{P_a^{VA}} \cdot \tag{8}$$

La un circuit trifazat simetric cu tensiuni de borne simetrice avem

$$P_{max}^{W} = \sqrt{3U_1^{*2}3I_1^2} = 3U_1^{*}I_1$$

astfel că

$$\Delta = \frac{P^{W}}{P_{max}^{W}} = \cos\varphi = \frac{P^{W}}{P_a^{VA}} = \delta'.$$

La un circuit trifazat simetric ($z_1 = z_2 = z_3$) și tensiuni de borne simetrice $U_{12} = U_{23} = U_{31}$ factorul de putere devine egal cu factorul de defazare.

Din literatură [1] se relevă ca exemplu pentru puterea maximă, circuitul trifazat din figura 21.177.

În diagramă se vede care sînt tensiunile de fază $\mathcal{U}_1$ și $\mathcal{U}_2$. Se constată că secvența curenților este opusă secvenței tensiunilor de borne $\mathcal{U}_{12}$, $\mathcal{U}_{23}$ și $\mathcal{U}_{31}$.

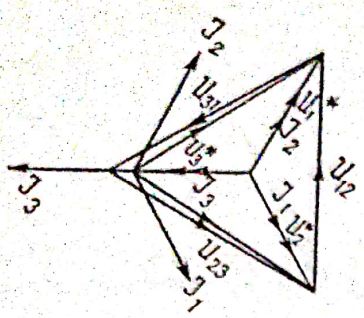
Avem

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_1 + \mathcal{I}_2 + \mathcal{I}_3 &= 0 \\ \mathcal{U}_1 &= \mathcal{I}_1 \, \mathrm{j}\, \omega L \\ \mathcal{U}_2 &= -\mathcal{I}_2 \, \mathrm{j}\, \frac{1}{\omega C}, \end{aligned} \tag{9}$$

în care

$$\omega L = \frac{1}{\omega C}.$$

[1] L. S. Lurie — Factorul de putere și factorul de defazare. Electricestvo, 1,3 1951, 1952.



21.178 Diagrama tensiunilor U_1^*, U_2^*, U_3^* și U_1, U_2, U_3.

Din (9) se obține

$$\mathcal{I}_1 = -\,\mathrm{j}\,\frac{\mathcal{U}_1}{\omega L} \qquad \mathcal{I}_2 = \mathrm{j}\,\mathcal{U}_2\omega C. \tag{10}$$

Tensiunile $\mathcal{U}_1$ și $\mathcal{U}_2$ se pot exprima în funcție de tensiunile simetrice $\mathcal{U}_1^*$, $\mathcal{U}_2^*$ și $\mathcal{U}_3^*$ în felul următor:

$$\begin{aligned} \mathcal{U}_1 &= -\,\mathcal{U}_3^* + \mathcal{U}_1^* \\ \mathcal{U}_2 &= -\,\mathcal{U}_3^* + \mathcal{U}_2^* \\ \mathcal{U}_3 &= -\,\mathcal{U}_3^* + \mathcal{U}_3^* = 0. \end{aligned} \tag{11}$$

Puterea activă și reactivă devine:

$$P = 0 = U_1 I_1 \cos\frac{\pi}{2} + U_2 I_2 \cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + 0 \cdot I_3$$

$$P_r = 0 = U_1 I_1 \sin\frac{\pi}{2} + U_2 I_2 \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) + 0 \cdot I_3$$

sau:

$$P = 0 = U_1^* I_1 \cos 120 + U_2^* I_2 \cos(-120) + U_3^* I_3 \cos 0$$

$$P_r = 0 = U_1^* I_1 \sin(120) + U_2^* I_2 \sin(-120) + U_3^* I_3 \sin 0.$$

Se obține

$$P_a^2 = P^2 + P_r^2 = 0$$

$$P_{max} = \sqrt{3\,U_1^{*2} 3 I_1^2} = 3 U_1^* I_1.$$

Se obține $\mathcal{P}_a$ și în forma complexă

$$\mathcal{P}_a = I_1^{*2}\bar{z}_1 + I_2^{*2}\bar{z}_2 + I_3^{*2}\bar{z}_3 = I_1^2(-\,\mathrm{j}\,\omega L) + I_2^2\left(\mathrm{j}\,\frac{1}{\omega C}\right) + I_3^2 \cdot 0 =$$

$$= I_1^2 \cdot j\left(-\,\omega L + \frac{1}{\omega C}\right) = 0.$$

Exprimarea puterii maxime P_{max} în funcție de puterea activă P, de puterea reactivă P_r și de puterea de nesimetrie P_{nes}.

În acest scop ne folosim de următoarea identitate în forma

$$\begin{aligned} P_{max}^2 &= (U_1^{*2} + U_2^{*2} + U_3^{*2})\,(I_1^2 + I_2^2 + I_3^2) = \\ &= (U_1^* I_1 \cos\varphi_1^* + U_2^* I_2 \cos\varphi_2^* + U_3^* I_3 \cos\varphi_3^*)^2 + \\ &+ (U_1^* I_1 \sin\varphi_1^* + U_2^* I_2 \sin\varphi_2^* + U_3^* I_3 \sin\varphi_3^*)^2 + \\ &+ \Sigma\{U_\nu^{*2} I_\xi^2 + U_\xi^2 I_\nu^2 - 2U_\nu U_\xi I_\nu I_\xi \cos(\varphi_\nu^* - \varphi_\xi^*)\} \end{aligned}$$

ceea ce verifică ușor.

Se obțin

$$U_1^{*2}I_1^2 = (U_1^*I_1 \cos \varphi_1^*)^2 + (U_1^*I_1 \sin \varphi_1^*)^2$$

apoi

$$U_1^{*2}I_2^2 + U_2^{*2}I_1$$

apare în termenul

$$\sum\{U_\nu^{*2}I_\xi^2 + U_\xi^{*2}I_\nu^2 - 2U_\nu^*U_\xi^*I_\nu I_\xi \cos(\varphi_\nu^* - \varphi_\xi^*)\}$$

în care $\nu = 1, 2, 3, \quad \xi = 1, 2, 3.$

În fine, mai apar termeni de forma

$$2(U_1^*I_1 \cos \varphi_1^*)(U_2^*I_2 \cos \varphi_2^*) + 2(U_1^*I_1 \sin \varphi_1^*)(U_2^*I_2 \sin \varphi_2^*) =$$
$$= 2U_1^*U_2^*I_1I_2 \cos(\varphi_1^* - \varphi_2^*)$$

care este cuprins în ultimul termen cu semn schimbat din

$$\sum\{U_\nu^*I_\xi^2 + U_\xi^*I_\nu^2 - 2U_\nu^*U_\xi^*I_\nu I_\xi \cos(\varphi_\nu^* - \varphi_\xi^*)\}.$$

Exprimîndu-se puterea P_{max} în forma

$$P_{max}^2 = P^2 + P_r^2 + P_{nes}^2$$

din care se vede că puterea P_{nes}^2 devine nulă cînd avem $z_1 = z_2 = z_3$, adică $z_1 = z_2 = z_3$ și $\varphi_1 = \varphi_2 = \varphi_3$, deoarece rezultă

$$P_{nes}^2 = \{\sum U_\nu I_\xi - U_\xi I_\nu\}^2 = 0,$$

în care

$$U_\nu = I_\nu z_\nu \qquad U_\xi = I_\xi z_\xi \qquad z_\nu = z_\xi.$$

Datorită acestui fapt s-a introdus denumirea de putere de nesimetrie, prezentată de Lurie.

Datorită exprimării puterii maxime în formă (13) factorul de putere Δ devine

$$\Delta^2 = \frac{P^2}{P_{nes}^2} = \frac{P^2}{P^2 + P_r^2 + P_{nes}^2} = \frac{P^2}{P_a^2 + P_{nes}^2} = \frac{P^2}{P_a^2\left(1 + \frac{P_{nes}^2}{P_a^2}\right)} = \delta'^2\delta''^2,$$

în care

$$\delta'' = \frac{1}{1 + P_{nes}^2/P_a^2}$$

reprezintă factorul de nesimetrie.

Ca urmare, factorul de putere la un circuit trifazat ia forma:

$$\Delta = \delta'\delta''.$$

Pentru $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon_3$ se obține $\delta'' = 1$ ceea ce ne arată că la un circuit trifazat simetric ($\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon_3$) se obține

$$\Delta = \delta'$$

factorul de putere este egal cu factorul de defazare.

În exemplul luat mai sus de nesimetrie s-a obținut

$$P = 0, \quad P_r = 0, \quad P_{max} = 3U_1^* I_1$$

ca urmare din

$$P_{max}^2 = P^2 + P_r^2 + P_{nes}^2,$$

rezultă pentru

$$P = 0 \text{ și } P_r = 0, \; P_{max} = P_{nes} = 3U_1^* I_1.$$

De altfel cu ajutorul diagramei din figura 21.178 se poate calcula P_{nes} din

$$\begin{aligned} P_{nes}^2 &= \sum \{U_\nu^2 I_\xi^2 + U_\xi^2 I_\nu^2 - 2U_\nu U_\xi I_\nu I_\xi \cos(\varphi_\nu - \varphi_\xi)\} = \\ &= U_1^{*2} I_2^2 + U_2^{*2} I_1^2 - 2U_1^* U_2^* I_1 I_2 \cos(120 - (-120)) + \\ &+ U_2^{*2} I_3^2 + U_3^{*2} I_2^2 - 2U_2^* U_3^* I_2 I_3 \cos((-120) - 0) + \\ &+ U_3^{*2} I_1^2 + U_1^{*2} I_3^2 - 2U_3^* U_1^* I_3 I_1 \cos(0 - 120) = 9U_1^{*2} I_1^2, \end{aligned}$$

de unde rezultă

$$P_{nes} = 3U_1^* I_1.$$

Factorul de putere

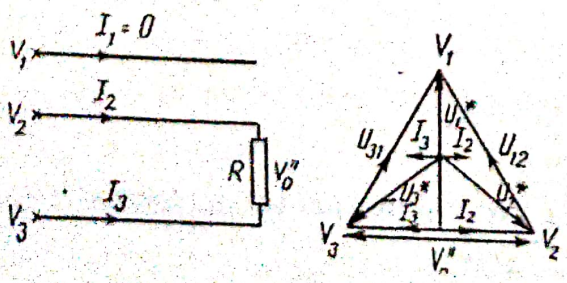
$$\Delta = \frac{P}{P_{max}} = 0.$$

Din $\Delta = \delta'\delta''$ în care

$$\delta' = \frac{P}{P_a}; \quad \delta'' = \frac{1}{1 + P_{nes}^2/P_a^2}$$

se obține $\delta'' = 0$, deoarece P_{nes} posedă o valoare finită și bine determinată și $P_a = 0$. Factorul de defazare nu e nul.

În figura 21.179 se prezintă un circuit trifazat nesimetric cu $I_1 = 0$, înseamnă că un circuit de utilizare monofazat conectat spre exemplu la tensiunea de borne $U_{23} = V_2 - V_3$. Spre exemplu un aparat pentru sudură.



21.179. Circuit trifazat cu $I_1 = 0$.

Pentru determinarea curenților și a puterilor ne folosim de metoda tensiunilor echivalente.

În exemplul din figura 22.180 apare cazul $z_1 = \infty$. Se determină tensiunea U_{t1} în diagrama din figură. Ea este exprimată prin

$$U_{t1} = V_1 - V_0'',$$

care ne conduce la potențialul din schemă.

Din

$$V_2 - V_3 = I_2 R$$

se obține I_2 și față de punctul neutru cu potențialul V_0'' se obține din

$$I_2 + I_3 = 0$$

$$I_3 = -I_2.$$

Avem

$$P = 2U_2 I_2 \cos 0 = U_{23} I_2$$

$$P_r = 2U_2 I_2 \sin 0 = 0$$

$$P_{max} = \sqrt{(U_1^{*2} + U_2^{*2} + U_3^{*2})(I_2^2 + I_3^2)} = \sqrt{3}\, U_1^{*} \sqrt{2} I_2 = \sqrt{2} U_{12} I_2.$$

Se obține factorul de putere Δ din

$$\Delta = \frac{P}{P_{max}} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Avem

$$P_a = P,$$

deci

$$\delta' = \frac{P}{P_a} = 1; \quad P_{nes}^2 = P_{max}^2 - P^2 = U_{12}^2 I_2^2 = P^2.$$

Factorul de nesimetrie este

$$\delta'' = \sqrt{\frac{1}{1 + \frac{P_{nes}^2}{P_a^2}}} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Avem

$$\Delta = \delta' \cdot \delta'' = 1 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Din exemplul de mai sus se relevă că cu toate că circuitul de utilizare posedă numai o rezistență electrică în cazul circuitului trifazat nesimetric, factorul de putere nu este egal cu unitatea.

Factorul de defazare este egal cu unitatea, dar nesimetria cauzează căderi de tensiune pe linia nesimetrică și duce la tensiuni de borne nesimetrice.

Scanned with OKEN Scanner

22. TRANSFIGURĂRI DE CIRCUITE DIN CONECTAREA STEA ÎN CONECTAREA POLIGONALĂ

În figura 21.180 se dă un circuit în conectare stea și se cere să se determine un circuit în conectare poligonală echivalent în ceea ce privește relațiile dintre curenții de linie $\mathcal{I}_1, \mathcal{I}_2 \dots \mathcal{I}_m$ și potențialele $\mathcal{V}_1, \mathcal{V}_2 \dots \mathcal{V}_m$.

Se cere să se determine impedanțele z_1, z_2, z_m.

Din circuitul în conectare stea se obține

$$\mathcal{I}_1 + \mathcal{I}_2 + \mathcal{I}_3 + \dots + \mathcal{I}_\nu + \dots + \mathcal{I}_m \tag{1}$$

care ne conduce la relația

$$\frac{\mathcal{V}_1 - \mathcal{V}_0'}{z_1} + \dots + \frac{\mathcal{V}_\nu - \mathcal{V}_0'}{z_\nu} + \dots + \frac{\mathcal{V}_m - \mathcal{V}_0'}{z_m} = 0$$

de unde se deduce

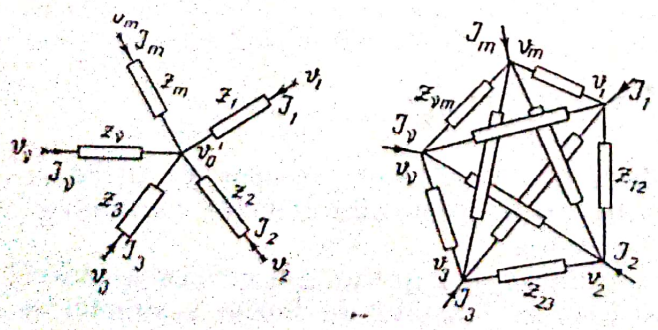
$$\Sigma \frac{\mathcal{V}_\nu}{z_\nu} - \mathcal{V}_0' \Sigma \frac{1}{z_\nu} = 0,$$

în care $\nu = 1 \dots m$, astfel că

$$\mathcal{V}_0' = \frac{\Sigma \dfrac{\mathcal{V}_\nu}{z_\nu}}{\Sigma \dfrac{1}{z_\nu}}, \quad \Sigma \frac{1}{z_\nu} = \frac{1}{z_p}. \tag{2}$$

Relația (2) ne arată că atunci cînd potențialele $\mathcal{V}_1, \dots \mathcal{V}_\nu, \mathcal{V}_m$ și $z_1 \dots z_\nu, z_m$ sînt cunoscute se determină potențialul punctului neutru $\mathcal{V}_0'$.

În cazul cînd se dă $\mathcal{V}_1 = \mathcal{V}_2 = \dots \mathcal{V}_\nu$ rezultă $\mathcal{V}_0' = \mathcal{V}_1$, ceea ce se evidențiază în fenomenul electrostatic cînd nu există mișcări de electroni.



22.180. Transfigurarea unui circuit din stea în conectare poligonală.

Determinarea curentului $\mathcal{J}_\nu$ pentru crcuitul în conectare stea

Se formează

$$\mathcal{J}_\nu = \frac{\mathcal{V}_\nu - \mathcal{V}_0'}{z_\nu} = \frac{\mathcal{V}_\nu}{z_\nu} - \frac{\sum \frac{\mathcal{V}_\nu}{z_\nu}}{z_\nu \sum \frac{1}{z_\nu}} =$$

$$= \frac{\mathcal{V}_\nu}{z_\nu} - z_p \frac{\mathcal{V}_\nu}{z_\nu^2} - \frac{z_p}{z_\nu} \sum_1^m \frac{\mathcal{V}_\mu}{z_\mu} \tag{3}$$

în care $\mu \neq \nu$.

Determinarea curentului $\mathcal{J}_\nu$ la circuitul în conectarea poligonală. Avem

$$\mathcal{J}_\nu = \frac{\mathcal{V}_\nu - \mathcal{V}_1}{z_{\nu 1}} + \frac{\mathcal{V}_\nu - \mathcal{V}_2}{z_{\nu 2}} + \ldots + \frac{\mathcal{V}_\nu - \mathcal{V}_m}{z_{\nu m}}$$

$$\mathcal{J}_\nu = \mathcal{V}_\nu \sum \frac{1}{z_{\nu\mu}} - \sum \frac{\mathcal{V}_\mu}{z_{\nu\mu}} \tag{4}$$

în care $\mu \neq \nu$.

Transfigurarea circuitelor se realizează pentru aceiaşi curenţi $\mathcal{J}_1$, $\mathcal{J}_2$, $\mathcal{J}_\nu$, $\mathcal{J}_m$ şi aceleaşi potenţiale $\mathcal{V}_1 \ldots \mathcal{V}_\nu$, $\mathcal{V}_m$.

Din egalitatea lui $\mathcal{J}_\nu$ din (3) cu $\mathcal{J}_\nu$ din (4) rezultă

$$\frac{1}{z_\nu} - z_p \frac{1}{z_\nu^2} = \sum \frac{1}{z_{\nu\mu}} \tag{5}$$

$$\frac{z_p}{z_\nu z_\mu} = \frac{1}{z_{\nu\mu}}. \tag{6}$$

Din (6) se obţine

$$z_{\nu\mu} = \frac{z_\nu z_\mu}{z_p}. \tag{7}$$

Prin (7) se determină impedanţele de forma $z_{\nu\mu}$.

Ţinîndu-se seama de relaţia (7) se verifică relaţia (5).

Se obţine

$$\frac{1}{z_\nu} - z_p \frac{1}{z_\nu^2} = \sum \frac{1}{z_\nu z_\mu} = \frac{z_p}{z_\nu} \sum_1^m \frac{1}{z_\mu} = \frac{z_p}{z_\nu} \left(\frac{1}{z_p} - \frac{1}{z_\nu} \right).$$

$$\mu \neq \nu$$

Din figura 22.180 se constată că pentru m circuite în conectare stea se obţine C_m^2 circuite în conectare poligonală.

Scanned with OKEN Scanner

Cînd se formează C_m^p combinări de m obiecte luate cîte p, diferite fie prin natura lor sau prin numerotarea lor, înseamnă că fiecare grupare de p obiecte diferă de celelalte cel puțin printr-un obiect nou.

Cînd se formează P_p permutări de p obiecte, înseamnă că grupările de către p obiecte se deosebesc între ele prin pozițiile diferite ale celor p_p obiecte.

Cînd se formează A_m^p aranjări de m obiecte luate cîte p înseamnă că grupările de către p obiecte pot diferi între ele prin obiecte diferite cît și prin poziții diferite ale obiectelor în grupare.

Se obține:

$$P_p \cdot C_m^p = A_m^p$$

$$C_m^p = \frac{A_m^p}{P_p} = \frac{m(m-1)\ldots(m-(p-1))(m-p)\ldots 1}{p!\ (m-p)\ldots 1}; \quad C_m^p = \frac{m!}{p!\ (m-p)!}$$

Pentru $m = 2$ se obține $C_m^2 = \frac{2 \cdot 1}{2 \cdot 1 \cdot 0!} = 1$

$$m = 3 \qquad C_m^2 = \frac{3 \cdot 2 \cdot 1}{2 \cdot 1 \cdot 1} = 3$$

$$m = 4 \qquad C_m^2 = \frac{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 1} = 6.$$

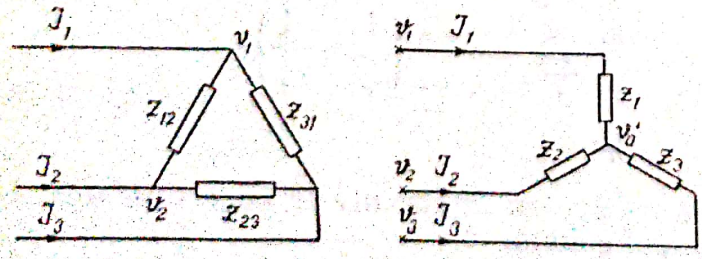
Din cele de mai sus se constată că numai pentru $m = 3$ numărul de circuite în conectare stea sînt egale cu numărul de circuite în conectare poligonală.

Datorită acestui fapt numai pentru cazurile în stea cu $m = 3$ se obține în conectare poligonală un circuit în triunghi tot m egal cu 3.

În cazul acesta se poate obține rezolvarea problemei și invers, adică dîndu-se impedanțele z_{12}, z_{23} și z_{31} se pot determina impedanțele z_1, z_2, z_3.

Exemple:

Se dau z_1, z_2, z_3, se cere să se determine z_{12}, z_{23}, z_{31} (v. fig. 22.181).



22.181. Circuite trifazate transfigurate.

Se formează

$$\frac{1}{z_p} = \frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2} + \frac{1}{z_3}$$

$$z_p = \frac{z_1 z_2 z_3}{z_1 z_2 + z_2 z_3 + z_3 z_1} \tag{7}$$

$$z_{12} = \frac{z_1 z_2}{z_p} = \frac{z_1 z_2 + z_2 z_3 + z_3 z_1}{z_3}$$

$$z_{23} = \frac{z_2 z_3}{z_p} = \frac{z_1 z_2 + z_2 z_3 + z_3 z_1}{z_1} \tag{8}$$

$$z_{31} = \frac{z_3 z_1}{z_p} = \frac{z_1 z_2 + z_2 z_3 + z_3 z_1}{z_2}.$$

Se dau z_{12}, z_{23}, z_{31} *și se cere să se determine* z_1, z_2, z_3.

Se formează

$$z_{12} + z_{23} + z_{31} = (z_1 z_2 + z_2 z_3 + z_3 z_1)\left(\frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2} + \frac{1}{z_3}\right) = \frac{(z_1 z_2 + z_2 z_3 + z_3 z_1)^2}{z_1 z_2 z_3}. \tag{9}$$

Se formează

$$z_{12} z_{23} = \frac{(z_1 z_2 + z_2 z_3 + z_3 z_1)^2}{z_1 z_3} \tag{10}$$

din (9) și (10) se deduce

$$\frac{z_{12} z_{23}}{z_{12} + z_{23} + z_{31}} = z_2. \tag{11}$$

În mod analog se obțin

$$\frac{z_{23} z_{31}}{z_{12} + z_{23} + z_{31}} = z_3; \quad \frac{z_{31} z_{12}}{z_{12} + z_{23} + z_{31}} = z_1. \tag{12}$$

Se poate stabili o formulă generală pentru determinarea impedanțelor z_1, z_2, z_3 sau z_{12}, z_{23}, z_{31}.

În acest scop se formează și z_{12}, z_{23}, z_{31}.

Se obțin

$$z_{12} z_{23} z_{31} = \frac{(z_1 z_2 + z_2 z_3 + z_3 z_1)^3}{z_1 z_2 z_3}. \tag{13}$$

Se formează

$$\frac{z_{12}z_{23}z_{31}}{z_{12}+z_{23}+z_{31}} = \frac{(z_1z_2+z_2z_3+z_3z_1)^3}{z_1z_2z_3} \cdot \frac{z_1z_2z_3}{(z_1z_2+z_2z_3+z_3z_1)^2} =$$

$$= z_1z_2 + z_2z_3 + z_3z_1 = z_{12}z_3 = z_{23}z_1 = z_{31}z_2,$$

astfel că:

$$\frac{z_{12}z_{23}z_{31}}{z_{12}+z_{23}+z_{31}} = z_1z_2 + z_2z_3 + z_3z_1 = z_{12}z_3 = z_{23}z_1 = z_{31}z_2. \qquad (14)$$

Relația (14) e o relație generală pentru determinarea impedanțelor la transfigurări din stea în triunghi și viceversa.

În caz cînd avem

$$z_{12} = z_{23} = z_{31}$$

se obține

$$z_1 = \frac{z_{12}^2}{3z_{12}} = \frac{z_{12}}{3}$$

sau cînd avem

$$z_1 = z_2 = z_3$$

se obține

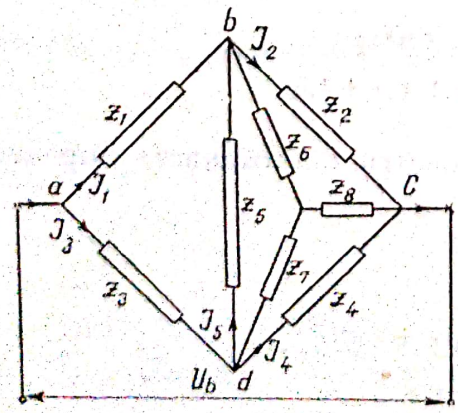
$$z_{12} = \frac{3z_1^2}{z_1} = 3z_1.$$

Figura 22.182 reprezintă un circuit în conectare complexă.

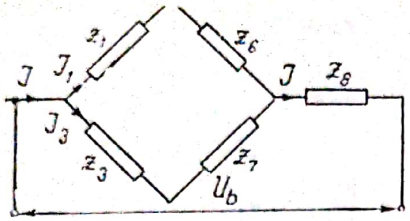
Prin transfigurarea circuitului în triunghi b, c, d în circuit în conectare stea cu aceleași potențiale $\mathcal{V}_b$, $\mathcal{V}_c$ și $\mathcal{V}_d$ și curenții $\mathcal{J}_1$, $\mathcal{J}_2$ și $\mathcal{J}_3$.

Se obțin impedanțele

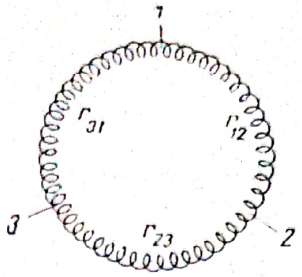
$$z_6, z_7 \text{ și } z_8.$$



22.182. Circuit în conectare complexă.



22.183. Circuit complex transfigurat.



22.184. Bobinaj pentru curent continuu pentru $p = 1$.

Ținîndu-se seama de formulele (11) (12) se obțin

$$z_6 = \frac{z_2 z_5}{z_2 + z_5 + z_4} \qquad z_7 = \frac{z_4 z_5}{z_2 + z_5 + z_4} \qquad z_8 = \frac{z_4 z_2}{z_2 + z_5 + z_4}.$$

Figura 22.183 reprezintă circuitul în conectare complexă, transfigurat. Se formează impedanța echivalentă z_{ep} al celor două ramuri paralel.

Se obține

$$z_{ep} = \frac{(z_1 + z_6)(z_3 + z_7)}{z_1 + z_6 + z_3 + z_7}.$$

În fine circuitul echivalent pentru întregul circuit în conectare complexă e

$$z_e = z_{ep} + z_8.$$

În figura 22.184 se prezintă un bobinaj pentru o mașină de curent continuu pentru $p = 1$.

Un astfel de bobinaj cu punctele de derivație la 120° poate fi folosit ca un bobinaj pentru un circuit trifazat, conectat în triunghi.

Se cere să se determine rezistențele r_{12}, r_{23} și r_{31}, obținîndu-se prin măsurare rezistențele r_a, r_b și r_c în care:

$$r_a = \frac{r_{12}(r_{23} + r_{31})}{r_{12} + r_{23} + r_{31}}; \qquad r_b = \frac{r_{23}(r_{31} + r_{12})}{r_{12} + r_{23} + r_{31}}; \qquad r_c = \frac{r_{31}(r_{12} + r_{23})}{r_{12} + r_{23} + r_{31}}.$$

Dacă bobinajul conectat în triunghi ca acela din figura 22.185 ar li fost conectate în stea cu rezistențele r_1, r_2, r_3 atunci rezistențele măsurate ar fi luat formele

$$r_a = r_1 + r_2, \quad r_b = r_2 + r_3, \quad r_c = r_3 + r_1.$$

r_1, r_2 și r_3 se obțin în felul următor:

Din

$$r_a - r_b = r_1 - r_3; \qquad r_c = r_3 + r_1$$

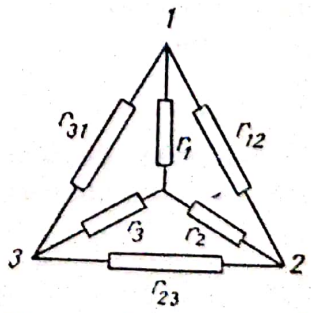


Fig. 22.185. Transfigurarea triunghi-stea

astfel că

$$r_1 = \frac{1}{2}(r_a - r_b + r_c)$$

În mod analog se obţin

$$r_2 = \frac{1}{2}(r_b - r_c + r_a)$$

$$r_3 = \frac{1}{2}(r_c - r_a + r_b)$$

Cunoscîndu-se rezistenţele r_1, r_2 şi r_3 se obţin r_{12}, r_{23} şi r_{31} din

$$r_{12} = \frac{r_1r_2 + r_2r_3 + r_3r_1}{r_3}; \quad r_{23} = \frac{r_1r_2 + r_2r_3 + r_3r_1}{r_1}; \quad r_{31} = \frac{r_1r_2 + r_2r_3 + r_3r_1}{r_2}$$

Cînd apare spre exemplu $r_3 = \infty$ (o întrerupere) rezultă

$$r_{12} = r_1 + r_2.$$

23. DESCOMPUNEREA TENSIUNILOR ŞI CURENŢILOR TRIFAZAŢI NESIMETRICI, ÎN TENSIUNI ŞI CURENŢI SIMETRICI CU SECVENŢE OPUSE ŞI ÎN COMPONENTE HOMOPOLARE

Tensiunile de borne la o reţea trifazată fără conductor neutru, pot deveni nesimetrice datorită prezenţei reţelei cu circuite monofazate, care încarcă reţeaua nesimetric.

Curenţii electrici fiind neegali, creează pe linie căderi de tensiune nesimetrice. În felul acesta se creează tensiuni de borne nesimetrice.

Prin conectarea unui motor asincron la o astfel de reţea cu tensiuni de borne nesimetrice, se constată că pe lîngă cuplul activ apare un cuplu opus cu cel activ, mai mic, micşorîndu-se în felul acesta randamentul motorului asincron.

În figura 23.186 se reprezintă tensiunile de borne nesimetrice ale unor reţele trifazate fără conductorul neutru.

Avem

$$\mathcal{U}_{12} + \mathcal{U}_{23} + \mathcal{U}_{31} = 0. \tag{1}$$

Pentru descompunerea tensiunilor de borne nesimetrice în două grupe de tensiuni simetrice cu secvenţe se introduc

$$\begin{aligned} \mathcal{U}_{12} &= \mathcal{U}'_{12} + \mathcal{U}''_{12} \\ \mathcal{U}_{23} &= \mathcal{U}'_{23} + \mathcal{U}''_{23} \\ \mathcal{U}_{31} &= \mathcal{U}'_{31} + \mathcal{U}''_{31} \end{aligned} \tag{2}$$

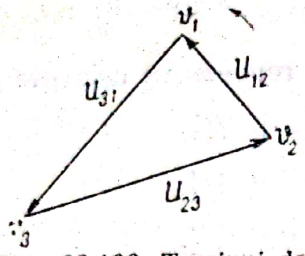


Fig. 23.186. Tensiuni de borne nesimetrice

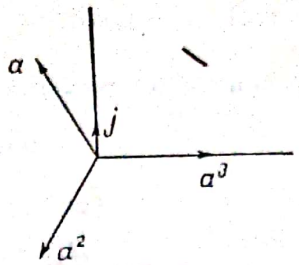


Fig. 22.187. Operatorii a, a^2 și a^3.

în care

$$\mathcal{U}'_{12} + \mathcal{U}'_{23} + \mathcal{U}'_{31} = 0; \qquad \mathcal{U}''_{12} + \mathcal{U}''_{23} + \mathcal{U}''_{31} = 0. \tag{3}$$

Tensiunile simetrice $\mathcal{U}'_{12}$, $\mathcal{U}'_{23}$, $\mathcal{U}'_{31}$ au aceeași secvență ca $\mathcal{U}_{12}$, $\mathcal{U}_{23}$, $\mathcal{U}_{31}$ iar tensiunile simetrice $\mathcal{U}''_{12}$, $\mathcal{U}''_{23}$, $\mathcal{U}''_{31}$, au o secvență opusă ca a tensiunilor $\mathcal{U}_{12}$, $\mathcal{U}_{23}$, $\mathcal{U}_{31}$.

Se cere să se determine cele două grupuri de tensiuni simetrice cu secvențe opuse.

Se introduce raportul

$$\frac{\mathcal{U}''_{12}}{\mathcal{U}'_{12}} = C \tag{4}$$

denumit factor de nesimetrie. Cînd $\mathcal{U}''_{12}$ este nul atunci $C = 0$. La motoare asincrone se admite un factor de nesimetrie de cel mult $C = 0{,}05$.

Pentru determinarea celor două grupe de tensiuni simetrice cu secvențe opuse se folosesc operatorii complecși din figura 23.187.

Se introduc

$$a = e^{j\frac{2\pi}{3}} = -\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$a^2 = e^{j2\frac{2\pi}{3}} = -\frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2} \tag{5}$$

$$a^3 = e^{j3\frac{2\pi}{3}} = 1 .$$

în care

$$a + a^2 + a^3 = 0.$$

Cu ajutorul operatorilor din (5) ce reprezintă tensiunile simetrice în formele

$$\begin{aligned} \mathcal{U}'_{12} &= \mathcal{U}'_{12} & \mathcal{U}''_{12} &= \mathcal{U}''_{12} \\ \mathcal{U}'_{23} &= a^2\mathcal{U}'_{12} & \mathcal{U}''_{23} &= a\mathcal{U}''_{12} \\ \mathcal{U}'_{31} &= a\mathcal{U}'_{31} & \mathcal{U}''_{31} &= a^2\mathcal{U}''_{12}. \end{aligned} \tag{6}$$

Scanned with OKEN Scanner

Figura 23.188, *a* reprezintă cele două grupe de tensiuni simetrice cu secvențe opuse.

Ținîndu-se seama de relațiile (6) se reprezintă relațiile (2) în forma

$$\begin{aligned} \mathcal{U}_{12} &= \mathcal{U}'_{12} + \mathcal{U}''_{12} \\ \mathcal{U}_{23} &= a^2\,\mathcal{U}'_{12} + a\,\mathcal{U}''_{12} \\ \mathcal{U}_{31} &= a\mathcal{U}'_{12} + a^2\mathcal{U}''_{12}. \end{aligned} \tag{7}$$

din care se obțin $\mathcal{U}'_{12}$ și $\mathcal{U}''_{12}$ după metoda prezentată de Fortesque.

Pentru determinarea lui $\mathcal{U}'_{12}$ se înmulțește relația a doua cu a și a treia cu a^2 și se adună.

Se obține:

$$\mathcal{U}_{12} + a\mathcal{U}_{23} + a^2\mathcal{U}_{31} = 3\mathcal{U}'_{12}, \tag{8}$$

deoarece avem:

$$\mathcal{U}''_{12} + a^2\mathcal{U}''_{12} + a\mathcal{U}''_{12} = 0,$$

în care

$$a^4 = a^3 \cdot a = a.$$

Ținîndu-se seama de relațiile (5) se obține din (8)

$$\mathcal{U}_{12} - \frac{1}{2}(\mathcal{U}_{23} + \mathcal{U}_{31}) + \mathrm{j}\,\frac{\sqrt{3}}{2}(\mathcal{U}_{23} - \mathcal{U}_{31}) = 3\mathcal{U}'_{12}, \tag{9}$$

în care

$$\mathcal{U}_{23} + \mathcal{U}_{31} = -\,\mathcal{U}_{12},$$

astfel că

$$\frac{1}{2}\,\mathcal{U}_{12} + \mathrm{j}\,\frac{1}{\sqrt{3}}\,\frac{\mathcal{U}_{23} - \mathcal{U}_{31}}{2} = \mathcal{U}'_{12}, \tag{10}$$

Pentru determinarea mărimilor $\mathcal{U}''_{12}$ se înmulțește în (7) relația a doua cu a^2 și a treia cu a.

Se obține

$$\begin{aligned} \mathcal{U}_{12} + a^2\mathcal{U}_{23} + a\mathcal{U}_{31} &= 3\mathcal{U}''_{12} \\ \frac{1}{2}\,\mathcal{U}_{12} - \mathrm{j}\,\frac{1}{\sqrt{3}}\,\frac{\mathcal{U}_{23} + \mathcal{U}_{31}}{2} &= \mathcal{U}''_{12} \end{aligned} \tag{11}$$

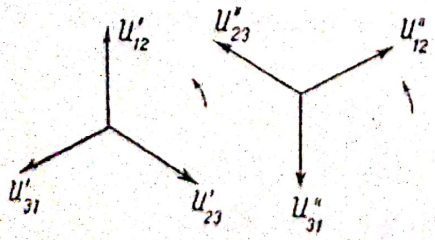


Fig. 23.188, *a*. Tensiunile simetrice cu secvențe opuse.

în care

$$\frac{1}{\sqrt{3}} = \operatorname{tg} 30°.$$

În figura 23.188, *b* se prezintă triunghiul format din

$$\mathcal{U}_{12} + \mathcal{U}_{23} + \mathcal{U}_{31},$$

Se formează $\frac{\mathcal{U}_{23} - \mathcal{U}_{31}}{2}$ și se duce în P o verticală pe ea. Se formează în A unghiul de 30° și se obține pe verticală dusă segmentul

$$\mathrm{j}\,\frac{1}{\sqrt{3}}\,\frac{\mathcal{U}_{23} - \mathcal{U}_{31}}{2}.$$

Se formează în C

$$\frac{\mathcal{U}_{12}}{2} + \mathrm{j}\,\frac{1}{\sqrt{3}}\,\frac{\mathcal{U}_{23} - \mathcal{U}_{31}}{2} = \mathcal{U}'_{12}$$

și tot în C

$$\frac{\mathcal{U}_{12}}{2} - \mathrm{j}\,\frac{1}{\sqrt{3}}\,\frac{\mathcal{U}_{23} - \mathcal{U}_{31}}{2} = \mathcal{U}''_{12}.$$

În felul acesta se obține $\mathcal{U}'_{12}$ și $\mathcal{U}''_{12}$.

Se construiește apoi $\mathcal{U}'_{23}$ defazat înapoi față de $\mathcal{U}'_{12}$ cu 120° ca în figura 23.188, *b* va fi defazat cu 120° înapoi față de $\mathcal{U}'_{23}$ (în figură nu mai e desenată).

În mod analog față de $\mathcal{U}''_{12}$ e construit în figură $\mathcal{U}''_{23}$ defazat înainte cu 120°.

La descompunerea tensiunilor de borne $\mathcal{U}_{12}$, $\mathcal{U}_{23}$ și $\mathcal{U}_{31}$ în cele două grupe de tensiuni simetrice cu secvențe opuse nu au apărut componentele homopolare, pentru că suma tensiunilor de borne este nulă.

Cînd se formează descompunerea tensiunilor de fază $\mathcal{U}_1$, $\mathcal{U}_2$, $\mathcal{U}_3$ în cîte două grupe de tensiuni simetrice cu secvențe opuse, vor apare și tensiuni homopolare atunci cînd suma lor nu este nulă. S-a relevat că suma tensiunilor de fază e nulă numai atunci cînd ele se suprapun peste medianele triunghiului format din tensiunile de borne.

În figura 23.188, *c* se prezintă tensiunile de fază în forma

$$\begin{aligned} \mathcal{U}_1 &= \Delta\mathcal{U} + \mathcal{U}_1^* \\ \mathcal{U}_2 &= \Delta\mathcal{U} + \mathcal{U}_2^* \\ \mathcal{U}_3 &= \Delta\mathcal{U} + \mathcal{U}_3^*, \end{aligned} \qquad (12)$$

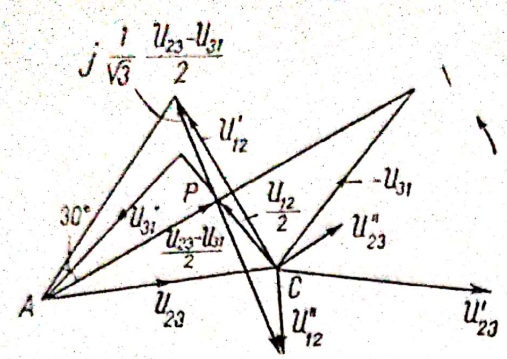
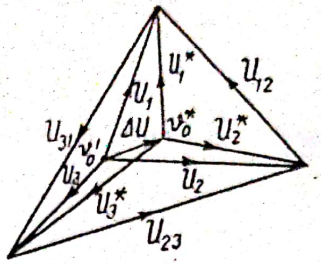


Fig. 23.188, *b*. Determinarea tensiunilor $\mathcal{U}'_{12}$ și $\mathcal{U}''_{12}$



23.188, *c*. Tensiunile de fază.

în care

$$\mathcal{U}_1 + \mathcal{U}_2 + \mathcal{U}_3 = 3 \cdot \Delta\mathcal{U}, \tag{13}$$

$\Delta\mathcal{U}$ formează tensiunea homopolară pentru fiecare fază.

Tensiunile $\mathcal{U}_1^*$, $\mathcal{U}_2^*$, $\mathcal{U}_3^*$ care sînt nesimetrice și a căror sumă e nulă, se descompun în cîte două grupe de tensiuni simetrice cu secvențe opuse.

Avem

$$\begin{aligned}\mathcal{U}_1 &= \Delta\mathcal{U} + \mathcal{U}_1^{*\prime} + \mathcal{U}_1^{*\prime\prime}\\ \mathcal{U}_2 &= \Delta\mathcal{U} + a^2\mathcal{U}_1^{*\prime} + a\mathcal{U}_1^{*\prime\prime}\\ \mathcal{U}_3 &= \Delta\mathcal{U} + a\,\mathcal{U}_1^{*\prime} + a^2\mathcal{U}_1^{*\prime\prime}\end{aligned} \tag{14}$$

în care ΔU reprezintă tensiunea homopolară.

Se obțin

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\mathcal{U}_1^* + \mathrm{j}\frac{1}{\sqrt{3}}\frac{\mathcal{U}_2^* - \mathcal{U}_3^*}{2} &= \mathcal{U}_1^{*\prime}\\ \frac{1}{2}\mathcal{U}_1^* - \mathrm{j}\frac{1}{\sqrt{3}}\frac{\mathcal{U}_2^* - \mathcal{U}_3^*}{2} &= U_1^{*\prime\prime}.\end{aligned} \tag{15}$$

Se formează triunghiul tensiunilor de fază $\mathcal{U}_1^*$, $\mathcal{U}_2^*$, $\mathcal{U}_3^*$ și se procedează ca în exemplul precedent pentru determinarea grafică a tensiunilor $\mathcal{U}_1^{*\prime}$ și $\mathcal{U}_1^{*\prime\prime}$, deoarece suma curenților de linie $\mathcal{I}_1$, $\mathcal{I}_2$, $\mathcal{I}_3$ la un circuit fără conductorul neutru este întotdeauna nulă, înseamnă că se obțin numai două grupe de curenți simetrici cu secvențe opuse deduse din tensiuni.

În cazul unui circuit trifazat cu conductor neutrn ca acela din figura 23.189 avem

$$\mathcal{I}_1 + \mathcal{I}_2 + \mathcal{I}_3 + \mathcal{I}_4 = 0,$$

astfel că

$$\mathcal{I}_1 + \mathcal{I}_2 + \mathcal{I}_3 = -\mathcal{I}_4. \tag{16}$$

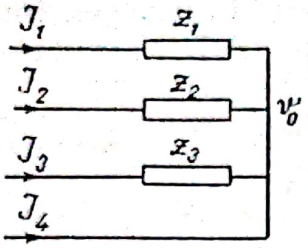


Fig. 23.189. Circuit trifazat cu conductor neutru.

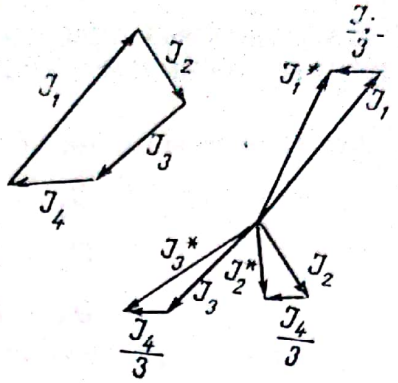


Fig. 23.190. Descompunerea curenților $\mathcal{J}_1$, $\mathcal{J}_2$, $\mathcal{J}_3$

Deoarece suma curenților de fază nu mai este nulă apare și componenta homopolară.

Avem

$$\mathcal{J}_1 = -\frac{\mathcal{J}_4}{3} + \mathcal{J}_1^*$$

$$\mathcal{J}_2 = -\frac{\mathcal{J}_4}{3} + \mathcal{J}_2^*$$

$$\mathcal{J}_3 = -\frac{\mathcal{J}_4}{3} + \mathcal{J}_3^*. \qquad (17)$$

în care

$$\mathcal{J}_1^* + \mathcal{J}_2^* + \mathcal{J}_3^* = 0.$$

În figura 23.190 se prezintă curenții electrici de linie $\mathcal{J}_1$, $\mathcal{J}_2$, $\mathcal{J}_3$, $\mathcal{J}_4$ a căror sumă este nulă.

În baza relațiilor (17) se obțin $\mathcal{J}_1^*$, $\mathcal{J}_2^*$ și $\mathcal{J}_3^*$ a căror sumă este nulă.

Se formează triunghiul cu curenții $\mathcal{J}_1^*$, $\mathcal{J}_2^*$ și $\mathcal{J}_3^*$ și se obțin curenții $\mathcal{J}_1^{*\prime}$ și $\mathcal{J}_1^{*\prime\prime}$ în felul următor:

$$\frac{1}{2}\mathcal{J}_1^* + \mathrm{j}\frac{1}{\sqrt{3}}\frac{\mathcal{J}_2^* - \mathcal{J}_3^*}{2} = \mathcal{J}_1^{*\prime}. \qquad (18)$$

$$\frac{1}{2}\mathcal{J}_1^* - \mathrm{j}\frac{1}{\sqrt{3}}\frac{\mathcal{J}_2^* - \mathcal{J}_3^*}{2} = \mathcal{J}_1^{*\prime\prime}.$$

În triunghiul format din $\mathcal{J}_1^*$, $\mathcal{J}_2^*$ $\mathcal{J}_3^*$ se obține din (18) prin metoda grafică pe $\mathcal{J}_1^{*\prime}$, $\mathcal{J}_1^{*\prime\prime}$.

23.2. DESCOMPUNEREA CURENȚILOR DE LINIE ÎN CURENȚI SIMETRICI CU SECVENȚE OPUSE CÎND CIRCUITUL TRIFAZAT ESTE ÎN TRIUNGHI

Figura 23.191 reprezintă un circuit trifazat în triunghi. Din

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_1 + \mathcal{I}_{31} &= \mathcal{I}_{12} \\ \mathcal{I}_2 + \mathcal{I}_{12} &= \mathcal{I}_{23} \\ \mathcal{I}_3 + \mathcal{I}_{23} &= \mathcal{I}_{31} \end{aligned} \tag{1}$$

rezultă

$$\mathcal{I}_1 + \mathcal{I}_2 + \mathcal{I}_3 = 0. \tag{2}$$

Se cunosc tensiunile de borne $\mathcal{U}_{12}$, $\mathcal{U}_{23}$, $\mathcal{U}_{31}$ a căror sumă e întotdeauna nulă.

Se cunosc de asemenea $z_{12} \neq z_{23} \neq z_{31}$.

În cazul cînd tensiunile de borne nu sînt simetrice, se vor descompune în cele două grupe de tensiuni de borne simetrice, cu secvențe opuse.

În exemplul luat se admite că tensiunile de borne sînt simetrice.

În figura 23.192 se prezintă curenții de linie și curenții de fază ai circuitului trifazat în conectare triunghi.

Se obține

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_{12} &= \frac{\mathcal{U}_{12}}{z_{12}} = \Delta\mathcal{I} + \mathcal{I}'_{12} + \mathcal{I}''_{12} \\ \mathcal{I}_{23} &= \frac{\mathcal{U}_{23}}{z_{23}} = \Delta\mathcal{I} + a^2\,\mathcal{I}'_{12} + a\,\mathcal{I}''_{12} \\ \mathcal{I}_{31} &= \frac{\mathcal{U}_{31}}{z_{31}} = \Delta\mathcal{I} + a\,\mathcal{I}'_{12} + a^2\,\mathcal{I}''_{12} \end{aligned} \tag{3}$$

în care

$$\mathcal{U}_{12} + \mathcal{U}_{23} + \mathcal{U}_{31} = 0 \qquad z_{12} \neq z_{23} \neq z_{31}.$$

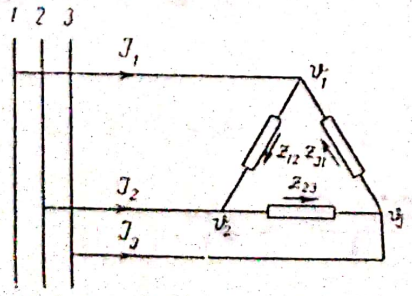


Fig. 23.191. Circuit trifazat în triunghi.

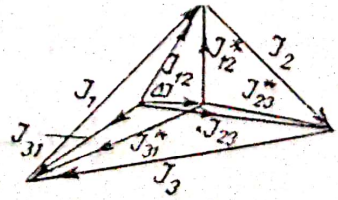


Fig. 23.192. Curenții de linie și curenții de fază.

Din (3) se obţin $\mathcal{I}'_{12}$ şi $\mathcal{I}''_{12}$ în formele

$$\frac{\mathcal{U}_{12}}{z_{12}} + a\frac{\mathcal{U}_{23}}{z_{23}} + a^2\frac{\mathcal{U}_{31}}{z_{31}} = 3\mathcal{I}'_{12} \tag{4}$$

$$\frac{\mathcal{U}_{12}}{z_{12}} + a^2\frac{\mathcal{U}_{23}}{z_{23}} + a\frac{\mathcal{U}_{31}}{z_{31}} = 3\mathcal{I}''_{12}.$$

Deoarece se obţine

$$\mathcal{U}_{12} = a\,\mathcal{U}_{23} = a^2\,\mathcal{U}_{31} \qquad a^2\mathcal{U}_{23} = \mathcal{U}_{31} \qquad a\,\mathcal{U}_{31} = \mathcal{U}_{23} \tag{5}$$

relaţiile (4) devin

$$\mathcal{U}_{12}\left(\frac{1}{z_{12}} + \frac{1}{z_{23}} + \frac{1}{z_{31}}\right) = 3\mathcal{I}'_{12} \tag{6}$$

$$\frac{\mathcal{U}_{12}}{z_{12}} + \frac{\mathcal{U}_{31}}{z_{23}} + \frac{\mathcal{U}_{23}}{z_{31}} = 3\mathcal{I}''_{12} \tag{7}$$

Cînd

$$z_{12} = z_{23} = z_{31},\ \mathcal{I}''_{12} = 0.$$

În figura 23.193 se prezintă cele două grupe de curenţi de fază cu secvenţe opuse.

Ţinîndu-se seama de relaţiile (1) între curenţii de linie şi curenţii de fază se pot introduce în diagramele din figura 23.193 şi curenţii de linie $\mathcal{I}'_1$ respectiv $\mathcal{I}''_1$.

Ca urmare în (6) se înlocuieşte $\mathcal{I}'_{12}$ prin curentul de linie corespunzător. Avem

$$\mathcal{I}'_{12} = \frac{\mathcal{I}'_1}{\sqrt{3}}\,e^{j30°}.$$

În mod analog se înlocuieşte curentul de fază $\mathcal{I}''_{12}$ prin $\mathcal{I}''_1$ în felul următor:

$$\mathcal{I}''_{12} = \frac{\mathcal{I}''_1}{\sqrt{3}}\,e^{-j30°}. \tag{9}$$

Pe de altă parte şi tensiunile înlănţuite $\mathcal{U}_{12}$, $\mathcal{U}_{23}$, $\mathcal{U}_{31}$ care au fost considerate simetrice pot fi înlocuite prin tensiuni de fază.

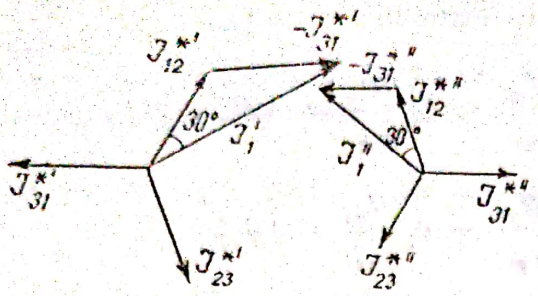


Fig. 23.193. Felul de succedare al celor două grupe de curenți $\mathcal{J}^{*\prime}$ și $\mathcal{J}^{*\prime\prime}$.

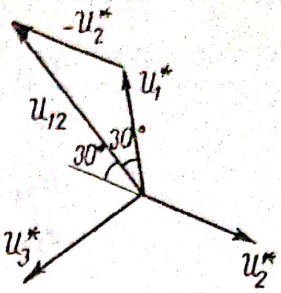


Fig. 23.194. Tensiuni de fază și tensiuni înlănțuite.

Din diagrama din figura 23.194 se obțin.

$$\mathcal{U}_{12} = \mathcal{U}_1^* \sqrt{3}\, e^{j30^\circ}$$

$$\mathcal{U}_{23} = \mathcal{U}_2^* \sqrt{3}\, e^{j30^\circ} \tag{10}$$

$$\mathcal{U}_{31} = \mathcal{U}_3^* \sqrt{3}\, e^{j30^\circ}.$$

Introducînd relația (8) și relația (10) în (6) se obține

$$\mathcal{U}_1^* \left(\frac{1}{z_{12}} + \frac{1}{z_{23}} + \frac{1}{z_{31}} \right) = \mathcal{J}_1'. \tag{11}$$

De asemenea introducînd relațiile (9) și (10) în (7) rezultă

$$\mathcal{U}_1^* \sqrt{3}\, e^{j30^\circ} \frac{1}{z_{12}} + \mathcal{U}_3^* \sqrt{3}\, e^{j30^\circ} \frac{1}{z_{23}} \mathcal{U}_2^* \sqrt{3}\, e^{j30^\circ} \frac{1}{z_{31}} = 3 \frac{\mathcal{J}_1''}{\sqrt{3}}\, e^{-j30^\circ}$$

sau

$$-\left(\frac{\mathcal{U}_2^*}{z_{12}} + \frac{\mathcal{U}_1^*}{z_{23}} + \frac{\mathcal{U}_3^*}{z_{31}} \right) = \mathcal{J}_1''. \tag{12}$$

Se constată că în cazul cînd $z_{12} = z_{23} = z_{31}$ se obține $\mathcal{J}_1'' = 0$ și $\mathcal{J}_1' = \mathcal{J}_1 = 3\mathcal{U}_1^* \frac{1}{z_{12}}$.

În baza relațiilor (14) de la § 22.1 referitor la transfigurări de circuite, se relevă că în cazul cînd avem $z_{12} = z_{23} = z_{131}$, rezultă impedanța echivalentă pentru circuitul în conectare stea $z_1 = \frac{z_{12}}{3}$ astfel că $\mathcal{J}_1'$ din (13) devine

$$\mathcal{J}_1' = \mathcal{U}_1^* \frac{1}{z_1}.$$

Aplicații

În figura 23.195 se consideră impedanța z_{23} conectată la tensiunea de borne $\mathcal{U}_{23}$ de la o rețea trifazată.

Tensiunile de borne se consideră simetrice.
Avem

$$\mathcal{I}_1 = 0$$

$$\mathcal{I}_2 + \mathcal{I}_3 = 0 \tag{1}$$

$$\mathcal{I}_1' = \frac{\mathcal{U}_1^*}{z_{23}} \qquad \mathcal{I}_1'' = -\frac{\mathcal{U}_1^*}{z_{23}}$$

$$\mathcal{I}_1 = \mathcal{I}_1' + \mathcal{I}_1'' = 0.$$

Din diagrama curenților se constată, că prin fixarea curenților $\mathcal{I}_1'$ și $\mathcal{I}_1''$ față de $\mathcal{U}_1^*$ repartizarea celorlalți curenți de fază, ținîndu-se seama de secvența lor, devine cunoscută.

Se constantă, din diagramă că curentul $\mathcal{I}_2$ e perpendicular pe $\mathcal{I}_1'$ și defazat înapoi cu $\pi/2$

Pe de altă parte $\mathcal{I}_{23} = \mathcal{I}_2$ e cunoscut din

$$\mathcal{I}_{23} = \mathcal{I}_2 = \frac{\mathcal{U}_{23}}{z_{23}}. \tag{2}$$

Ca urmare în diagrama de tensiune curentul $\mathcal{I}_2$ e perpendicular pe $\mathcal{I}_1$.
Se obține din diagrama curenților

$$\mathcal{I}_1' = \mathcal{I}_2 \frac{1}{\sqrt{3}} e^{j90^\circ} \tag{3}$$

Relația (3) ne arată că prin determinarea curentului electric $\mathcal{I}_2'$ curenții electrici simetrici cu secvență opusă din rețeaua trifazată devin cunoscuți.

Ei sînt astfel repartizați încît

$$\mathcal{I}_1 = 0 \text{ și } \mathcal{I}_2 + \mathcal{I}_3 = 0.$$

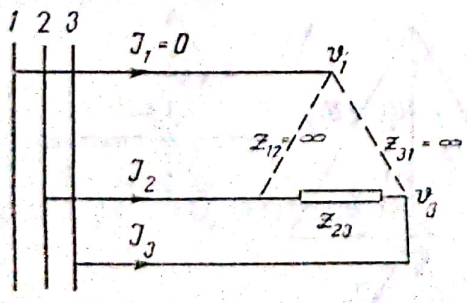


Fig. 23.195. Impedanța z_{23} conectată la o rețea trifazată.

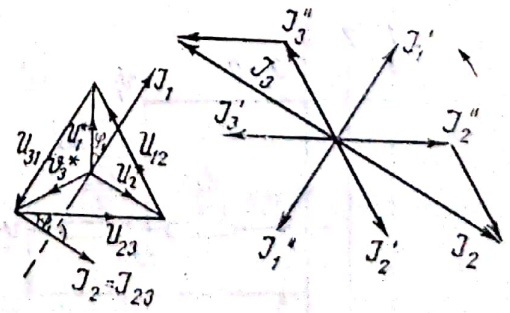


Fig. 23.196. $\mathcal{I}_1'$ față de $\mathcal{U}_1^*$ defazat înapoi cu φ; $\operatorname{tg} \varphi_1 = \frac{x_{23}}{r_{23}}$.

În figura 23.197 se consideră impedanța $\underline{z}_{23}$ împărțită în două părți egale ca și cum ar face parte dintr-un circuit trifazat în conectare stea. Avem

$$\underline{z}_2 = \frac{\underline{z}_{23}}{2}, \quad \underline{z}_3 = \frac{\underline{z}_{23}}{2}, \quad \mathcal{I}_1 = 0, \quad \mathcal{I}_2 + \mathcal{I}_3 = 0,$$

$$\underline{z}_1 = \infty; \quad \underline{z}_2 = \underline{z}_3.$$

Din diagrama tensiunilor din figura 23.198 se obțin tensiunile de fază $\mathcal{U}_2$ și $\mathcal{U}_3$ cu curenții $\mathcal{I}_2$ și $\mathcal{I}_3$.

Se formează

$$\mathcal{I}_1 = \mathcal{I}_1' + \mathcal{I}_1'' = 0$$

$$\mathcal{I}_2 = a^2\mathcal{I}_1' + a\,\mathcal{I}_1''$$

$$\mathcal{I}_3 = a\,\mathcal{I}_1' + a^2\mathcal{I}_1''.$$

Se obține $\mathcal{I}_1'$ din

$$a\,\mathcal{I}_2 + a^2\,\mathcal{I}_3 = 3\mathcal{I}_1'$$

$$(a - a^2)\,\mathcal{I}_2 = 3\mathcal{I}_1'$$

$$\sqrt{3}\,a e^{j30}\,\mathcal{I}_2 = 3\mathcal{I}_1' = \sqrt{3}\,j\mathcal{I}_2$$

sau

$$\mathcal{I}_1' = \frac{1}{\sqrt{3}}\,j\mathcal{I}_2$$

$\mathcal{I}_1''$ este opus lui $\mathcal{I}_1'$ cu 180°.

În figura 23.199 se consideră un circuit în conectare triunghi simetric cu $\underline{z}_{12} = \infty$. Pentru determinarea curenților simetrici de linie cu secvență inversă se determină din (11) și (12)

$$\mathcal{U}_1^*\left(\frac{1}{\underline{z}_{23}} + \frac{1}{\underline{z}_{31}}\right) = \mathcal{I}_1'$$

$$-\left(\frac{\mathcal{U}_1^*}{\underline{z}_{23}} + \frac{\mathcal{U}_3^*}{\underline{z}_{31}}\right) = \mathcal{I}_1'' \qquad (4)$$

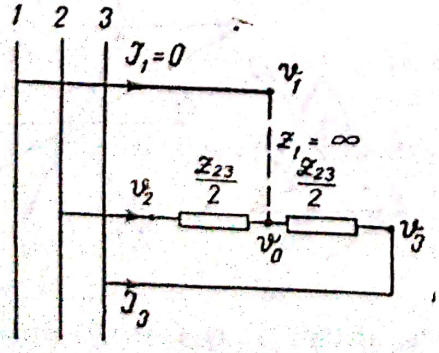


Fig. 23.197 Impedanța $\underline{z}_{23}$ considerată în conectare stea.

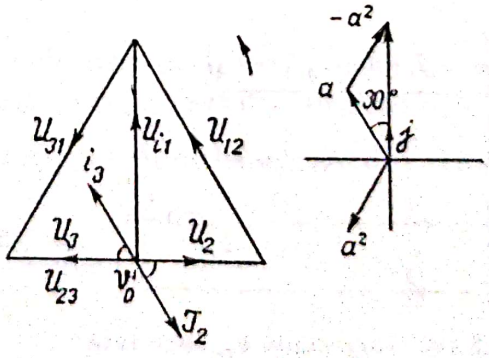


Fig. 23.198. Diagrama tensiunilor $\mathcal{U}_2$ și $\mathcal{U}_3$.

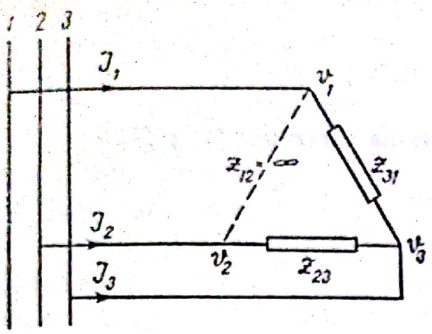


Fig. 23.199. Circuit în conectare V.

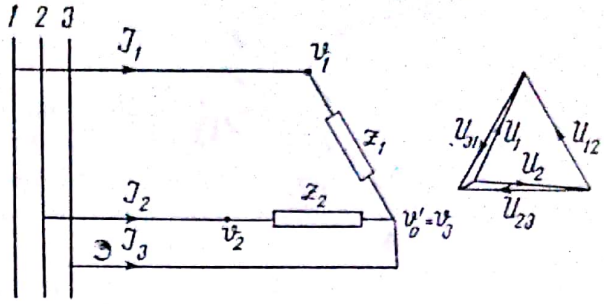


Fig. 23.200. Circuit trifazat în conectare V.

în care

$$\mathcal{J}_1' + \mathcal{J}_1'' = \mathcal{J}_1; \quad \mathcal{J}_2' + \mathcal{J}_2'' = \mathcal{J}_2; \quad \mathcal{J}_3' + \mathcal{J}_3'' = \mathcal{J}_3. \tag{5}$$

Pe cale grafică, prin formarea diagramei curenților simetrici cu secvență inversă, se obțin curenții nesimetrici pe linie $\mathcal{J}_1$, $\mathcal{J}_2$ și $\mathcal{J}_3$.

Același circuit din schema din figura 23.200 poate fi considerat ca un circuit trifazat în conectare V ca în figura 23.199.

Avem

$$z_3 = 0 \qquad z_1 = z_{31} \qquad z_2 = z_{23}.$$

În diagrama tensiunilor din figură avem

$$\mathcal{U}_1 = -\mathcal{U}_{31}$$

$$\mathcal{U}_2 = \mathcal{U}_{23}$$

astfel că

$$\mathcal{J}_1 = -\frac{\mathcal{U}_{31}}{z_1} \qquad \mathcal{J}_2 = \frac{\mathcal{U}_{23}}{z_2} \tag{6}$$

iar din

$$\mathcal{J}_1 + \mathcal{J}_2 + \mathcal{J}_3 = 0 \tag{7}$$

se deduc

$$\mathcal{J}_3 = -(\mathcal{J}_1 + \mathcal{J}_2).$$

Se descompun curenții $\mathcal{J}_1$, $\mathcal{J}_2$, $\mathcal{J}_3$ în cele două grupe de curenți simetrici cu secvențe inverse.

În diagrama din figura 23.201 se prezintă curenții $\mathcal{J}_1'$ și $\mathcal{J}_1''$ determinați grafic pe baza relațiilor (8).

$$\frac{1}{2}\mathcal{J}_1 + \mathrm{j}\,\frac{1}{\sqrt{3}}\,\frac{\mathcal{J}_2 - \mathcal{J}_3}{2} = \mathcal{J}_1'$$

$$\frac{1}{2}\mathcal{J}_1 - \mathrm{j}\,\frac{1}{\sqrt{3}}\,\frac{\mathcal{J}_2 - \mathcal{J}_3}{2} = \mathcal{J}_1'' \tag{8}$$

Scanned with OKEN Scanner

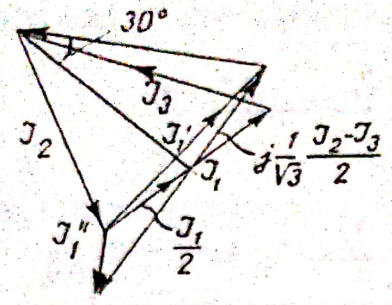


Fig. 23.201. Diagrama curenților $\mathcal{I}_1'$ și $\mathcal{I}_1''$.

Se înlocuiește $\mathcal{I}_3$ prin $-(\mathcal{I}_1+\mathcal{I}_2)$.
Se obține

$$\frac{\mathcal{I}_1}{2}+\mathrm{j}\,\frac{1}{\sqrt{3}}\,\frac{1}{2}(\mathcal{I}_2+\mathcal{I}_1+\mathcal{I}_2)=\frac{\mathcal{I}_1}{2}\left(1+\mathrm{j}\,\frac{1}{\sqrt{3}}\right)+$$

$$+\mathrm{j}\,\frac{1}{\sqrt{3}}\mathcal{I}_2-\mathcal{I}_1'$$

în care

$$1+\mathrm{j}\,\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{2}{\sqrt{3}}\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}30^\circ}$$

ca urmare

$$\mathcal{I}_1\,\frac{1}{\sqrt{3}}\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}30^\circ}+\mathrm{j}\,\frac{1}{\sqrt{3}}\mathcal{I}_2=\mathcal{I}_1'$$

sau

$$-\frac{\mathcal{U}_{31}}{z_1}\,\frac{1}{\sqrt{3}}\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}30^\circ}+\mathrm{j}\,\frac{1}{\sqrt{3}}\,\frac{\mathcal{U}_{23}}{z_{23}}=\mathcal{I}_1.$$

Introducîndu-se tensiunile $\mathcal{U}_1^*$, $\mathcal{U}_2^*$, $\mathcal{U}_3^*$, se obține

$$\mathcal{U}_1^*\left(\frac{1}{z_1}+\frac{1}{z_2}\right)=\mathcal{I}_1'. \tag{9}$$

Se relevă că din relațiile (14) din paragraful 22.1 referitor la transfigurări de circuite se obține pentru $z_3=0$

$$z_{32}=z_2,\ z_{31}=z_1,\ z_{12}=\infty.$$

Curentul $\mathcal{I}_1''$ din (8) mai poate lua forma

$$\frac{\mathcal{I}_1}{2}\left(1-\mathrm{j}\,\frac{1}{\sqrt{3}}\right)-\mathrm{j}\,\frac{1}{\sqrt{3}}\mathcal{I}_2=\mathcal{I}_1''$$

sau

$$\frac{\mathcal{I}_1}{\sqrt{3}}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}30^\circ}-\mathrm{j}\,\frac{1}{\sqrt{3}}\mathcal{I}_2=\mathcal{I}_1''$$

Scanned with OKEN Scanner

Prin introducerea tensiunilor $-\mathcal{U}_{31}$ și $\mathcal{U}_{23}$ se obține

$$-\frac{\mathcal{U}_{31}}{z_1}\frac{1}{\sqrt{3}}e^{j30^\circ}-j\frac{1}{\sqrt{3}}\frac{\mathcal{U}_{23}}{z_2}=-\left(\frac{\mathcal{U}_2^*}{z_1}+\frac{\mathcal{U}_1^*}{z_2}\right)=\mathcal{I}_1''. \tag{10}$$

Relațiile (9) și (10) ne arată în cazul circuitelor trifazate în conectare V, care este nesimetria curenților de linie în rețele trifazate.

Cînd circuitul monofazat cu impedanța z_{23} este conectat la o rețea trifazată la tensiunea $\mathcal{U}_{23}$ este posibil să se introducă la aceeași rețea circuite cu capacități sau inductivități ca acelea din figura 23.202 în așa fel încît curenții electrici rezultanți pe linie să apară simetrici. Tensiunile de borne sînt simetrice.

Se dau

$$z_{23}=r_{23};\quad z_{23C}=-j\frac{1}{\omega C_{23}};\quad z_{31C}=-j\frac{1}{\omega C_{31}}.$$

Se obține

$$\mathcal{I}_1=\mathcal{I}_1'+\mathcal{I}_1''=0$$
$$\mathcal{I}_2=\mathcal{I}_2'+\mathcal{I}_2''$$
$$\mathcal{I}_3=\mathcal{I}_3'+\mathcal{I}_3''$$
$$\mathcal{I}_2+\mathcal{I}_3=0.$$

S-a considerat impedanța $z_{23}=r_{23}$. Ca urmare se obține $\mathcal{I}_2=\frac{\mathcal{U}_{23}}{r_{23}}$ iar din relația (3) se obține $\mathcal{I}_1'=\mathcal{I}_2\frac{1}{\sqrt{3}}e^{j90^\circ}$.

Curentul $\mathcal{I}_1'$ este în fază cu $\mathcal{U}_1^*$ vezi diagrama din figura 23.203.

Se introduce circuitul capacitiv ca în figură și se cere să se determine capacitățile C_{23} și C_{31} așa fel încît curenții totali să apară simetrici.

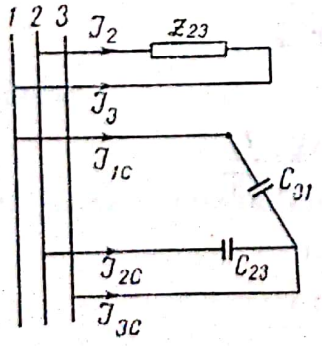


Fig. 23.202. Realizarea simetriei la curenții de linie prin circuite capacitive.

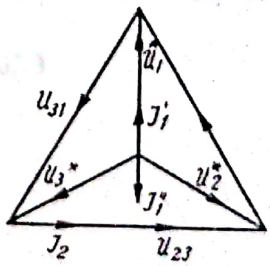


Fig. 23.203. Diagrama tensiunilor.

Scanned with OKEN Scanner

Se obţin

$$\mathcal{I}_{1C} = \mathcal{I}'_{1C} + \mathcal{I}''_{1C}$$
$$\mathcal{I}_{2C} = \mathcal{I}'_{2C} + \mathcal{I}''_{2C}$$
$$\mathcal{I}_{3C} = \mathcal{I}'_{3C} + \mathcal{I}''_{3C}$$

Ca urmare pe linie apar curenţii simetrici $\mathcal{I}'_1 + \mathcal{I}'_{1C}$; $\mathcal{I}'_2 + \mathcal{I}'_{2C}$ şi $\mathcal{I}'_3 + \mathcal{I}'_{3C}$. C_{23} şi C_{31} vor fi aşa fel determinaţi, încît să se obţină

$$\mathcal{I}''_1 + \mathcal{I}''_{1C} = 0, \quad \mathcal{I}''_2 + \mathcal{I}''_{2C} = 0, \quad \mathcal{I}''_3 + \mathcal{I}''_{3C} = 0$$

Din (11) şi (12) § 23.2 se obţin

$$\mathcal{I}'_1 = \mathcal{U}_1^* \frac{1}{r_{23}} \qquad \mathcal{I}''_1 = -\frac{\mathcal{U}_1^*}{r_{23}}$$

în care

$$I'_1 = \frac{I_2}{\sqrt{3}}.$$

De asemenea pentru $z_{12C} = \infty$ se obţine

$$\mathcal{I}'_{1C} = \mathcal{U}_1^*(\mathrm{j}\,\omega C_{23} + \mathrm{j}\,\omega C_{31})$$
$$\mathcal{I}''_{1C} = -(\mathcal{U}_1^*\,\mathrm{j}\,\omega C_{23} + \mathcal{U}_3^*\,\mathrm{j}\,\omega C_{31}) = -\mathcal{I}''_1.$$

Din diagrama din figura 23.204 se obţine

$$\mathcal{U}_1^*\,\mathrm{j}\,\omega C_{23} + \mathcal{U}_3^*\,\mathrm{j}\,\omega C_{31} = \mathcal{I}''_1.$$

Se formează un triunghi dreptunghic.
Din figură se obţine

$$U_3^*\omega C_{31}\cos 60 = U_1\omega C_{23}$$

de unde se deduc

$$C_{31} = 2C_{23}.$$

Pe de altă parte se obţine

$$U_3^*\omega C_{31}\frac{\sqrt{3}}{2} = I''_1 = \frac{I_2}{\sqrt{3}}$$

astfel că

$$C_{31} = \frac{2I_2}{3\omega U_3^*}.$$

În figura 23.205 se prezintă schema pentru realizarea simetriei curenţilor de linie cu ajutorul unor circuite cu inductivităţi.

Scanned with OKEN Scanner

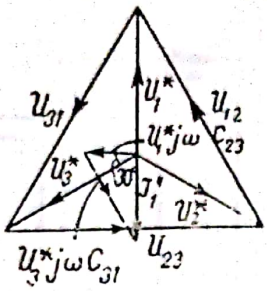


Fig. 23.204. Determinarea capacităţilor.

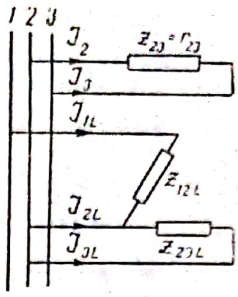


Fig. 23.205. Realizarea simetriei la curenţii de linie prin circuite inductive.

Se introduc

$$z_{12L} = \mathrm{j}\,\omega L_{12}$$

$$z_{23L} = \mathrm{j}\,\omega L_{23}$$

$$z_{31L} = \infty.$$

Se ţine seama de

$$\mathcal{J}_1'' + \mathcal{J}_{1L}'' = 0$$

astfel că

$$\mathcal{J}_{1L}'' = -\left(-\frac{\mathcal{U}_2^*}{\omega L_{12}}\,\mathrm{j} - \frac{\mathcal{U}_1^*}{\omega L_{23}}\,\mathrm{j}\right) = -\,\mathcal{J}_1''$$

de unde rezultă

$$-\frac{\mathcal{U}_2^*\mathrm{j}}{\omega L_{12}} - \frac{\mathcal{U}_1^*}{\omega L_{23}}\,\mathrm{j} = \mathcal{J}_1''.$$

Din diagrama din figura 23.206 se obţine

$$\frac{U_2^*}{\omega L_{12}}\,\frac{1}{2} = \frac{U_1^*}{\omega L_{23}}$$

de unde se deduc

$$2L_{12} = L_{23}.$$

Pe de altă parte se mai obţine

$$\frac{U_2^*}{\omega L_{12}}\,\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{I_2}{\sqrt{3}}$$

de unde se deduce

$$L_{12} = \frac{U_2^* \cdot 3}{2\omega I_2}.$$

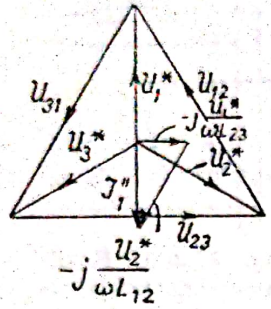


Fig. 23.206. Determinarea inductivităţilor.

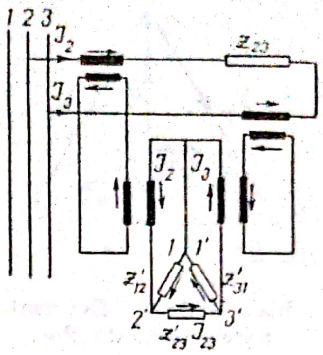


Fig. 23.207. Determinarea experimentală a lui $\mathcal{I}_1'$.

În figura 23.207 se reprezintă schema pentru măsurarea curentului $\mathcal{I}_1''$ ca un criteriu al nesimetriei.

Cu ajutorul a două transformatoare de curent se introduc curenţii $\mathcal{I}_2$ şi $\mathcal{I}_3$ în circuitul de la mijloc.

În partea de jos apare un circuit în triunghi.

În punctele de derivaţie ale circuitului în triunghi avem

$$\mathcal{I}_2 + \mathcal{I}_{12} = \mathcal{I}_{23}$$

$$\mathcal{I}_3 + \mathcal{I}_{31} = \mathcal{I}_{23}$$

în care

$$\mathcal{I}_2 = \mathcal{I}_2' + \mathcal{I}_2'' = a^2\mathcal{I}_1' + a\mathcal{I}_1'' \qquad (11)$$

$$\mathcal{I}_3 = \mathcal{I}_3' + \mathcal{I}_3'' = a\mathcal{I}_1' + a^2\mathcal{I}_1''.$$

Se mai formează

$$\mathcal{I}_{12}z'_{12} + \mathcal{I}_{23}z'_{23} + \mathcal{I}_{31}z'_{31} = 0$$

în care se introduce

$$\mathcal{I}_{12} = \mathcal{I}_{23} - \mathcal{I}_2 \text{ şi } \mathcal{I}_{31} = \mathcal{I}_{23} - \mathcal{I}_3$$

de unde se obţine $\mathcal{I}_{23}$ în forma

$$\mathcal{I}_{23} = \frac{\mathcal{I}_2 z'_{12} + \mathcal{I}_3 z'_{31}}{z'_{12} + z'_{23} + z'_{31}}. \qquad (12)$$

Se prezintă $\mathcal{I}_2$ şi $\mathcal{I}_3$ prin $\mathcal{I}_1'$ şi $\mathcal{I}_1''$ din (11).

Se obţine

$$\mathcal{I}_{23} = \frac{(a^2\mathcal{I}_1' + a\mathcal{I}_1'')\,z'_{12} + (a\mathcal{I}_1' + a^2\mathcal{I}_1'')\,z'_{31}}{z'_{12} + z'_{23} + z'_{31}}$$

sau

$$\mathcal{I}_{23} = \frac{\mathcal{I}_1'(a^2 z_{12}' + a z_{31}') + \mathcal{I}_1''(a z_{12}' + a^2 z_{31}')}{z_{12}' + z_{23}' + z_{31}'}.$$

Se realizează

$$a^2 z_{12}' + a z_{31}' = 0$$

de unde se deduc

$$z_{12}' = -a^2 z_{31}'.$$

Ca urmare rezultă

$$\mathcal{I}_1''(a z_{12}' + a^2 z_{31}') = \mathcal{I}_1''(-z_{31}' + a^2 z_{31}') = -\mathcal{I}_1'' z_{31}'(1 - a^2)$$

astfel că

$$\mathcal{I}_{23} = \frac{-\mathcal{I}_1'' z_{31}'(1 - a^2)}{-a^2 z_{31}' + z_{23}' + z_{31}'} = \frac{-\mathcal{I}_1'' z_{31}'(1 - a^2)}{z_{23}' + z_{31}'(1 - a^2)}.$$

Admitem că z_{23}' ca impedanță a unui ampermetru e neglijabilă față de $z_{31}(1 - a^2)$, astfel că

$$\mathcal{I}_{23} = -\mathcal{I}_1''.$$

24. PUTEREA ELECTROMAGNETICĂ TOTALĂ LA UN CIRCUIT TRIFAZAT

În figura 24.208 se consideră un circuit trifazat în conectare stea nesimetric $z_1 + z_2 + z_3$ (conectat la o rețea trifazată cu tensiuni de borne nesimetrice).

Tensiunile de fază iau forma

$$\begin{aligned} \mathcal{U}_1 &= \Delta\mathcal{U} + \mathcal{U}_1^* = \Delta\mathcal{U} + \mathcal{U}_1^{*\prime} + \mathcal{U}_1^{*\prime\prime} \\ \mathcal{U}_2 &= \Delta\mathcal{U} + \mathcal{U}_2^* = \Delta\mathcal{U} + a^2\mathcal{U}_1^{*\prime} + a\mathcal{U}_1^{*\prime\prime} \\ \mathcal{U}_3 &= \Delta\mathcal{U} + \mathcal{U}_3^* = \Delta\mathcal{U} + a\mathcal{U}_1^{*\prime} + a^2\mathcal{U}_1^{*\prime\prime} \end{aligned} \qquad (1)$$

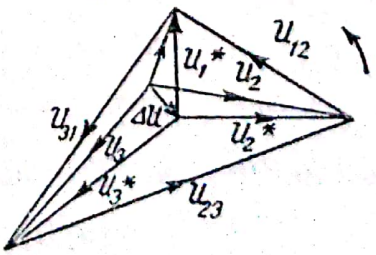


Fig. 24.208. Tensiuni de borne nesimetrice la un circuit trifazat nesimetric.

Curenţii devin

$$\begin{aligned}
&\mathcal{I}_1 + \mathcal{I}_2 + \mathcal{I}_3 = 0\\
&\mathcal{I}_1 = \mathcal{I}_1' + \mathcal{I}_1''\\
&\mathcal{I}_2 = a^2\mathcal{I}_1' + a\mathcal{I}_1''\\
&\mathcal{I}_3 = a\mathcal{I}_1' + a^2\mathcal{I}_1''
\end{aligned} \tag{2}$$

Să stabilim puterea aparanetă totală.
În acest scop se introduc conjugatele tensiunilor de fază

$$\begin{aligned}
&\overline{\mathcal{U}}_1 = \Delta\overline{\mathcal{U}} + \overline{\mathcal{U}}_1^{\bullet\prime} + \overline{\mathcal{U}}_1^{\bullet\prime\prime}\\
&\overline{\mathcal{U}}_2 = \Delta\overline{\mathcal{U}} + a\overline{\mathcal{U}}_1^{\bullet\prime} + a^2\overline{\mathcal{U}}_1^{\bullet\prime\prime}\\
&\overline{\mathcal{U}}_3 = \Delta\overline{\mathcal{U}} + a^2\overline{\mathcal{U}}_1^{\bullet\prime} + a\overline{\mathcal{U}}_1^{\bullet\prime\prime}.
\end{aligned} \tag{3}$$

Puterea aparentă totală devine

$$\begin{aligned}
\mathcal{P}_a = \overline{\mathcal{U}}_1\mathcal{I}_1 + \overline{\mathcal{U}}_2\mathcal{I}_2 + \overline{\mathcal{U}}_3\mathcal{I}_3 = (\overline{\mathcal{U}}_1^{\bullet\prime}\mathcal{I}_1' + a\overline{\mathcal{U}}_1^{\bullet\prime}a^2\mathcal{I}_1' + a^2\overline{\mathcal{U}}_1^{\bullet\prime}a\mathcal{I}_1') +\\
+ (\overline{\mathcal{U}}_1^{\bullet\prime\prime}\mathcal{I}_1'' + a^2\overline{\mathcal{U}}_1^{\bullet\prime\prime}a\mathcal{I}_1'' + a\overline{\mathcal{U}}_1^{\bullet\prime\prime}a^2\mathcal{I}_1'') + (\overline{\mathcal{U}}_1^{\bullet\prime}\mathcal{I}_1'' +\\
+ a\overline{\mathcal{U}}_1^{\bullet\prime}a\mathcal{I}_1'' + a^2\overline{\mathcal{U}}_1^{\bullet\prime}a^2\mathcal{I}_1'') + (\overline{\mathcal{U}}_1^{\bullet\prime\prime}\mathcal{I}_1' + a^2\overline{\mathcal{U}}_1^{\bullet\prime\prime}a^2\mathcal{I}_1' +\\
+ a\overline{\mathcal{U}}_1^{\bullet\prime\prime}a\mathcal{I}_1') = 3\overline{\mathcal{U}}_1^{\bullet\prime}\mathcal{I}_1' + 3\overline{\mathcal{U}}_1^{\bullet\prime\prime}\mathcal{I}_1''.
\end{aligned} \tag{4}$$

Din (4) reiese că numai tensiunile şi curenţii cu aceeaşi secvenţă contribuie la formarea puterilor aparente, deci şi la puterile reale şi reactive.

În ce priveşte expresia puterii electromagnetice totale momentane în forma

$$p = u_1i_1 + u_2i_2 + u_3i_3 \tag{5}$$

ea poate fi exprimată şi în forma

$$p = u_1^{\bullet}i_1 + u_2^{\bullet}i_2 + u_3^{\bullet}i_3 \tag{6}$$

deoarece

$$\Delta u(i_1 + i_2 + i_3) = 0.$$

Ca urmare puterea momentană totală devine

$$\begin{aligned}
p = (u_1^{\bullet\prime} + u_1^{\bullet\prime\prime})(i_1' + i_1'') + (u_2^{\bullet\prime} + u_2^{\bullet\prime\prime})(i_2' + i_2'') +\\
+ (u_3^{\bullet\prime} + u_3^{\bullet\prime\prime})(i_3' + i_3'') = (u_1^{\bullet\prime}i_1' + u_2^{\bullet\prime}i_2' + u_3^{\bullet\prime}i_3') +\\
+ (u_1^{\bullet\prime\prime}i_1'' + u_2^{\bullet\prime\prime}i_2'' + u_3^{\bullet\prime\prime}i_3'') + (u_1^{\bullet\prime}i_1'' + u_2^{\bullet\prime}i_2'' + u_3^{\bullet\prime}i_3'') +\\
+ (u_1^{\bullet\prime\prime}i_1' + u_2^{\bullet\prime\prime}i_2' + u_3^{\bullet\prime\prime}i_3').
\end{aligned} \tag{7}$$

Scanned with OKEN Scanner

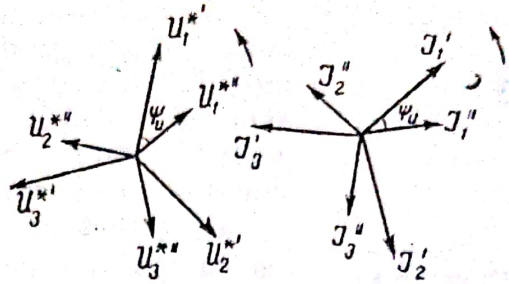


Fig. 24.209. Diagrama tensiunilor şi a curenţilor nesimetrici.

Ţinîndu-se seama de diagramele tensiunilor şi a curenţilor nesimetrici din figura 24.209 în care atît tensiunile cît şi curenţii electrici sînt exprimate prin tensiuni şi curenţi simetrici cu secvenţe inverse, cele patru grupe de sume din (7) se reprezintă în felul următor

$$p = \sqrt{2}\, U_1^{*\prime} \sqrt{2}\, I_1' [\sin \omega t \sin (\omega t - \varphi_1^{*\prime}) + \sin (\omega t - 120) \sin (\omega t - 120 - \varphi_1^{*\prime}) + \sin (\omega t - 240) \sin (\omega t - 240 - \varphi_1^{*\prime})] +$$
$$+ \sqrt{2}\, U_1^{*\prime\prime} \sqrt{2}\, I_1'' [\sin (\omega t - \psi_0) \sin (\omega t - \psi_0 - \varphi_1^{*\prime\prime}) +$$
$$+ \sin (\omega t - \psi_0 + 120) \sin (\omega t - \psi_0 + 120 - \varphi_1^{*\prime\prime}) +$$
$$+ \sin (\omega t - \psi_0 + 240) \sin (\omega t - \psi_0 + 240 - \varphi_1^{*\prime\prime})] +$$
$$+ \sqrt{2}\, U_1^{*\prime} \sqrt{2}\, I_1'' [\sin \omega t \sin (\omega t - \psi_0 - \varphi_1^{*\prime\prime}) + \sin (\omega t - 120). \quad (8)$$
$$\sin (\omega t - \psi_0 + 120 - \varphi_1^{*\prime\prime}) + \sin (\omega t - 240) \sin (\omega t - \psi_0 + 240 - \varphi_1^{*\prime\prime})] +$$
$$+ \sqrt{2}\, U_1^{*\prime\prime} \sqrt{2}\, I_1' [\sin (\omega t - \psi_0) \sin (\omega t - \varphi_1^{*\prime}) +$$
$$+ \sin (\omega t - \psi_0 + 120) \sin (\omega t - 120 - \varphi_1^{*\prime}) +$$
$$+ \sin (\omega t - \psi_0 + 240) \sin (\omega t - 240 - \varphi_1^{*\prime})].$$

Folosindu-se descompunerea produsului sin α sin β

$$\sin \alpha \sin \beta = \frac{1}{2} [\cos (\alpha - \beta) - \cos (\alpha + \beta)]$$

puterea momentană totală (8) ia forma

$$p = 3U_1^* I_1' \cos \varphi_1^* + 3U_1^{*\prime\prime} I_1'' \cos \varphi_1^{*\prime\prime} -$$
$$- 3U_1^{*\prime} I_1'' \cos (2\omega t - \psi_0 - \varphi_1^{*\prime\prime}) - 3U_1^{*\prime\prime} I_1' \cos (2\omega t - \psi_0 - \varphi_1^{*\prime}). \quad (9)$$

Relaţia (9) ne arată, că valoarea momentană a puterii electromagnetice totale se compune din două valori constante în timp şi anume pentru tensiuni şi curenţi simetrici cu aceeaşi secvenţă, şi din două funcţii cosinusoidale de timp cu frecvenţa circulară dublă, care corespund tensiunilor şi curenţilor simetrici cu secvenţe opuse.

Scanned with OKEN Scanner

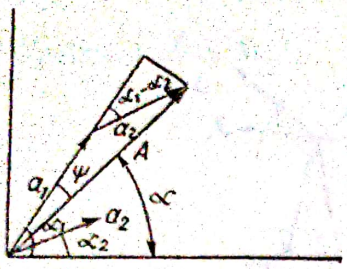


Fig. 24.210. Diagrama amplitudinilor.

În expresia puterii medii în raport cu o perioadă, valorile medii ale celor două funcții cosinusoidale de timp devin nule. Așa se face că în expresia (4) apar puterile medii în raport cu o perioadă, care corespund tensiunilor și curenților simetrici cu aceleași frecvențe.

Conectînd un motor asincron trifazat la o rețea cu tensiuni de borne simetrice, puterea electromagnetică momentană preluată de motor este constantă. Ca urmare datorită axiomei a patra „la transformări de energie prin intermediul lucrului mecanic, apare existența forțelor" înseamnă că în cazul motorului asincron cuplul produs în timp este constant, deoarece lucrul mecanic efectuat e constant în timp.

Suma celor două puteri instantanee din (9) care apare ca funcții cosinusoidale de timp, se poate efectua cu ajutorul diagramei amplitudinilor din figura 24.210.

Se introduc

$$\begin{aligned} a_1 \cos \alpha_1 &= 3U_1''I_1'' \cos (2\omega t - \psi_0 - \varphi_1''') \\ a_2 \cos \alpha_2 &= 3U_1'''I_1' \cos (2\omega t - \psi_0 - \varphi_1''). \end{aligned} \tag{10}$$

Din diagrama amplitudinilor rezultă

$$\begin{aligned} A^2 &= (a_1 \cos \alpha_1 + a_2 \cos \alpha_2)^2 + (a_1 \sin \alpha_1 + a_2 \sin \alpha_2)^2 = \\ &= a_1^2 + a_2^2 + 2a_1a_2 \cos (\alpha_1 - \alpha_2) \end{aligned} \tag{11}$$

de unde se deduce amplitudinea A a forței cosinusoidale rezultante ca funcție de $\alpha = \alpha_1 - \psi$ în care tg ψ este cunoscută din

$$\operatorname{tg} \psi = \frac{a_2 \sin (\alpha_1 - \alpha_2)}{a_1 + a_2 \cos (\alpha_1 - \alpha_2)}. \tag{12}$$

25. COMPARAȚIA ÎNTRE TRANSPORTUL DE ENERGIE CU O LINIE MONOFAZATĂ ȘI CU O LINIE POLIFAZATĂ

Deosebim două cazuri după cum numărul de faze n este impar sau par.

Condițiile de comparație:

Tensiunea de borne de la linia monofazată să fie egală cu tensiunea înlănțuită maximă de la linia polifazată.

Se consideră un regim sinusoidal. Se transportă aceeași putere electromagnetică la același cos φ. Conductoarele de transport de energie au aceeași lungime și se produc aceleași pierderi de energie pe linie.

Scanned with OKEN Scanner

Cazul m impar.

Figura 25.211 reprezintă diagrama tensiunilor de fază U pentru $m = 5 \cdot U_b$ reprezintă tensiunea cea mai mare înlănțuită.

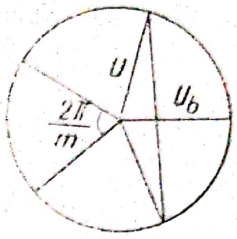


Fig. 25.211. Cea mai mare tensiune înlănțuită U_b pentru $m = 5$.

Avem

$$U_b = 2U \sin\left(\frac{m-1}{2}\,\frac{2\pi}{m}\right)\frac{1}{2} = 2U \sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2m}\right) = 2U \cos\frac{\pi}{2m}.$$

pentru $m = 3$ $\quad U_b = U\sqrt{3} = U \cdot 1{,}73$

pentru $m = 5$ $\quad U_b = 2U \cos 18° = U \cdot 0{,}9511 \cdot 2 = U \cdot 1{,}9.$

Pentru sistemul monofazat cu $U = U_b$ avem

$$P = U_b I \cos\varphi$$

$$P_C = \frac{p\%}{100} P = I_1^2\, 2\rho \frac{1}{S_1} \frac{U_b^2 \cos^2\varphi}{U_b^2 \cos^2\varphi}$$

$$p\% = \frac{\rho \cdot 10^3 \cdot 2 \cdot P^{kW} l^{km}}{S_1^{mm^2} U_b^2 \cos^2\varphi}$$

$$G_{Cu_1} = 2l^{km} \cdot 10^4 S_1^{mm^2} \cdot 10^{-4} \gamma^{kg/dm^3} = \frac{\rho \cdot 10^3 \cdot 4P^{kW} l_{km}^2 \gamma}{p\%\, U_b^2 \cos^2\varphi}.$$

Pentru sistemul trifazat

$$P = 3UI_3 \cos\varphi = \sqrt{3} U_b I_3 \cos\varphi$$

$$P_C = \frac{p\%}{100} P = I_3^2\, 3\rho \frac{l}{S_3} \frac{(\sqrt{3}\, U_b \cos\varphi)^2}{(\sqrt{3}\, U_b \cos\varphi)^2}$$

$$p\% = \frac{\rho \cdot 10^3 \cdot P^{kW} l^{km}}{S_3^{mm^2} U_b^2 \cos^2\varphi}$$

$$G_{Cu_3} = 3l^{km} \cdot 10^4 S_3^{mm^2} \cdot 10^{-4} \gamma^{kg/dm^3} = \frac{\rho \cdot 10^3 \cdot 3P^{kW} l^{km} \gamma}{p\%\, U_b^2 \cos^2\varphi}.$$

Scanned with OKEN Scanner

Pentru sistemul cu $m = 5$ faze

$$P = 5UI_5 \cos\varphi = 5\frac{U_b}{1{,}9} I_5 \cos\varphi$$

$$P_C = \frac{p\%}{100} P = I_5^2 \cdot 5\rho \frac{l}{S_5} \frac{\left(\frac{5}{1{,}9} U_b \cos\varphi\right)^2}{\left(\frac{5}{1{,}9} U_b \cos\varphi\right)^2}$$

$$p\% = \frac{\rho \cdot 10^8 \cdot 1{,}9^2 P^{kW} l^{km}}{5 \cdot S_5^{mm^2} U_b^2 \cos^2\varphi}$$

$$G_{Cu_5} = 5l^{km} \cdot S_5^{mm^2}\gamma^{kg/dm^3} = \frac{\rho \cdot 10^8 \cdot 1{,}9 \cdot P^{kW} l_{km}^2 \gamma}{p\% U_b^2 \cos^2\varphi}.$$

Din cele prezentate mai sus pentru m impar se obține

$$\frac{S_3}{S_1} = \frac{1}{2}; \quad \frac{G_{Cu3}}{G_{Cu1}} = \frac{3}{4}; \quad \frac{S_5}{S_1} = \frac{1{,}9}{2{,}5} = 0{,}36; \quad \frac{G_{Cu5}}{G_{Cu1}} = \frac{1{,}9^2}{4} = 0{,}9$$

Numai în cazul sistemului trifazat se obține cea mai mare economie de material.

Cazul m par

Figura 25.212 reprezintă diagrama tensiunilor de fază U pentru $m = 4$. Tensiunea înlănțuită cea mai mare este $U_b = 2U$.
Pentru sistemul de patru faze se obține:

$$P = 4UI_4 \cos\varphi = 2U_b I_4 \cos\varphi$$

$$P_C = \frac{P\%}{100} P = I_4^2 4\rho \frac{l}{S_4} \frac{(2U_b \cos\varphi)^2}{(2U_b \cos\varphi)^2}$$

$$p\% = \frac{\rho \cdot 10^8 P^{kW} l^{km}}{S_4^{mm^2} U_b^2 \cos^2\varphi}$$

$$G_{Cu_4} = 4l^{km} \cdot 10^4 S_4^{mm^2} \cdot 10^{-4} \gamma^{kg/dm^3} =$$

$$= \frac{\rho \cdot 10^8 \cdot 4 \cdot P^{kW} l_{km}^2 \gamma}{p\% \cdot U_b^2 \cos^2\varphi}.$$

Se vede că nu se obține o economie de material față de linia monofazată.
În cazul sistemului bifazat ($m = 2$) defazarea dintre faze nu mai corespunde regulii $\frac{2\pi}{m}$ deoarece pentru a apare la motoarele bifazate un cîmp magnetic învirtitor, e necesar ca cei doi curenți care circulă în cele două

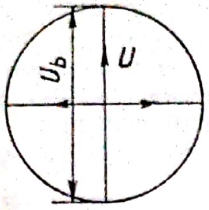


Fig. 25.212. Cea mai mare tensiune înlănțuită U_b pentru $m = 4$.

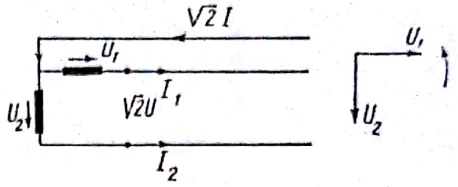


Fig. 25.213. Generator bifazat.

bobine ale motorului să fie defazați în timp cu $\frac{\pi}{2}$. Bobinele sînt decalate în spațiu tot cu $\frac{\pi}{2}$ electric.

În figura 25.213 se reprezintă un generator bifazat.

Se obține

$$P = 2UI_2 \cos\varphi = 2\frac{U_b}{\sqrt{2}} I_2 \cos\varphi = \sqrt{2}\, U_b I_2 \cos\varphi$$

$$P_C = \frac{p\%}{100} P = I_2^2\, 2\rho \frac{l}{S_2} + (\sqrt{2}\, I_2)^2\, \rho \frac{l}{\sqrt{2}\, S_2} =$$

$$= I_2^2(2 + \sqrt{2})\, \rho \frac{l}{S_2} \frac{(\sqrt{2}\, U_b \cos\varphi)^2}{(\sqrt{2}\, U_b \cos\varphi)^2}$$

$$p\% = \frac{\rho \cdot 10^3 (2 + \sqrt{2})\, P^{kW}\, l^{km}}{2 \cdot S_2^{mm^2}\, U_b^2 \cos^2\varphi}$$

$$G_{Cu2} = 2l^{km} \cdot S_2^{mm^2} \cdot \gamma^{kg/dm^3} + l^{km} S_2 \sqrt{2}\, \gamma = \frac{\rho \cdot 10^3 (2 + \sqrt{2})^2\, P^{kW}\, l_{km}^2\, \gamma}{2P\%\, U_b^2 \cos^2\varphi}$$

$$\frac{S_2}{S_1} = \frac{2 + \sqrt{2}}{4} = 0{,}853 \qquad \frac{G_{Cu2}}{G_{Cu1}} = \frac{(2 + \sqrt{2})^2}{8} = 1{,}45$$

nu se obține o economie de material ca în cazul sistemului trifazat.

Problemă

Folosindu-se bobinajul mașinii de curent continuu ca o mașină de curent alternativ, prin împărțirea bobinajului în m părți egale ($p = 1$) se obține o mașină cu m faze în conectare poligonală.

Suma tensiunilor electromotoare induse în cele m faze este nulă.

Dat fiind că curentul electric care circulă prin bobinaj, e limitat de secțiunea firului, se pune întrebarea, în ce măsură va crește puterea mașinii cînd numărul de faze m crește.

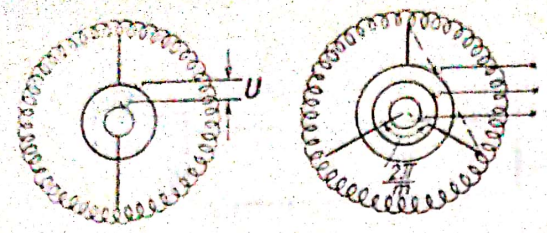


Fig. 25.214. Generator mono- și trifazat cu un bobinaj pentru curent continuu.

În figura 25.214 se prezintă în stînga un generator monofazat cu puterea $P_1 = 2UI \cos \varphi$.

În dreapta, același generator este considerat ca trifazat.

$$U_3 = 2 \frac{U}{2} \sin \frac{\pi}{m} = U \sin \frac{\pi}{m} = U \sin \frac{\pi}{3}$$

$$P_3 = 3U \sin \frac{\pi}{3} I \cos \varphi$$

Pentru m faze se obține

$$\frac{P_m}{P_1} = \frac{\sin \frac{\pi}{m}}{\frac{2}{m}}$$

pentru $m = \infty$ apare o nedeterminare $\frac{0}{0}$.

Aplicîndu-se formula lui L'Hôpital se obțin

$$\lim_{m \to \infty} \frac{-\frac{\pi}{m^2} \cos \frac{\pi}{m}}{-\frac{2}{m^2}} = \frac{\pi}{2} = 1{,}57.$$

Puterea P_m nu poate depăși 1,57 P_1.

În ce privește randamentul mașinii monofazate și polifazate acesta este

$$\eta = \frac{1}{1 + \frac{P_C}{P_1}}; \quad \eta_{max} = \frac{1}{1 + \frac{P_C}{1{,}57\, P_1}}$$

de unde se obține

$$\frac{\eta_{max}}{\eta_1} = \frac{1{,}57\ (P_1 + P_C)}{1{,}57\, P_1 + P_C}.$$

Exerciții

Cu ajutorul formulei pentru o linie trifazată

$$p^{kW} \cdot l^{km} = \frac{p\,\%\, U_b^2 \cos^2 \varphi \cdot S^{mm^2}}{\rho \cdot 10^8}$$

se obține din diagrama din figura 25.215 în care se reprezintă P^{kW} în funcție de l^{km} la scări logaritmice pentru

$$S = 10 \text{ mm}^2 \qquad \cos \varphi = 0{,}8$$
$$p = 5\%$$

la diferite tensiuni de borne.

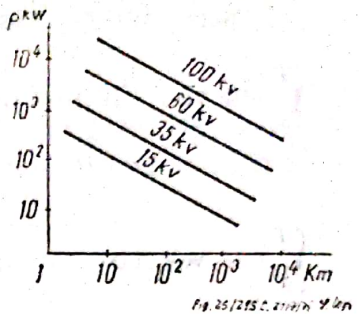


Fig. 25.215. P^{kW} în funcție de l^{km}.

Din diagramă se obține, ce putere se poate transmite în condițiile date, la o anumită distanță.

26. CIRCUITE ELECTRICE CU r, L, C CONCENTRATE ȘI CONSTANTE ÎN REGIM NESINUSOIDAL

26.1. REPREZENTAREA UNEI FUNCȚII PERIODICE GENERALĂ DE TIMP CU AJUTORUL SERIEI FOURIER

Admitem că tensiunea de borne u_b reprezintă o funcție periodică generală de timp așa cum ne arată figura 26.216.

O funcție periodică generală de timp se exprimă cu ajutorul seriei Fourier în forma

$$u_b = f(t) = \frac{b_0}{2} + \sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu \sin \nu\omega_1 t + \sum_{\nu=1}^{\infty} b_\nu \cos \nu\omega_1 t \qquad (1)$$

în care $\frac{b_0}{2}$ (pentru $\nu = 0$) este o constantă, a_ν și b_ν reprezintă amplitudinile armonicilor ca funcții sinusoidale și cosinusoidale de timp, iar $\nu\omega_1$ reprezintă frecvența circulară a armonicei de ordinul ν, exprimîndu-se prin ω_1 frecvența circulară a armonicei de ordinul 1 (armonica fundamentală).

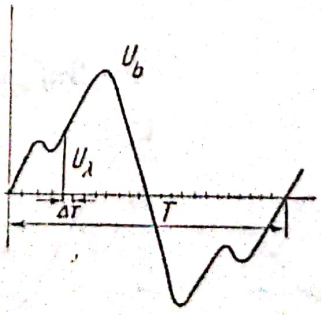


Fig. 26.216. Funcția periodică generală de timp.

Pentru determinarea amplitudinilor a_ν și b_ν folosim integralele

$$\int_0^T \sin \nu\omega t \sin \mu\omega t \, dt = \frac{1}{2}\int_0^T \{\cos(\nu-\mu)\omega t - \cos(\nu+\mu)\omega t\}\, dt = \frac{T}{2}$$

pentru $\mu = \nu$

$$\int_0^T \cos \nu\omega t \cos \mu\omega t \, dt = \frac{1}{2}\int_0^T \{\cos(\nu-\mu)\omega t + \cos(\nu+\mu)\omega t\}\, dt = \frac{T}{2}$$

pentru $\mu = \nu$ (2)

$$\int_0^T \sin \nu\omega t \cos \mu\omega t \, dt = \frac{1}{2}\int_0^T \{\sin(\nu-\mu)\omega t + \sin(\nu+\mu)\omega t\}\, dt = 0$$

pentru $\mu = \nu$ și $\mu \neq \nu$.

Ca urmare se obține

$$\int_0^T u_b(t) \sin \nu\omega t \, dt = \frac{a_\nu}{2} T \quad \int_0^T u_b(t) \cos \nu\omega t \, dt = \frac{b_\nu}{2} T \quad \int_0^T u_b(t)\, dt = \frac{b_0}{2} T. \tag{3}$$

Funcția periodică generală de timp $u_b(t)$ din figura 26.216 este simetrică în raport cu o jumătate de perioadă, deoarece după o jumătate de perioadă se obține pentru u_b aceeași valoare cu semn schimbat.

Avem

$$u_b(t) = -u_b\left(t + \frac{T}{2}\right). \tag{4}$$

Împărțind intervalul de timp T spre exemplu în 24 de părți egale, se introduc

$$2k = 2 \cdot 12 \qquad 2k\Delta t = T \qquad \lambda \Delta t = t. \tag{5}$$

În figura 26.217 se reprezintă exemple de armonica fundamentală și armonica de ordinul trei pentru funcția sinusoidală și cosinusoidală.

Avem

$$f_1 = \frac{1}{T_1}, \qquad 2\pi f_1 = \omega_1, \qquad f_3 = 3f_1 = \frac{1}{\left(\frac{T_1}{3}\right)} = \frac{1}{T_3}$$

$$2\pi f_3 = \omega_3 = 3\omega_1.$$

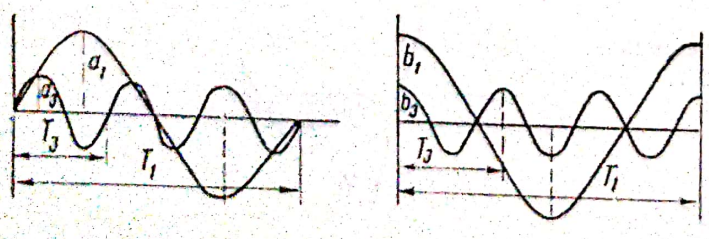


Fig. 26.217. Exemple de armonică fundamentală și armonica de ordinul trei pentru funcția sinusoidală și cosinusoidală.

Deoarece în exemplul luat avem

$$u_b(t) = -u_b\left(t + \frac{T}{2}\right)$$

înseamnă că introducînd în seria Fourier în locul lui t pe $t + T/2$ funcțiile sinusoidale și cosinusoidale ne conduc la aceleași valori cu semn schimbat.

Ca urmare termenul constant $\frac{b_0}{2}$ e nul.

Pe de altă parte mai rezultă

$$\begin{aligned} \sin \nu\omega_1 t &= -\sin \nu\omega_1 (t + T/2) = -\sin (\nu\omega_1 t + \nu\pi) \\ \cos \nu\omega_1 t &= -\cos \nu\omega_1 (t + T/2) = -\cos (\nu\omega_1 t + \nu\pi). \end{aligned} \tag{6}$$

Relațiile (6) pot fi satisfacute pentru ν impar

$$\nu = 1, 3, 5, 7, 9...$$

Se exprimă arcul ωt în forma

$$\omega t = \frac{2\pi}{T} t = \frac{2\pi}{2k\Delta t} \lambda\Delta t = \frac{\pi}{k} \lambda = \frac{180}{12} \lambda = 15°\lambda \tag{7}$$

astfel că

$$\begin{aligned} \sin \nu\omega t &= \sin \nu \frac{\pi}{k} \lambda = \sin \nu\, 15°\lambda \\ \cos \nu\omega t &= \cos \nu \frac{\pi}{k} \lambda = \cos \nu\, 15°\, \lambda. \end{aligned} \tag{8}$$

În figura 26.218 se vede că la integrala grafică se folosesc dreptunghiuri; s-ar putea folosi trapeze ceea ce se va face mai tîrziu.

Ca urmare integralele din (3) se reprezintă în formă de sume.

Se obține

$$a_\nu = \frac{2}{2k\Delta t} \sum_{\lambda=0}^{24} u_b(\lambda) \sin \nu \frac{\pi}{k} \lambda\Delta t = \frac{1}{12} \sum_{1}^{23} u_b(\lambda) \sin \nu\, 15°\, \lambda.$$

Deoarece

$$u_b(\lambda) \sin \nu\, 15°\, \lambda = u_b(\lambda + k) \sin \nu\, 15°(\lambda + k)$$

rezultă

$$a_\nu = \frac{1}{6} \sum_{\lambda=1}^{11} u_b(\lambda) \sin \nu\, 15°\, \lambda \tag{9}$$

în mod analog se obține

$$b_\nu = \frac{1}{6} \sum_{\lambda=1}^{11} u_b(\lambda) \cos \nu\, 15°\, \lambda. \tag{10}$$

Scanned with OKEN Scanner

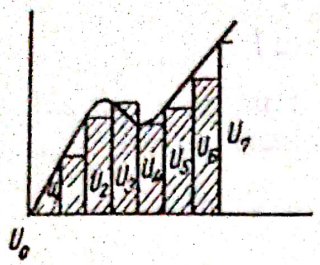


Fig. 26.218. La integrarea grafică se folosesc dreptunghiuri

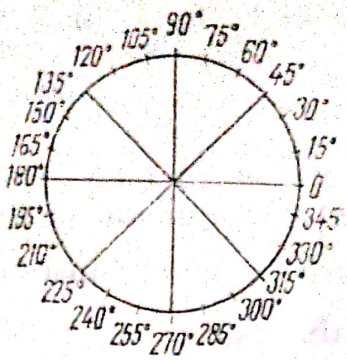


Fig. 26.219. Reprezentarea mărimilor sin ν 15° λ și cos ν 15° λ.

Cu ajutorul diagramei din figura 26.219 se reprezintă ușor egalitatea

$$\sin \nu\ 15^\circ\ \lambda = \sin \nu\ 15^\circ\ (k - \lambda)$$
$$\cos \nu\ 15^\circ\ \lambda = -\cos \nu\ 15^\circ\ (k - \lambda). \qquad (11)$$

Tot cu ajutorul diagramei din figura 20.219 se exprimă ușor amplitudinea a_1 în forma

$$a_1 = \frac{1}{6}\{(u_1 + u_{11}) \sin 15^\circ + (u_2 + u_{10}) \sin 30^\circ + (u_3 + u_9) \sin 45^\circ +$$
$$+ (u_4 + u_8) \sin 60^\circ + (u_5 + u_7) \sin 75^\circ + u_6 \sin 90^\circ\}$$

sau

$$a_1 = s_1 a + s_2 b + s_3 c + s_4 d + s_5 e + s_6 f \qquad (12)$$

în care

$$s_1 = u_1 + u_{11} \qquad s_2 = u_2 + u_{10} \qquad s_3 = u_3 + u_9$$
$$s_4 = u_4 + u_8 \qquad s_5 = u_5 + u_7 \qquad s_6 = u_6$$

$$\frac{1}{6}\sin 15^\circ = \frac{1}{6}\cos 75^\circ = a = 0{,}0431;$$

$$\frac{1}{6}\sin 30^\circ = \frac{1}{6}\cos 60^\circ = b = 0{,}0833;$$

$$\frac{1}{6}\sin 45^\circ = \frac{1}{6}\cos 45^\circ = c = 0{,}1179;$$

$$\frac{1}{6}\sin 60^\circ = \frac{1}{6}\cos 30^\circ = d = 0{,}1443;$$

$$\frac{1}{6}\sin 75^\circ = \frac{1}{6}\cos 15^\circ = e = 0{,}1610;$$

$$\frac{1}{6}\sin 90^\circ = \frac{1}{6}\cos 10^\circ = f = 0{,}1667.$$

Scanned with OKEN Scanner

În mod analog se obține

$$b_1 = \frac{1}{6}\{(u_1 - u_{11})\cos 15° + (u_2 - u_{10})\cos 30° + (u_3 - u_9)\cos 45° +$$

$$+ (u_4 - u_8)\cos 60° + (u_5 - u_7)\cos 75°$$

deoarece

$$u_6 \cos 90° = 0$$

sau

$$b_1 = d_1 e + d_2 d + d_3 c + d_4 b + d_5 a \tag{13}$$

în care

$$u_1 - u_{11} = d_1 \qquad u_2 - u_{10} = d_2 \qquad u_3 - u_9 = d_3$$
$$u_4 - u_8 = d_4 \qquad u_5 - u_7 = d_5.$$

Cu ajutorul diagranei din figura 26.219 se obține pentru a_3 și b_3

$$\begin{aligned} a_3 &= (s_1 + s_3 - s_5)\ c + (s_2 - s_6)\ f \\ b_3 &= (d_1 - d_3 - d_5)\ c - d_4 f. \end{aligned} \tag{14}$$

În mod analog se obține

$$a_5 = s_1 e + s_2 b - s_3 c - s_4 d + s_5 a + s_6 f$$

$$b_5 = d_1 a - d_2 d - d_3 c + d_4 b + d_5 e$$

$$a_7 = s_1 e - s_2 b - s_3 c + s_4 d + s_5 a - s_6 f \tag{15}$$

$$b_7 = d_1 a - d_2 d + d_3 c + d_4 b - d_5 e$$

$$a_9 = (s_1 + s_3 - s_5)\ c - (s_2 - s_6)\ f$$

$$b_9 = -(d_1 - d_3 - d_5)\ c - d_4 f.$$

În general este suficient să se exprime armonicile de la $\nu = 1$ până la $\nu = 9$, pentru a prezenta funcția periodică generală de timp.

S-a relevat că amplitudinile a_ν, b_ν determinate în felul arătat mai sus, nu sînt exacte pentru că la efectuarea integralei de timp s-a considerat u_λ în intervalul de timp Δt constant, ca în diagrama din figura 26.218.

Scanned with OKEN Scanner

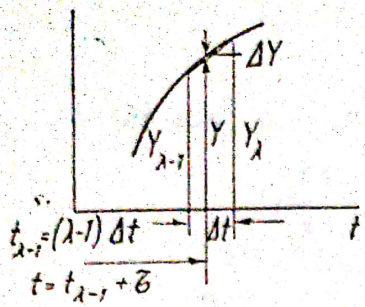


Fig. 26.220. Integrarea grafică pentru un trapez.

Se știe că o integrare efectuată pe cale grafică ne conduce la un rezultat bun atunci cînd se folosește metoda Simpson. Ori integrala grafică efectuată în diagrama din figura 26.218 obținută cu ajutorul dreptunghiurilor nu ne poate da exactitatea ce rezultă din aplicarea metodei Simpson.

Pentru a ne apropia de exactitatea ce rezultă din aplicarea metodei Simpson, se înlocuiește dreptunghiul cu un trapez ca în figura 26.220.

În figura 26.220 se introduce

$$y = y_{\lambda-1} + \frac{y_\lambda - y_{\lambda-1}}{\Delta t}\,\tau + \Delta y \tag{16}$$

în care Δy este neglijabil față de $y_{\lambda-1}$.

Pentru a efectua ușor calculul suprafeței la trapezul din figura 26.220 cu scopul de a se determina amplitudinile a_ν^* și b_ν^* mai exacte ca acele obținute mai sus se recomandă să se exprime seria Fourier în forma exponențială.

În acest scop se introduce

$$f(t) = \sum_{\nu=-\infty}^{\nu=+\infty} \mathcal{D}_\nu\, e^{j\nu\omega t}. \tag{17}$$

Prin (17) se exprimă funcția periodică generală de timp $f(t)$ ca o sumă de funcții sinusoidale și cosinusoidale de timp în forma complexă.

Se introduc:

$$\mathcal{D}_{+\nu} = \frac{1}{2}\left(b_\nu - j\,a_\nu\right) \tag{18}$$

$$\mathcal{D}_{-\nu} = \frac{1}{2}\left(b_\nu + j\,a_\nu\right) \tag{18}$$

astfel că

$$\mathcal{D}_{+\nu}\, e^{j\nu\omega t} + \mathcal{D}_{-\nu}\, e^{-j\nu\omega t} = a_\nu \sin \nu\omega t + b_\nu \cos \nu\omega t \tag{19}$$

în care

$$e^{j\nu\omega t} = \cos \nu\omega t + j \sin \nu\omega t$$

$$e^{-j\nu\omega t} = \cos \nu\omega t - j \sin \nu\omega t.$$

Scanned with OKEN Scanner

Aşa dar ν variază de la $-\infty$ la -1 obţinîndu-se $\mathcal{D}_{-\nu}$ şi apoi de la $+1$ la $+\infty$ obţinîndu-se $\mathcal{D}_{+\nu}$

Pentru $\nu = 0$ se obţine

$$\mathcal{D}_0 = \frac{b_0}{2}. \tag{20}$$

Pentru determinarea mărimii complexe $\mathcal{D}_\nu$ se formează

$$\int_0^T f(t)\, e^{-j\nu\omega t}\, dt = \mathcal{D}_\nu\, T. \tag{21}$$

Dacă ne mărginim la formarea de dreptunghiuri avem

$$\sum_{\lambda=1}^{24} y_\lambda\, e^{-j\nu\omega\lambda dt}\, \Delta t = \frac{1}{2}\,(b_\nu - j a_\nu)\, 2k\Delta t$$

în care

$$e^{-j\nu\omega\lambda\,\Delta t} = \cos \nu \frac{\pi}{k}\lambda - j \sin \nu \frac{\pi}{k}\lambda \tag{22}$$

astfel că:

$$\frac{1}{k}\,\Sigma y_\lambda \cos \nu \frac{\pi}{k}\lambda - j\,\frac{1}{k}\,\Sigma\, y_\lambda \sin \nu \frac{\pi}{k}\lambda = b_\nu - j\, a_\nu. \tag{23}$$

iar pentru $\nu = 0$ se obţine

$$\frac{1}{k}\sum_{\lambda=1}^{24} y_\lambda = b_0. \tag{24}$$

Se trece la determinarea amplitudinilor a_ν^* şi b_ν^* luîndu-se în considerare trapezul din figura 26.220.

În loc să se introducă sub semnul Σ

$$y_\lambda\, e^{-j\nu\omega\lambda\Delta t}\, \Delta t$$

care corespunde dreptunghiului, se formează integrala

$$\int_{\tau=0}^{\Delta t}\left(y_{\lambda-1} + \frac{y_\lambda - y_{\lambda-1}}{\Delta t}\right) e^{-j\nu\omega[(\lambda-1)\Delta t+\tau]}\, d\tau \tag{25}$$

care corespunde trapezului.

Se obţine

$$\int_{\tau=0}^{\Delta t} y_{\lambda-1}\, e^{-j\nu\omega[(\lambda-1)\Delta t+\tau]}\, d\tau = -\frac{1}{j\nu\omega}\, y_{\lambda-1}\,(e^{-j\nu\omega\lambda dt} - e^{-j\nu\omega(\lambda-1)\Delta t}) \tag{26}$$

$$\int_{\tau=0}^{\Delta t} \frac{y_\lambda - y_{\lambda-1}}{\Delta t}\, \tau e^{-j\nu\omega[(\lambda-1)\Delta t+\tau]}\, d\tau = -\frac{y_\lambda - y_{\lambda-1}}{\Delta t}\,\frac{1}{j\nu\omega}\int_{\tau=0}^{\Delta t} \tau d\,\{e^{-j\nu\omega[(\lambda-1)\Delta t+\tau]}\}$$

Ținîndu-se seama de relația:

$$d\{\tau e^{-j\nu\omega[(\lambda-1)\Delta t+\tau]}\} = \tau d\{e^{-j\nu\omega[(\lambda-1)\Delta t+\tau]}\} + e^{-j\nu\omega[(\lambda-1)\Delta t+\tau]}\, d\tau$$

rezultă

$$\int_{\tau=0}^{\Delta t} \frac{y_\lambda - y_{\lambda-1}}{\Delta t}\, \tau\, e^{-j\nu\omega[(\lambda-1)\Delta t+\tau]}\, d\tau = -\frac{1}{j\nu\omega}\, \frac{y_\lambda - y_{\lambda-1}}{\Delta t}\left[\Delta t\, e^{-j\nu\omega\lambda\Delta t} + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{j\nu\omega}\,(e^{-j\nu\omega\lambda\Delta t} - e^{-j\nu\omega(\lambda-1)\Delta t})\right]. \qquad (27)$$

Dat fiindcă suma

$$\sum_{\lambda=1}^{2k} y_\lambda\, e^{-j\nu\omega\lambda\Delta t}\, \Delta t = T\mathcal{D}_\nu$$

nu conține termeni cu factorul $-\frac{1}{j\nu\omega}$ rezultă că termenul (26) nu contribuie la determinarea lui $\mathcal{D}_\nu^*$ iar din termenul (27) se ia în considerare numai termenul

$$\frac{1}{\nu^2\omega^2}\, \frac{y_\lambda - y_{\lambda-1}}{\Delta t}\,(e^{-j\nu\omega\lambda\Delta t} - e^{-j\nu\omega(\lambda-1)\Delta t}) \qquad (28)$$

la formarea sumei.

Se obține:

$$\sum_{\lambda=1}^{2k} \frac{y_\lambda - y_{\lambda-1}}{(\nu 2\pi)^2}\, 2kT(e^{-j\nu\omega\lambda\Delta t} - e^{-j\nu\omega(\lambda-1)\Delta t}) = \mathcal{D}_\nu^* T. \qquad (29)$$

Se introduce în (29)

$$\sum_{\lambda=1}^{2k} \frac{y_{\lambda-1}}{(\nu 2\pi)^2}\, 2kT(e^{-j\nu\omega\lambda\Delta t} - e^{-j\nu\omega(\lambda-1)\Delta t}) =$$

$$= \sum_{\lambda=1}^{2k} \frac{y_\lambda}{(\nu 2\pi)^2}\, 2kT(e^{-j\nu\omega(\lambda+1)\Delta t} - e^{-j\nu\omega\lambda\Delta t}).$$

Ca urmare (29) devine

$$\sum_{\lambda=1}^{2k} \frac{y_\lambda}{(\nu 2\pi)^2}\, 2kT\ (2e^{-j\nu\omega\lambda\Delta t} - e^{-j\nu\omega(\lambda+1)\Delta t} - e^{-j\nu\omega(\lambda-1)\Delta t}) =$$

$$= \sum_{\lambda=1}^{2k} \frac{y_\lambda}{(\nu 2\pi)^2}\, 2kT\ (2e^{-j\nu\omega\lambda\Delta t} - e^{j\nu\omega\lambda\Delta t}\,(e^{-j\nu\omega\Delta t} + e^{j\nu\omega\Delta t})) =$$

$$= \sum_{\lambda=1}^{2k} \frac{y_\lambda}{(\nu 2\pi)^2}\, 2kT\ e^{-j\nu\omega\lambda\Delta t}[2 - (e^{-j\nu\omega\Delta t} + e^{j\nu\omega\Delta t})] = \mathcal{D}_\nu^* T. \qquad (30)$$

Scanned with OKEN Scanner

Se introduc

$$e^{-j\nu\omega\Delta t} + e^{j\nu\omega\Delta t} = 2\cos\nu\omega\Delta t = 2 - 4\sin^2\frac{\nu\omega\Delta t}{2}.$$

Relația (30) ia forma

$$\frac{\sin^2\frac{\nu\omega\Delta t}{2}}{(\nu 2\pi/4k^2)^2}\frac{1}{2k}\sum_{\lambda=1}^{2k} y_\lambda e^{-j\nu\omega\lambda\Delta t} = \mathcal{D}_\nu^* = \frac{b_\nu^*}{2} - j\frac{a_\nu^*}{2} \tag{31}$$

din (31) se obține a_ν^* și b_ν^* în formele

$$a_\nu^* = \frac{\left(\sin\nu\frac{\pi}{2k}\right)^2}{\left(\nu\frac{\pi}{2k}\right)^2}\frac{1}{k}\sum y_\lambda \sin\nu\frac{\pi}{k}\lambda = \theta_\nu a_\nu \tag{32}$$

$$b_\nu^* = \frac{\left(\sin\nu\frac{\pi}{2k}\right)^2}{(\nu\pi/2k)^2}\frac{1}{k}\sum y_\lambda \cos\nu\frac{\pi}{k}\lambda = \theta_\nu b_\nu .$$

Relațiile (32) prezintă amplitudinile a_ν^* și b_ν^* atunci cînd se ia în considerație trapezul la efectuarea grafică a integralei din figura 26.220 în funcție de amplitudinile a_ν și b_ν stabilite cînd la efectuarea integralei se ia în considerare dreptunghiul din figura 26.218.

Apare un factor θ_ν denumit factor de corecție care se calculează ușor. Spre exemplu pentru $2k = 24$, $\nu = 5$

$$\nu\frac{\pi}{2k} = 5\cdot 7°30' = 37°20'; \quad \sin 37°30' = 0{,}608; \quad 5\frac{\pi}{2k} = 0{,}654$$

$$\theta_5 = \left(\frac{0{,}608}{0{,}654}\right)^2 = 0{,}845.$$

Se formează

$$100\frac{a_\nu - a_\nu^*}{a_\nu} = 100\left(1 - \frac{a_\nu^*}{a_\nu}\right) = 100(1 - \theta_\nu).$$

Pentru

$$\nu = 5, \quad 100\frac{a_5 - a_5^*}{a_5} = 100\,(1 - \theta_5) = 15{,}5\%.$$

Pentru armonica de ordinul 7 se obține

$$\sin 7\cdot 7°30' = \sin 52°30' = 0{,}793 \qquad 7\cdot\frac{\pi}{24} = 0{,}915$$

$$\theta_7 = \left(\frac{0{,}793}{0{,}915}\right)^2 = 0{,}75; \quad 100\frac{a_7 - a_7^*}{a_7} = 100\,(1 - \theta_7) = 25\%$$

Scanned with OKEN Scanner

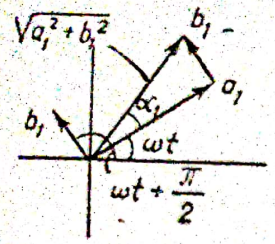


Fig. 26.221. Suma funcţiilor trigonometrice în diagrama amplitudinilor.

se constată că a_ν^* respectiv b_ν^* sînt mai mici ca amplitudinile calculate în mod obişnuit, obţinîndu-se diferenţe procentuale de 25%.

Nu este recomandabil să se mărească numărul $2k$ peste 24 deoarece calculul devine mai anevoios şi nu este necesar, din moment ce se cunoaşte factorul de corecţie care este aşa de uşor de calculat.

În ce priveşte suma

$$a_1 \sin \omega_1 t + b_1 \cos \omega_1 t = a_1 \left(\sin \omega_1 t + \frac{b_1}{a_1} \cos \omega_1 t\right) =$$

$$= \frac{a_1}{\cos \alpha_1} \sin (\omega t + \alpha_1) = \sqrt{a_1^2 + b_1^2} \sin (\omega t + \alpha_1) \qquad (33)$$

în care

$$\frac{b_1}{a_1} = \operatorname{tg} \alpha_1 \qquad \cos \alpha_1 = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha_1}}$$

ea se efectuează uşor în diagrama amplitudinilor din figura 26.221.

Adunîndu-se termenii sinusoidali cu cei cosinusoidali ai armonicilor de aceeaşi frecvenţă ca în (33) se obţine funcţia periodică u_b în forma

$$u_b = u_{1m} \sin(\omega t + \alpha_1) + u_{3m} \sin(3\omega t + \alpha_3) + \ldots + u_{\nu m} \sin(\nu \omega t + \alpha_\nu) + \ldots \qquad (34)$$

În figura 26.222 se prezintă ca exemple trei funcţii periodice generale de timp.

În primul caz apare curba ca un dreptunghi în funcţie de timp. Descompusă în serie Fourier ne dă

$$u = \frac{4u_m}{\pi} \left[\sin \omega t + \frac{1}{3} \sin 3\,\omega t + \frac{1}{5} \sin 5\,\omega t + \ldots\right]$$

în al doilea caz se obţine

$$u = \frac{8u_m}{\pi} \left[\sin \omega t - \frac{1}{9} \sin 3\,\omega t + \frac{1}{25} \sin 5\,\omega t + \ldots\right].$$

În al treilea caz se prezintă o tensiune sinusoidală ondulată obţinută cu un redresor.

Se obţine seria Fourier în forma

$$u = \frac{2u_m}{\pi} \left[1 - \frac{2 \cos \omega t}{1 \cdot 3} - \frac{2 \cos 2\omega t}{3 \cdot 5} - \frac{2 \cos 3\omega t}{5 \cdot 7} - \ldots\right].$$

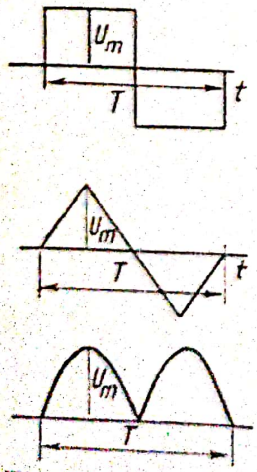


Fig. 26.222. Exemple de funcţii periodice generale de timp.

26.2. VALORI EFECTIVE ÎN REGIM NESINUSOIDAL

Ne sprijinim pe expresiile care reprezintă valorile efective ale unei tensiuni U sau curent electric i în formele

$$U^2 = \frac{1}{T} \int_0^T u^2 dt \qquad I^2 = \frac{1}{T} \int_0^T i^2 dt \qquad (1)$$

Introducîndu-se valorile momentane u și i în formele

$$u = u_{1m}\sin(\omega t + \alpha_1) + \ldots + u_{\nu m}\sin(\nu\omega t + \alpha_\nu) + \ldots \qquad (2)$$

$$i = i_{1m}\sin(\omega t + \alpha_1 - \varphi_1) + \ldots + i_{\nu m}\sin(\nu\omega t + \alpha_\nu - \varphi_\nu) + \ldots$$

se obțin pentru valorile efective la pătrat U^2 și I^2 expresiile

$$U^2 = U_1^2 + U_3^2 + \ldots + U_\nu^2 + \ldots \qquad (3)$$

$$I^2 = I_1^2 + I_3^2 + \ldots + I_\nu^2 + \ldots$$

Relația (3) ne prezintă valorile efective la pătrat ca o sumă de patrate a valorilor efective corespunzătoare armonicilor tensiunii respective a curentului.

O astfel de sumă prezintă o semnificație fenomenologică.

Din $\frac{U^2}{r} = \frac{1}{r}\Sigma U_\nu^2$ sau din $I^2 r = r\Sigma I_\nu^2$ se constată că, în aceeași rezistență electrică r puterea totală (efectul Joule-Lenz) se reprezintă ca o sumă algebrică, deoarece puterea este o mărime scalară.

Sînt probleme în care se formează suma valorilor efective ale tensiunilor armonicilor afară de armonica fundamentală în forma

$$U_3^2 + \ldots + U_\nu^2 + \ldots = k_d^2 U_1^2 = U^2 - U_1^2$$

în care suma $U_3^2 + \ldots + U_\nu^2$ poartă denumirea de rezidul deformat iar factorul k_d e denumit factorul de distorsiune.

Se obține

$$U^2 = U_1^2(1 + k_d^2).$$

Dacă se cunosc U și k_d se determină valoarea efectivă corespunzătoare armonicei fundamentale.

Prin folosirea diferitelor funcții periodice generale de timp, se introduc deobicei doi factori: factorul de vîrf k_v și factorul de formă k_f.

Prin factorul de vîrf se înțelege raportul:

$$\frac{u_{max}}{U} = k_v$$

iar factorul de formă se exprimă prin

$$\frac{U}{u_{mjl}} = k_f.$$

Spre exemplu cînd u variază în timp în formă de dreptunghi sau în formă de triunghi ca în figura 26.222 în comparație cu u sinusoidal, se obține în primul caz

$$u_{\max} = 1 \cdot U = 1u_{\text{mijl}} \qquad k_v = 1 \qquad k_f = 1$$

în al doilea caz

$$u_{max} = 1{,}73 \cdot U = 2u_{mijl} \qquad k_v = 1{,}732 \qquad k_f = 1{,}15$$

în al treilea caz

$$u_{max} = \sqrt{2}\,U = \frac{\pi}{2}\,U_{mijl} \qquad k_v = 1{,}41 \qquad k_f = \frac{\pi}{2\sqrt{2}} = 1{,}11$$

valoarea mijlocie se stabileşte în raport cu o jumătate de perioadă.

Spre exemplu din

$$u = -\frac{d}{dt}(k\Phi)W \cdot 10^{-8}$$

se obţine valoarea mijlocie a tensiunii u_{mijl} în forma

$$u_{mijl} = \frac{1}{\frac{T}{2}}\int_0^{T/2} u\,dt = -\int_{(k\Phi)_{max}}^{-k\Phi_{max}} d(k\Phi)W \cdot 10^{-8} = 4(k\Phi)_{max}W \cdot f \cdot 10^{-8}$$

valabilă pentru orice formă a tensiunii alternative u ca funcţie periodică de timp, care posedă valorile zero pentru $t = 0$ şi $t = \frac{T}{2}$.

Folosindu-se un voltmetru cu magnet permanent pentru curent continuu (instrument magnetoelectric) care conţine un redresor ca în figura 26.223 (denumit multavi) se măsoară valoarea medie a tensiunii alternative.

În regim sinusoidal se obţine $u_{med} = \frac{2u_{max}}{\pi}$.

În figură se reprezintă o tensiune sinusoidală redresată.

Voltmetrul este folosibil pentru regim sinusoidal, deoarece valoarea medie este înmulţită cu factorul de formă k_f în care $k_f = 1{,}11$.

Aşa dar cînd tensiunea de borne nu este sinusoidală ci are o altă formă ca funcţie periodică de timp, înseamnă că împărţind tensiunea măsurată cu multavi prin 1,11 se obţine valoarea mijlocie măsurată.

De obicei valoarea efectivă se măsoară cu un voltmetru construit pe principiul electrodinamic.

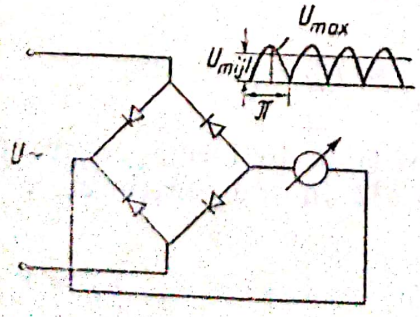


Fig. 26.223. Voltmetru magneto-electric cu redresor.

26.3 CIRCUITUL ELECTRIC CU PARAMETRII CONSTANȚI ÎN REGIM NESINUSOIDAL.

În figura 26.224 se reprezintă un circuit electric cu parametrii constanți conectat la o tensiune de borne u_b ca o funcție periodică generală de timp.

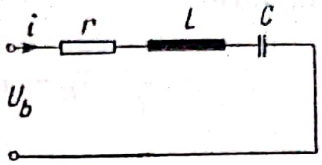


Fig. 26.224. Circuit electric cu parametrii constanți.

Se obține

$$u_b = u_{1m} \sin(\omega t + \alpha_1) + u_{3m} \sin(3\omega t + \alpha_3) + \ldots + u_{\nu m} \sin(\nu\omega t + \alpha_\nu) + \ldots$$

Fiecare armonică a tensiunii de borne va produce un curent electric sinusoidal cu frecvența circulară corespunzătoare armonicei tensiunii și cu o anumită amplitudine și defazare față de tensiune.

Avem

$$i = i_{1m} \sin(\omega t + \alpha_1 - \varphi_1) + i_{3m} \sin(3\omega t + \alpha_3 - \varphi_3) + \ldots + i_{\nu m} \sin(\nu\omega t + \alpha_\nu - \varphi_\nu) + \ldots \quad (2)$$

în care

$$i_{\nu m} = \frac{u_{\nu m}}{z_\nu}; \qquad z_\nu = \sqrt{r^2 + \left(\nu\omega L - \frac{1}{\nu\omega C}\right)^2}; \qquad \operatorname{tg} \varphi_\nu \frac{X_\nu}{r}$$

spre exemplu

$$r = 10^\Omega, \quad L = 0{,}5\text{H}, \quad C = 3\mu\text{F}.$$

Pentru armonica fundamentală se obține

$$\omega L = 314 \cdot 0{,}5 = 157^\Omega; \qquad \frac{1}{\omega C} = \frac{10^6}{314 \cdot 3} = 1062\,\Omega$$

$$\omega L - \frac{1}{\omega C} = 157 - 1062 = -905\,\Omega; \qquad \operatorname{tg} \varphi_1 = \frac{905}{10} = -90{,}5;$$

$$z_1 = \sqrt{5^2 + 905^2} \approx 905.$$

Pentru armonica de ordinul trei

$$3\omega L = 3 \cdot 157 = 470^\Omega; \qquad \frac{1}{3\omega C} = \frac{1062}{3} = 354^\Omega$$

$$3\omega L - \frac{1}{3\omega C} = 470 - 354 = 116^\Omega; \quad \operatorname{tg} \varphi_3 = \frac{116}{10} = 11{,}6$$

$$z_3 = \sqrt{5^2 + 116^2} = 116{,}1$$

Scanned with OKEN Scanner

Din exemplul de mai sus se vede ce mult poate varia impedanța și defazarea de la o armonică la o altă armonică.

În cazul cînd circuitul din figura 26.224 ar conține numai inductivitatea L sau numai capacitatea C raportul dintre valoarea efectivă a tensiunii și a curentului apare în forma

$$\frac{U_b}{I} = \frac{U_1}{I_1}\, k_L = \omega L k_L \qquad k_L > 1$$

respectiv

$$\frac{U_b}{I} = \frac{U_1}{I_1}\, k_C = \frac{1}{\omega C_1}\, k_C \qquad k_C < 1.$$

Avem

$$U_b^2 = U_1^2 + U_3^2 + \ldots + U_\nu^2 + \ldots$$

$$I^2 = I_1^2 + I_3^2 + \ldots + I_\nu^2 + \ldots$$

$$\frac{U_b^2}{I^2} = \frac{U_1^2}{I_1^2}\, \frac{1 + \left(\frac{U_3}{U_1}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{U_\nu}{U_1}\right)^2 + \ldots}{1 + \left(\frac{I_3}{I_1}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{I_\nu}{I_1}\right)^2 + \ldots} = \frac{U_1^2}{I_1^2}\, \frac{1 + k_{dv}^2}{1 + k_{di}^2} = \frac{U_1^2}{I_1^2}\, k_L^2$$

în care

$$\frac{U_\nu}{U_1} = \frac{I_\nu\, \nu\omega L}{I_1 \omega L} = \frac{I_\nu}{I_1}\, \nu; \quad \frac{I_\nu}{I_1} = \frac{1}{\nu}\, \frac{U_\nu}{U_1}$$

astfel că

$$\frac{1 + \left(\frac{U_3}{U_1}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{U_\nu}{U_1}\right)^2 + \ldots}{1 + \left(\frac{I_3}{I_1}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{I_\nu}{I_1}\right)^2 + \ldots} - \frac{1 + \left(\frac{U_3}{U_1}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{U_\nu}{U_1}\right)^2}{1 + \frac{1}{3^2}\left(\frac{U_3}{U_1}\right)^2 + \ldots + \frac{1}{\nu^2}\left(\frac{U_\nu}{U_1}\right)^2} = k_L.$$

Se obține

$$U_b = I\omega L k_L = I\omega L' \qquad L' > L$$

ca și cum ar fi existat un regim sinusoidal cu o inductivitate mai mare L'.

În cazul cînd reactanța este capacitivă, se obține

$$U_\nu = I_\nu \frac{1}{\nu\omega C} \qquad U_1 = I_1 \frac{1}{\omega C}$$

$$\frac{U_\nu}{U_1} = \frac{I_\nu}{I_1}\, \frac{1}{r} \qquad \frac{I_\nu}{I_1} = \nu\, \frac{U_\nu}{U_1}$$

Scanned with OKEN Scanner

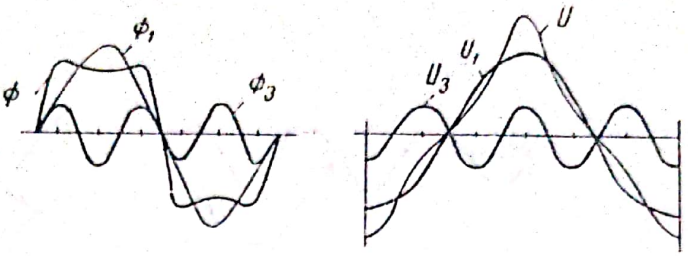


Fig. 26.225. Fluxul magnetic Φ și tensiunea electromotoare U ca funcție de timp.

astfel că

$$\frac{1+\left(\frac{U_3}{U_1}\right)^2+\ldots+\left(\frac{U_\nu}{U_1}\right)^2}{1+3^2\left(\frac{U_3}{U_1}\right)^2+\ldots+\nu^2\left(\frac{U_\nu}{U_1}\right)^2}=k_C^2 \text{ în care } k_C<1.$$

Se obține

$$U_b=I\frac{1}{\omega\frac{C}{k_C}}=I\frac{1}{\omega C'} \quad \text{cu} \quad C'>C.$$

Un condensator conectat la o tensiune de borne nesinusoidale ne conduce la o reactanță capacitivă cu reactanța $\frac{1}{\omega C'}$ cu $C'>C$ ca și cum ar fi fost tensiunea de borne sinusoidală însă capacitatea este mai mare.

În figura 26.225 se prezintă fluxul magnetic ca o sumă de două armonici de forma

$$\Phi=\Phi_{1m}\sin\omega t+\Phi_{3m}\sin 3\omega t.$$

Ca urmare tensiunea electromotoare indusă devine

$$u^{\nu}=-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(k\Phi)W\cdot 10^{-8}=-(k\Phi)_{1m}W\omega\,10^{-8}\cos\omega t-$$

$$-(k\Phi)_{3m}W\cdot 3\omega\,10^{-8}\cos 3\omega t.$$

În figura din dreapta se prezintă cele două armonici ale tensiunii u. Se vede ușor deosebirea între cele două funcții periodice de timp.

În diagrama fluxului magnetic din figura 26.226 se reprezintă fluxul magnetic în forma

$$\Phi=\Phi_{1m}\sin\omega t-\Phi_{3m}\sin 3\omega t.$$

Tensiunea electromotoare în figura din dreapta devine

$$u=-(k\Phi)_{1m}W\omega\cos\omega t+(k\Phi)_{3m}W\,3\omega\cos 3\omega t$$

Se compară funcțiile periodice în aceste două exemple și se vede că apar inversate.

Scanned with OKEN Scanner

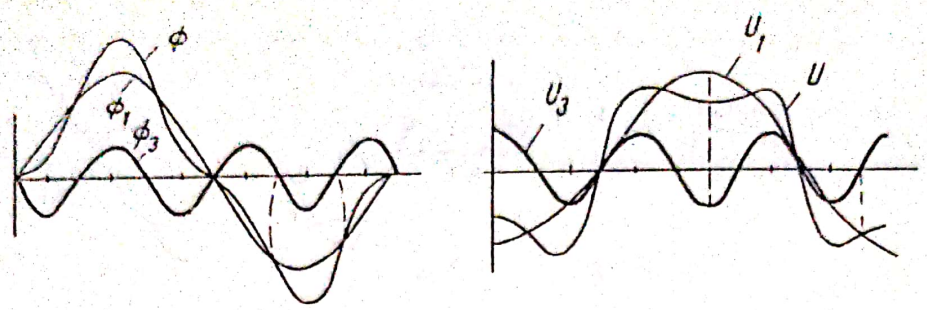


Fig. 26.226. Fluxul magnetic Φ şi tensiunea electromotoare U cu forme inversate ca în primul exemplu.

În figura 26.227 se prezintă curentul electric i datorită fenomenului de histereză.

Ca funcție periodică a curentului i se consideră numai două armonice în forma

$$i = i_{1m} \sin \omega t + i_{3m} \cos 3\omega t$$

O bobină în formă de tor cu W spire conține un miez de fier care formează un circuit feromagnetic omogen.

Admitem că se neglijează rezistența electrică r a bobinei, astfel că tensiunea de borne u_b

$$u_b = V_a - V_b$$

devine practic egală cu minus tensiunea electromotoare u.

Fie

$$u_b = u_m \sin \omega t \cong - u$$

$$u = - u_m \sin \omega t$$

$$(k\Phi) = - (k\Phi)_m \cos \omega t.$$

Avem

$$u^V = - \frac{d}{dt} (k\Phi_{max}) W \cdot 10^{-8} = - (k\Phi)_{max} W \cdot 10^{-8} \omega \sin \omega t$$

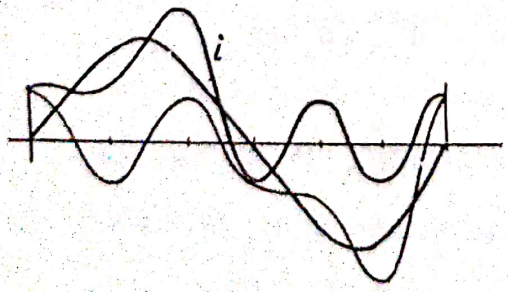


Fig. 26.227. Curentul electric i datorită histerezei.

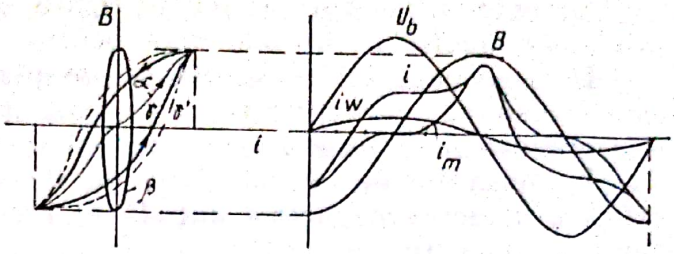


Fig. 26.228. Histereza statică şi dinamică, curentul de magnetizare i_m, curentul turbionar i_w şi curentul total i.

în care

$$u_m^V = (k\Phi)_{max}\, W \cdot \omega \cdot 10^{-8} = 2\pi(k\Phi)_{max}\, Wf \cdot 10^{-8}$$

$$U^V = 4{,}44(k\Phi)_{max}\, W \cdot f \cdot 10^{-8}.$$

În figura 26.228 dreapta se reprezintă tensiunea de borne u_b ca funcţie sinusoidală de timp şi inducţia magnetică $\mathfrak{B}$ ca funcţie cosinusoidală de timp cu semnul minus, datorită faptului că rezistenţa electrică a circuitului este neglijabilă.

În stînga se reprezintă prin α curba de magnetizare, prin γ o curbă histerezis statică, prin β se reprezintă inducţia $\mathfrak{B}$ ca funcţie de curentul turbionar i_w şi prin γ' curba histereză dinamică (linia punctată) obţinută prin însumarea elipsei cu histereza statică.

Cînd inducţia magnetică $\mathfrak{B}$ devine o funcţie de timp, apar în miezul de fier curenţi electrici turbionari. Miezul de fier se comportă ca un circuit secundar al unui transformator care conţine numai o rezistenţă electrică.

Ca urmare curentul electric i din bobina cu W spire conţine o componentă i_w datorită curenţilor turbionari din miezul de fier, care este în fază cu $-u = u_b$.

Fie P_w pierderile în fier datorită curenţilor turbionari.

Se obţine

$$P_w = -U_\Phi I_w \cong U_b I_w.$$

Ca urmare, dacă P_w şi U_Φ sînt cunoscute, se deduce I_w respectiv amplitudinea $i_{w\,max} = \sqrt{2} I_w$.

Din diagrama din dreapta se obţine

$$B = -B_{max} \cos \omega t$$

$$i_w = i_{w\,max} \sin \omega t$$

de unde rezultă

$$\left(\frac{B}{B_{max}}\right)^2 + \left(\frac{i_w}{i_{w\,max}}\right)^2 = 1.$$

În figura din stînga se vede elipsa cu axele B_{max} şi $i_{w\,max}$.

Din legătura funcţională dintre histereza dinamică a lui B şi i cu ajutorul lui B ca funcţie de timp se construieşte şi curentul total ca funcţie de timp care nu mai apare sinusoidal.

Scanned with OKEN Scanner

Se vede că i obține forma fin figura 26.228 ceea ce ne arată că predomină o armonică de ordinul trei pentru curent.

De asemenea sînt cunoscute ca componente ale curentului i curentul i_w care corespunde curenților turbionari din miezul de fier și curentul de magnetizare care corespunde caracteristicii α din stînga.

În miezurile de fier ale celor doi transformatori din figura 26.229, α există o inducție magnetică inițială $\mathfrak{B}_C$ produsă de curenți continui i_C. Peste inducția magnetică inițială se suprapune inducția magnetică datorită curentului electric alternativ i_a așa cum ne arată figura 26.229 β.

Admitem că curentul electric alternativ i_a apare ca o funcție sinusoidală de timp. Aceasta este posibil cînd tensiunea de borne u_b este o funcție sinusoidală de timp și reactanța inductivă a transformatoarelor este neglijabilă față de rezistența R conectată în serie cu cele două transformatoare.

Figura 26.229, β reprezintă inducția magnetică ΔB produsă de curentul electric alternativ i_a și (γ) ΔB și i_a ca funcții de timp.

În timp ce în miezul primului transformator curentul electric alternativ i_a, care circulă în sensul pozitiv al bobinei, produce o creștere a inducției magnetice ΔB (așa cum arată fig. 26.229, γ), în miezul celui de al doilea transformator, același curent electric care circulă în bobine în sensul negativ, produce o creștere a inducției magnetice ΔB care este negativă.

Curba inducției magnetice ΔB care corespunde primului transformator o putem exprima aproximativ în forma

$$\Delta B = -(\Delta B)_{1m} \cos \omega t - (\Delta B)_{2m} \cos 2\omega t$$

ceea ce ne conduce la tensiunea electromotoare indusă în secundarul primului transformator u_{2I} în forma

$$u_{2I} = u_{1m} \sin \omega t - u_{2m} \sin 2\omega t.$$

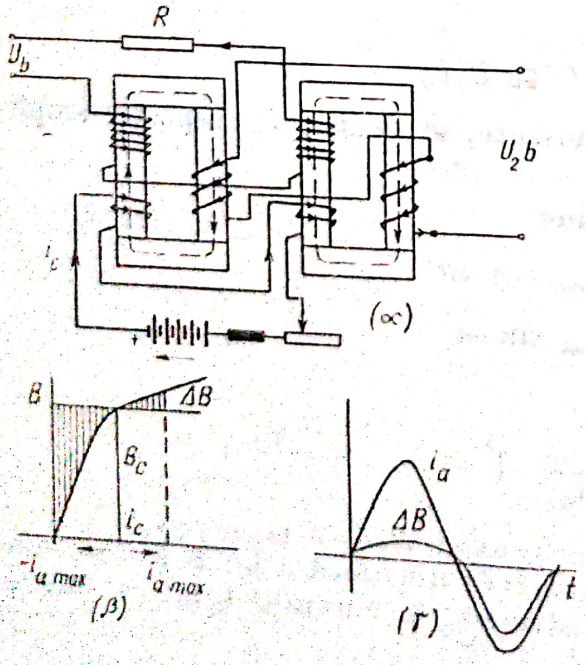


Fig. 26.229. (α) Două transformatoare cu o inducție inițială produsă cu curent continuu i_c; (β) ΔB în funcție de curentul alternativ i_a; (γ) i_a și ΔB ca funcție de timp.

Scanned with OKEN Scanner

În figura 26.230 se prezintă inducția magnetică ΔB și tensiunea electromotoare indusă u_{2I} în funcție de timp.

Deoarece curentul electric alternativ i_a circulă în bobina primară de la al doilea transformator în sensul negativ fixat în bobină, rezultă că inducția magnetică ΔB e defazată față de ΔB din primul transformator cu $t + T/2$.

În al doilea transformator avem

$$\Delta B = -(\Delta B)_{1m} \cos(\omega t + \pi) - (\Delta B)_{2m} \cos(2\omega t + 2\pi) =$$

$$= (\Delta B)_{1m} \cos \omega t - (\Delta B)_{2m} \cos 2\omega t.$$

Ca urmare, tensiunea electromotoare indusă în bobina secundară la al doilea transformator devine

$$u_{2II} = u_{1m} \sin \omega t - u_{2m} \sin 2\omega t.$$

Bobinele secundare fiind conectate în serie, se obține

$$u_2 = u_{2I} + u_{2II} = 2u_{2m} \sin 2\omega t.$$

În secundarul celor două transformatoare se obține o tensiune electromotoare cu frecvență dublă.

La o anumită formă a caracteristicii de magnetizare ca în figura 26.231 stînga se obține ΔB ca funcție de timp, ca o funcție periodică simetrică în raport cu $T/2$, în figura 26.231 dreapta.

Într-un astfel de caz inducția magnetică ΔB se prezintă în funcție de timp ca în figura 26.225. Avem

$$\Delta B = (\Delta B)_{1m} \sin \omega t + (\Delta B)_{3m} \sin 3\omega t$$

iar tensiunea electromotoare indusă în secundarul primului transformator devine

$$u_{2I} = -u_{1m} \cos \omega t - u_{3m} \cos 3\omega t.$$

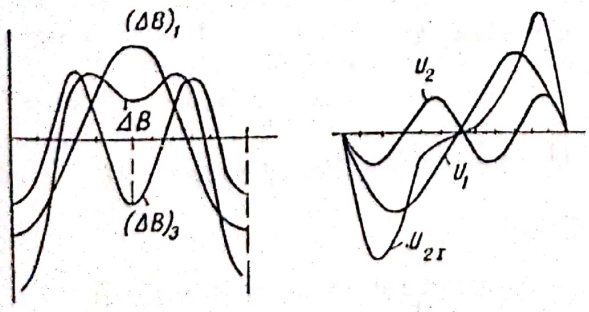


Fig. 26.230. Inducția magnetică ΔB și tensiunea indusă în secundarul primului transformator u_{2I}.

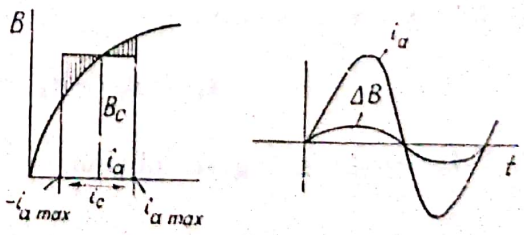


Fig. 26.231. Inducția magnetică ΔB în funcție de i_a și ΔB și i_a ca funcție de timp.

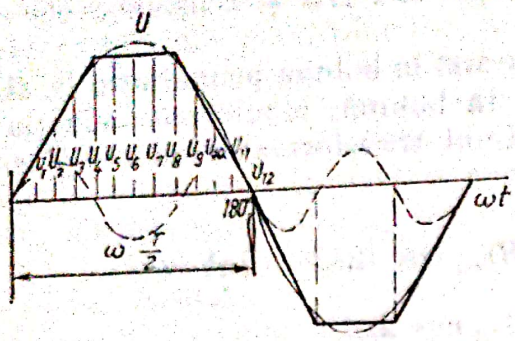


Fig. 26.232. Tensiunea electromotoare indusă într-un conductor la o mașină de c.c.

În figura 26.232 se reprezintă tensiunea electromotoare indusă într-un conductor în formă de trapez.

Se împarte arcul $\omega \frac{T}{2} = \pi$ în trei părți egale de cîte 60°.

Considerîndu-se inducție magnetică în întrefier în forma trapezului din figură, așa fel ca între arcul 60° și 120° inducția B este constantă, apare și tensiunea electromotoare la fel ca inducția în funcție de ωt.

Descompunînd tensiunea în armonice se vede ușor că armonica de ordinul trei în cazul luat în figură are amplitudinea nulă.

Mai întîi, ținîndu-se seama de relațiile (13) din paragraful 26.1 se obține

$$d_1 = d_2 = d_3 = d_4 = d_5 = 0.$$

Ca urmare nu pot să apară armonice în cosinus.

Pentru armonica de ordinul trei în sinus se obține

$$a_3 = (s_1 + s_3 - s_5)\, c + (s_2 - s_6)\, f.$$

Din figura 26.219 se obține

$$s_1 + s_3 - s_5 = 2u_1 + 2u_3 - 2u_5.$$

în care

$$u_1 = u_5/4 \qquad u_3 = 3u_5/4$$

astfel că

$$s_1 + s_3 - s_5 = \frac{2u_5}{4}(1 + 3 - 4) = 0.$$

În mod analog se obține

$$s_2 - s_6 = 2\frac{u_2}{2} - u_6 = 0$$

de unde rezultă că armonica în sinus de ordinul $3n$ e nulă.

Scanned with OKEN Scanner

De aci se trage concluzia că se împarte pasul polar în trei părți egale așa fel ca inducția să fie constantă la mijloc pe distanța $\frac{\tau}{3}$ a pasului polar τ.

26.4 PUTEREA ELECTROMAGNETICĂ MIJLOCIE ÎN RAPORT CU O PERIOADĂ ÎN REGIM NESINUSOIDAL

Se dau

$$\begin{aligned} u_b &= u_{1m} \sin(\omega t + \alpha_1) + \ldots + u_{\nu m} \sin(\nu\omega t + \alpha_\nu) + \ldots \\ i &= i_{1m} \sin(\omega t + \alpha_1 - \varphi_1) + \ldots + i_{\nu m} \sin(\nu\omega t + \alpha_\nu - \varphi_\nu) + \ldots \end{aligned} \tag{1}$$

Puterea electromagnetică momentană este

$$p = u_b i \tag{2}$$

iar puterea electromagnetică medie în raport cu o perioadă ia forma

$$P = \frac{1}{T}\int_0^T u_b i \, dt. \tag{3}$$

Avem

$$\frac{u_{\nu m}}{i_{\nu m}} = z_\nu; \quad z_\nu = \sqrt{r^2 + \left(\nu\omega L - \frac{1}{\nu\omega C}\right)^2}; \quad \operatorname{tg} \varphi_\nu = \frac{\nu\omega L - \frac{1}{\nu\omega C}}{r}. \tag{4}$$

Din (1) și (3) rezultă

$$P = \Sigma U_\nu I_\nu \cos \varphi_\nu = U_b I \Delta \tag{5}$$

în care U_ν, I_ν reprezintă valorile efective ale armonicii de ordinul ν pentru tensiunea de borne și curentul electric.

U_b, I, Δ reprezintă valorile efective ale tensiunii de borne U_b a curentului i și factorul de putere egal cu factorul de defazare la un circuit monofazat. Se constată că Δ nu poate exprima defazarea vreunei armonice a curentului față de tensiunea corespunzătoare.

În cele ce urmează se arată că $\Delta \leqslant 1$ și ca urmare poate fi exprimat printr-un cos φ, ca și cum ar exista un regim sinusoidal cu aceleași valori efective U_b și I și cu defazarea φ.

Se demonstrează că există

$$U_b I \geqslant \Sigma U_\nu I_\nu. \tag{6}$$

În acest scop se formează

$$(U_b I)^2 \geqslant (\Sigma U_\nu I_\nu)^2.$$

Scanned with OKEN Scanner

Se obține

$$(U_b I)^2 = (U_1^2 + \ldots + U_\nu^2 + U_\xi^2 + \ldots)(I_1^2 + \ldots + I_\nu^2 + I_\xi^2 + \ldots) \geqslant (U_1 I_1 + \ldots + U_\nu I_\nu + U_\xi I_\xi + \ldots)^2. \tag{7}$$

Din (7) se deduce

$$U_\nu^2 I_\xi^2 + U_\xi^2 I_\nu^2 \geqslant 2 U_\nu I_\nu U_\xi I_\xi$$

sau

$$(U_\nu^2 I_\xi^2 + U_\xi^2 I_\nu^2 - 2 U_\nu U_\xi I_\nu I_\xi)^2 \geqslant 0$$

astfel că

$$(U_\nu I_\xi - U_\xi I_\nu)^2 \geqslant 0. \tag{8}$$

Relația (8) este întotdeauna valabilă.

Pentru $U_\nu I_\xi - U_\xi I_\nu = 0$ trebuie să avem

$$\frac{U_\nu}{I_\nu} = \frac{U_\xi}{I_\xi} = r = \text{const.} \tag{9}$$

ceea ce înseamnă că nu se admit reactanțe deoarece z_ν nu se menține constant. Avem

$$\cos \varphi_\nu = \cos \varphi_\xi = 1 \qquad \varphi_\nu = \varphi_\xi = 0.$$

De aici rezultă că în general avem

$$U_b I > \Sigma U_\nu I_\nu$$

astfel că

$$U_b I \Delta = \Sigma U_\nu I_\nu \cos \varphi_\nu$$

în care

$$\Delta \leqslant 1.$$

Se mai poate introduce

$$U_b I \delta = \Sigma U_\nu I_\nu \tag{10}$$

în care $\delta > \Delta$.

Pentru $\cos \varphi_\nu = 1$, se obține $\delta = \Delta = 1$.

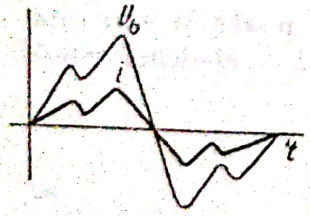


Fig. 26.233. Tensiunea de borne și curentul electric în fază în regim nesinusoidal.

În figura 26.233 se reprezintă un circuit electric numai cu o rezistență electrică r pentru ca tensiunea u_b și curentul electric i în regim nesinusoidal să nu fie defazate.

Avem

$$\begin{aligned} u_b &= u_{1m} \sin(\omega t + \alpha_1) + \ldots + \\ &+ u_{\nu m} \sin(\nu \omega t + \alpha_\nu) + \ldots \\ i &= i_{1m} \sin(\omega t + \alpha_1) + \ldots + \\ &+ i_{\nu m} \sin(\nu \omega t + \alpha_\nu) + \ldots \end{aligned} \tag{11}$$

Se pune întrebarea: Cum s-ar exprima curentul electric i dacă în figura 26.233 s-ar deplasa curba curentului spre dreapta cu $\frac{\varphi}{\omega}$?

S-ar obține

$$i = i_{1m} \sin(\omega t + \alpha_1 - \varphi) + \ldots + i_{\nu m} \sin(\nu\omega t + \alpha_\nu - \nu\varphi) + \ldots \quad (12)$$

ceea ce ne arată că armonica curentului de ordinul ν apare defazată față de armonica corespunzătoare a tensiunii cu arcul $\nu\varphi$.

Puterea medie în raport cu o perioadă ia forma

$$P = \frac{1}{T}\int_0^T u_b i \, dt = \sum U_\nu I_\nu \cos \nu\varphi.$$

Dacă s-ar deplasa armonica de ordinul ν a curentului numai cu $\frac{\varphi}{\nu}$, atunci curentul i devine

$$i = i_{1m} \sin(\omega t + \alpha_1 - \varphi) + \ldots + i_{\nu m} \sin(\nu\omega t + \alpha_\nu - \varphi) + \ldots$$

iar puterea ia forma

$$P = (\sum U_\nu I_\nu) \cos \varphi.$$

Într-un astfel de caz însă suma armonicilor curentului i diferă de forma lui i din figura 26.233.

26.5. CIRCUITE ELECTRICE ÎN PARALEL ÎN REGIM NESINUSOIDAL

În figura 26.234 se reprezintă două circuite electrice în paralel cu parametrii constanți și concentrați $r'L'$ respectiv $r''L''$.

Se stabilește mai întîi legătura dintre valorile efective ale curenților. Avem

$$u_b = u_{1m} \sin(\omega t + \alpha_1) + \ldots + u_{\nu m} \sin(\nu\omega t + \alpha_\nu) + \ldots$$

$$i' = i'_{1m} \sin(\omega t + \alpha_1 - \varphi'_1) + \ldots + i'_{\nu m} \sin(\nu\omega t + \alpha_\nu - \varphi'_\nu) + \ldots \quad (1)$$

$$i'' = i''_{1m} \sin(\omega t + \alpha_1 - \varphi''_1) + \ldots + i''_{\nu m} \sin(\nu\omega t + \alpha_\nu - \varphi''_\nu) + \ldots$$

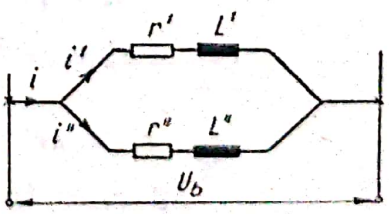


Fig. 26.234. Două circuite în paralel în regim nesinusoidal.

Se formează

$$i = i' + i'', \qquad i^2 = i'^2 + i''^2 + 2i'i''$$

$$\frac{1}{T}\int_0^T i^2\,dt = I^2 = I'^2 + I''^2 + 2\Sigma I'_\nu I''_\nu \cos(\varphi'_\nu - \varphi''_\nu) \tag{2}$$

în care

$$\varphi'_\nu - \varphi''_\nu = \varphi_{i\nu}$$

deoarece avem

$$i'i'' = i'_{\nu m} i''_{\nu m} \sin(\nu\omega t + \alpha_\nu - \varphi'_\nu) \sin(\upsilon\omega t + \alpha_\nu - \varphi''_\nu) =$$

$$= i'_{\nu m} i''_{\nu m} \frac{1}{2}[\cos(\varphi'_\nu - \varphi''_\nu) - \cos(2\nu\omega t + 2\alpha_\nu - \varphi'_\nu - \varphi''_\nu)]$$

$$\int_0^T \cos(2\nu\omega t + 2\alpha_\nu - \varphi'_\nu - \varphi''_\nu)\,dt = 0.$$

Ca urmare (2) obține forma

$$I^2 = I'^2 + I''^2 + 2I'I''\Delta_i; \qquad \Delta_i \leqslant 1. \tag{3}$$

Relația (3) ne arată că valorile efective ale curenților I' și I'' se adună geometric, ca și cum ar fi vectori sau amplitudinile a două funcții sinusoidale.

În relația (3) Δ_i obține valoarea egală cu unitatea cînd există

$$I'I'' = \Sigma I'_\nu I''_\nu$$

adică

$$I'_\nu I''_\xi - I'_\xi I''_\nu = 0; \qquad \frac{I'_\nu}{I''_\nu} = \frac{I'_\xi}{I''_\xi} = k.$$

Mai avem

$$I''_\nu z''_\nu = I'_\nu z'_\nu = U_\nu$$

$$\frac{I'_\nu}{I''_\nu} = \frac{\frac{U_\nu}{z'_\nu}}{\frac{U_\nu}{z''_\nu}} = \frac{\frac{U_\xi}{z'_\xi}}{\frac{U_\xi}{z''_\xi}}; \qquad \frac{z''_\nu}{z'_\nu} = \frac{z''_\xi}{z'_\xi} = k$$

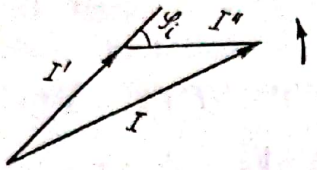
$$z'_\nu = \sqrt{r'^2 + (\nu\omega L')^2}$$

$$z''_\nu = \sqrt{r''^2 + (\nu\omega L'')^2} \tag{4}$$

astfel că

$$r'' = kr' \qquad L'' = kL'$$

$$\operatorname{tg}\varphi''_\nu = \operatorname{tg}\varphi'_\nu; \quad \varphi''_\nu = \varphi'_\nu.$$



26.235. Valorile efective ale curenților în regim nesinusoidal.

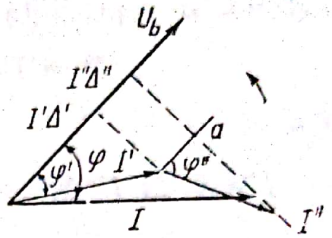


Fig. 26.236. Valorile efective ale tensiunii U_b și ale curenților I' și I'' nu sînt în același plan.

Figura 26.235 reprezintă cele trei valori efective ale curenților electrici i, i' și i'' în regim nesinusoidal.

Cînd se trece la fixarea poziției valorii efective a tensiunii U_b față de valorile efective ale curenților se constată că în general U_b, I' și I'' nu se găsesc în același plan. Aceasta este caracteristica cea mai importantă a mărimilor efective în regim nesinusoidal.

Poziția curenților față de tensiune se stabilește prin determinarea puterii medii în raport cu o perioadă. Avem

$$P' = U_b I'\Delta' \qquad P'' = U_b I''\Delta''$$

$$P' + P'' = P = U_b I\Delta.$$

Dacă se ia în planul hîrtiei în figura 26.236 I' decalat cu φ' față de U_b înapoi, și I'' decalat cu φ'' față de U_b înapoi, se constată că $I'\Delta' + I''\Delta'' = I\Delta$

Însă curentul I nu formează cu I' și I'' din plan, triunghiul curenților.

Dacă se rotește I'' în jurul axei a și I în jurul lui U_b, atunci se realizează relația

$$I' + I'' = I$$

ceea ce ne arată că $U_b I'$ și I'' nu se găsesc în același plan.

În figura 26.237 se reprezintă pozițiile valorilor efective în spațiu. Avem

$$I'\Delta' + I''\Delta'' = I\Delta.$$

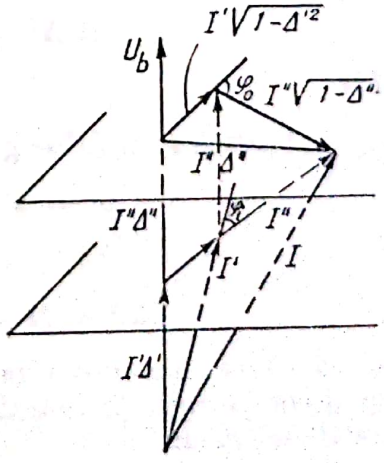


Fig. 26.237. Pozițiile valorilor efective U_b, I', I'', în spațiu.

Din diagramă se reprezintă relația curenților

$$I^2 = I'^2 + I''^2 + 2I'I''\Delta_i$$

în felul următor

$$I'^2 + I''^2 + 2I'I''\Delta_i = (I'\Delta' + I''\Delta'')^2 + (I'\sqrt{1-\Delta'^2})^2 +$$

$$+ (I''\sqrt{1-\Delta''^2})^2 + 2I'I''\sqrt{1-\Delta'^2}\sqrt{1-\Delta''^2}\cos\varphi_0.$$

Pentru $\cos\varphi_0 = 1$, U_b, I' și I'' se găsesc în același plan.

Într-un astfel de caz se obține

$$(I'\Delta' + I''\Delta'')^2 + (I'\sqrt{1-\Delta'^2} + I''\sqrt{1-\Delta''^2})^2 = I'^2 + I''^2 + 2I'I''\Delta_i$$

de unde se deduce

$$\Delta'\Delta'' + \sqrt{(1-\Delta'^2)(1-\Delta''^2)} = \Delta_i. \qquad (4)$$

Relația (4) reprezintă criteriul cînd U_b, I' și I'' se găsesc în același plan (sînt coplanari).

Relația (4) este satisfăcută în trei cazuri:

Cazul I: în regim sinusoidal. Avem

$$\Delta' = \cos\varphi' \qquad \Delta'' = \cos\varphi''$$

$$\sqrt{(1-\Delta'^2)(1-\Delta''^2)} = \sin\varphi'\sin\varphi''$$

astfel că

$$\cos\varphi'\cos\varphi'' + \sin\varphi'\sin\varphi'' = \cos(\varphi' - \varphi'') = \cos\varphi_i.$$

Cazul II:

Avem $\Delta' = 1$, $\varphi' = 0$.

Înseamnă că I' se găsește în direcția lui U_b, astfel că $\varphi'' = \varphi_i$. Se obține

$$\Delta'\Delta'' = \Delta'' = \Delta_i$$

Cazul III

Avem $\Delta_i = 1$ adică I' și I'' se găsesc în aceeași direcție

$$\varphi' = \varphi'', \quad \Delta' = \Delta''.$$

Avem

$$\Delta'^2 + (1-\Delta'^2)^2\Delta_i = 1.$$

Se remarcă că la măsurarea puterii P cu wattmetrul în regim nesinusoidal, avem două circuite în paralel: circuitul de utilizare cu circuitul de tensiune al wattmetrului.

Scanned with OKEN Scanner

Deoarece în circuitul de tensiune al wattmetrului curentul I_v cade în aceeași direcție ca U_b, deoarece în acest circuit există numai o rezistență electrică $(r_v + R)$ înseamnă că U_b, I_v și I se găsesc în același plan.

Pentru determinarea poziților relative între ele ale lui U_b, I' și I'' pe cale experimentală, ne sprijinim pe diagrama din figura 26.238.

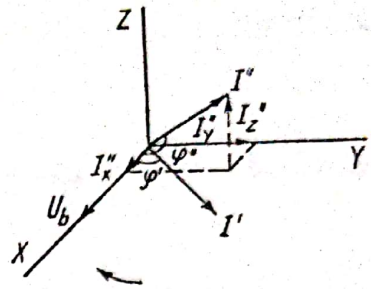


Fig. 26.238. Pozițiile în spațiu ale curenților I', I'', față de U_b.

Se cunosc U_b, I', I'', P', P'', precum și I', I'', Δ_i obținut cu un dinamometru cu i' în bobina fixă și i'' în bobina mobilă.

Se ia U_b în direcția axei x. Din $P' = U_b I' \Delta'$ se determină Δ' și se fixează I' în planul xy cu decalarea φ' față de U_b, în care $\Delta' = \cos \varphi'$.

Odată cu introducerea tensiunii de borne U_b în sensul axei x se ia în mod excepțional sensul de rotație a amplitudinilor în planul xy în sensul acelor de la ceasornic, pentru ca I' să apară defazat înapoi cu φ' față de U_b.

Din $P'' = U_b I'' \Delta''$ se determină Δ''.

I'' formează cu U_b unghiul φ'', dar nu se cunoaște poziția lui I'' față de I'.

Exprimîndu-se valorile efective ca vectori, în forma

$$\mathcal{U}_b = U_b i$$

$$\mathcal{I}' = I_x' i + I_y' j$$

$$\mathcal{I}'' = I_x'' i + I_y'' j + I_z'' k$$

astfel că

$$(\mathcal{U}_b \mathcal{I}') = P' = U_b I_x' = U_b I' \Delta'$$

$$(\mathcal{U}_b \mathcal{I}'') = P'' = U_b I_x'' = U_b I'' \Delta''$$

se obține

$$I_x', \; I_x'' \text{ și } I_y'.$$

Din

$$(\mathcal{I}' \mathcal{I}'') = I' I'' \Delta_i = I_x' I_x'' + I_y' I_y''$$

se obține Δ_i și I_y'' iar din

$$I_x''^2 + I_y''^2 + I_z''^2 = I''^2$$

se obține I_z''.

Din

$$I' I'' \Delta_i = I_x' I_x'' + I_y' I_y'' = (I' \Delta')(I'' \Delta'') + I' \sqrt{1 - \Delta'^2} I_y''$$

se obține

$$\Delta_i = \Delta'\Delta'' + \frac{1}{I''}\sqrt{1-\Delta'^2}\,I''_y$$

astfel că

$$I''_y = I''\frac{\Delta_i - \Delta'\Delta''}{\sqrt{1-\Delta'^2}}.$$

Pe de altă parte din

$$I''^2 = I''^2_x + I''^2_y + I''^2_z$$

se obține

$$I''^2_z = I''^2 - I''^2\Delta''^2 - I''^2\left(\frac{\Delta_i - \Delta'\Delta''}{\sqrt{1-\Delta'^2}}\right)^2$$

astfel că

$$I''^2_z = I''^2\frac{(1-\Delta''^2)(1-\Delta'^2) - (\Delta_i - \Delta'\Delta'')^2}{1-\Delta'^2}.$$

Cînd I', I'' și U_b sînt coplanari, adică I'' cade în planul xy avem

$$\Delta_i = \Delta'\Delta'' + \sqrt{(1-\Delta')^2(1-\Delta'')^2}.$$

Se vede din relația de mai sus că pentru

$$(\Delta_i - \Delta'\Delta'')^2 = (1-\Delta'^2)(1-\Delta''^2)$$

I_z devine nul.

În cazul cînd I'' e perpendicular pe U_b, avem $\Delta'' = 0$, $I'_x = 0$. Se obține

$$I''^2_z = I''^2\left(1 - \frac{\Delta_i^2}{1-\Delta'^2}\right).$$

Din diagrama din figura 26.239 se vede că atîta timp cît $\Delta_i < \sqrt{1-\Delta'^2}$ adică $\varphi_i > \frac{\pi}{2} - \varphi$, I' se găsește în planul xy, iar I'', care e perpendicular pe U_b, se găsește în planul yz.

Cînd I' cade în direcția lui U_b, adică $\Delta' = 1$, atunci U_b, I' și I'' se găsesc în același plan, ceea ce înseamnă că I'' poate fi considerat în axa y.

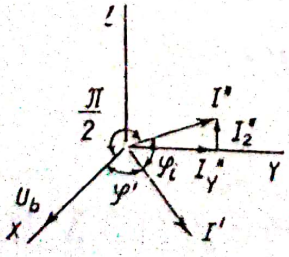


Fig. 26.239. I'' perpendicular pe U_b.

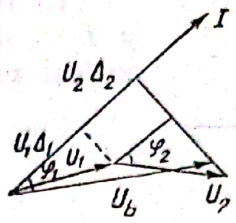


Fig. 26.240. Valori efective ale curentului I și ale tensiunilor U_1 și U_2.

De altfel din relația de mai sus între I_z'' și I'' se obține pentru $\Delta' = 1$ o nedeterminare în forma:

$$\frac{\Delta_i^2}{1-\Delta'^2} = \frac{0}{0}.$$

În cazul cînd avem două circuite în serie în regim nesinusoidal se recomandă să se fixeze puterea totală P în sensul lui I în loc să fie fixată în sensul lui U_b ca în cazul circuitelor în paralel.

În figura 26.240 se vede că fixînd pozițiile tensiunilor U_1 și U_2 a celor două circuite în serie, față de I cu ajutorul puterilor; se obține

$$\Delta_1 = \cos\ \varphi_1 \qquad \Delta_2 = \cos\ \varphi_2 \qquad \Delta = \cos\ \varphi.$$

Se formează $U_1\Delta_1 + U_2\Delta_2 = U_b\Delta$ dar vîrful lui U_b nu coincide cu vîrful sumei lui U_1 și U_2 plasate în același plan cu I.

Acest rezultat ne arată că I, U_1 și U_2 nu se găsesc în același plan.

Dacă în figura 26.237 se înlocuiesc U_b prin I iar I' prin U_1 și I'' prin U_2 și I prin $U_b = U_1 + U_2$ se va obține o relație asemănătoare cu (4) pentru că I, U_1 și U_2 să se găsească în același plan.

Vom avea

$$\Delta_1\Delta_2 + \sqrt{(1-\Delta_1^2)(1-\Delta_2^2)} = \Delta_U^2 \qquad (4')$$

în care $\Delta_U = \cos\varphi_U$ unde φ_U e defazarea dintre tensiunile U_1 și U_2 considerate ca valori efective.

S-a văzut că relația (4') e satisfăcută în următoarele trei cazuri: 1) regim sinusoidal; 2) $\Delta_1 = 1$ și 3) $\Delta_U = 1$.

În sistemul de coordonate xyz se va lua I în sensul lui x, U_1 în planul xy iar U_2 în spațiu.

În felul acesta se constată că I_1 este defazat înapoi față de valoarea efectivă U_1 cu φ_1 iar sensul de rotație al valorilor efective se menține conform regulii generale în sens opus mișcării acelor de la ceasornic.

Cînd se urmăresc valorile efective ale tensiunilor U_1, U_2 din două circuite în serie, în regim nesinusoidal, spre exemplu un circuit conține numai o capacitate constantă iar celălalt conține o înfășurare cu miez de fier la care se neglijează rezistența electrică a înfășurării, se constată că curentul electric nu este sinusoidal. În consecință și cele două tensiuni U_1 și U_2 corespund la două tensiuni momentane nesinusoidale.

Ca urmare $U_C = U_1$ și $U_L = U_2$ împreună cu I nu se găsesc în același plan.

Scanned with OKEN Scanner

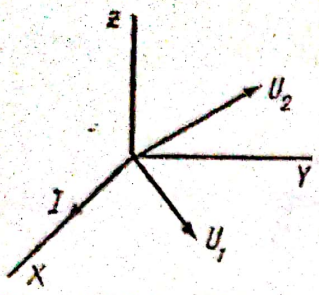


Fig. 26.241. Valorile efective U_1, U_2 și I la două circuite în serie.

În figura 26.241 se prezintă valorile efective U_1, U_2 și I la două circuite în serie care nu se găsesc în același plan.

Fie

$$\mathcal{I} = Ii$$

$$\mathcal{U}_1 = U_{1x}i + U_{1y}j$$

$$\mathcal{U}_2 = U_{2x}i + U_{2y}j + U_{2z}k.$$

Se formează

$$IU_1\Delta_1 = IU_{1x} \quad (1) \qquad U_1U_2\Delta_U = U_{1x}U_{2x} + U_{1y}U_{2y} \quad (3)$$

$$IU_2\Delta_2 = IU_{2x} \quad (2) \qquad U_2^2 = U_{2x}^2 + U_{2y}^2 + U_{2z}^2. \quad (4)$$

Din (3) se deduc

$$U_1U_2\Delta_U = U_1\Delta_1U_2\Delta_2 + U_1\sqrt{1-\Delta_1^2}\,U_{2y}$$

sau

$$(\Delta_U - \Delta_1\Delta_2)U_1U_2 = U_1\sqrt{1-\Delta_1^2}\,U_{2y}$$

de unde se obține

$$U_{2y} = U_2\frac{\Delta_U - \Delta_1\Delta_2}{\sqrt{1-\Delta_1^2}}.$$

Din (4) rezultă

$$U_2^2 = (U_2\Delta_2)^2 + U_2^2\frac{(\Delta_U - \Delta_1\Delta_2)^2}{1-\Delta_1^2} + U_{2z}$$

de unde se deduce U_{2z}

$$U_{2z} = U_2^2\frac{(1-\Delta_1)^2(1-\Delta_2^2) - (\Delta_U - \Delta_1\Delta_2)^2}{1-\Delta_1^2}.$$

26.6. PUTERILE ACTIVĂ, REACTIVĂ, DEFORMANTĂ ȘI APARENTĂ ÎN REGIM NESINUSOIDAL

Ne folosim de o indetitate ca aceea din paragraful 21.1, formula (12) care reprezintă legătura dintre puterea maximă cu puterile active, reactive și puterea de nesimetrie.

Se introduce așa dar următoarea identitate

$$(U_1^2 + \ldots + U_\nu^2 + U_\xi^2 + \ldots)(I_1^2 + \ldots + I_\nu^2 + I_\xi^2 + \ldots) =$$
$$= (\Sigma U_\nu I_\nu \cos\varphi_\nu)^2 + (\Sigma U_\nu I_\nu \sin\varphi_\nu)^2 + \Sigma\{(U_\nu I_\xi)^2 +$$
$$+ (U_\xi I_\nu)^2 - 2U_\nu U_\xi I_\nu I_\xi \cos(\varphi_\nu - \varphi_\xi)\} \quad (1)$$

care se verifică ușor.

Avem

$$U_\nu^2 I_\nu^2 = (U_\nu I_\nu \cos \varphi_\nu)^2 + (U_\nu I_\nu \sin \varphi_\nu)^2$$

$$U_\xi^2 I_\xi^2 = (U_\xi I_\xi \cos \varphi_\xi)^2 + (U_\xi I_\xi \sin \varphi_\xi)^2$$

$$2U_\nu I_\nu \cos \varphi_\nu - U_\xi I_\xi \cos \varphi_\xi + 2U_\nu I_\nu \sin \varphi_\nu U_\xi I_\nu \sin \varphi_\nu -$$

$$- 2U_\nu U_\xi I_\nu I_\xi \cos (\varphi_\nu - \varphi_\xi).$$

Din (1) rezultă

$$P_a^2 = P^2 + P_r^2 + P_d^2 \tag{2}$$

în care P_d e denumită puterea deformantă care apare în regim nesinusoidal.

E interesant de remarcat, că puterile P, P_r și P_d se reprezintă în spațiu prin segmente de drepte.

Pentru a reprezenta geometric puterile P, P_r, P_d și P_a se introduce o tensiune ajutătoare u_b^*.

Avem

$$u_b = u_{1m} \sin (\omega t + \alpha_1) + \ldots + u_{\nu m} \sin (\nu\omega t + \alpha_\nu) + \ldots$$

$$i = i_{1m} \sin (\omega t + \alpha_1 - \varphi_1) + \ldots + i_{\nu m} \sin (\nu\omega t + \alpha_\nu - \varphi_\nu) + \ldots$$

$$u_b^* = u_{1m} \sin \left(\omega t + \alpha_1 - \frac{\pi}{2}\right) + \ldots + u_{\nu m} \sin \left(\nu\omega t + \alpha_\nu - \frac{\pi}{2}\right) + \ldots$$

Se remarcă că u_b și u_b^* nu posedă aceeași formă în; u_ν apare

$$\sin \nu \left(\omega t + \frac{\alpha_\nu}{\nu}\right)$$

iar în u_ν^* apare

$$\sin \nu \left(\omega t + \frac{\alpha_\nu}{\nu} - \frac{\pi}{2\nu}\right).$$

Avem

$$\sin \left(\nu\omega t + \alpha_\nu - \frac{\pi}{2}\right) = - \cos (\nu\omega t + \alpha_\nu).$$

Prin introducerea tensiunii ajutătoare U_b^*, puterea reactivă P_r se reprezintă ca o putere activă în forma

$$\frac{1}{T} \int u_b^* i \, dt = \Sigma U_\nu I_\nu \cos \left(-\frac{\pi}{2} + \varphi_\nu\right) =$$

$$= \Sigma U_\nu I_\nu \sin \varphi_\nu = U_b^* I \Delta^* = P_r.$$

Poziția valorii efective U_b^* față de U_b se obține din

$$\frac{1}{T} \int_0^T u_b^* u_b \, dt = \Sigma U_\nu^* U_\nu \cos \frac{\pi}{2} = 0 = U_b U_b^* \Delta_U$$

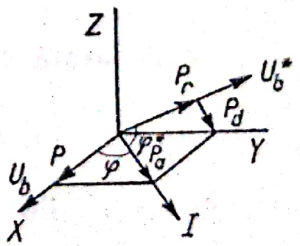


Fig. 26.242. Reprezentarea geometrică a puterilor.

ceea ce ne arată că U_b^* se foloseşte în planul yz din figura 26.242 perpendiculară pe U_b. Mai rămine să se fixeze poziţia lui U_b^* faţă de I

În diagrama din figura 26.242 se ia U_b în direcţia axei x şi I formează cu U_b unghiul φ dat de $\Delta = \cos \varphi$, în care

$$P = U_b I \Delta.$$

Aşadar I se găseşte în planul xy cu poziţia cunoscută.

Se remarcă că luînd tensiunea U_b în sensul axei x, se consideră în mod excepţional sensul de rotaţie a amplitudinilor în sensul acelor de la ceasornic, pentru ca I să apară cu φ defazat înapoi.

Se ia în direcţia lui U_b puterea P ca urmare în direcţia lui I apare puterea aparentă P_a.

Avem

$$P_a \cos \varphi = P.$$

Se ia P_r în direcţia lui U_b^*, deoarece faţă de U_b^*, P_r apare ca o putere activă.

Din diagramă rezultă:

$$(P_a \sin \varphi)^2 = P_r^2 + P_d^2$$

astfel că

$$P_a^2 = (P_a \cos \varphi)^2 + (P_a \sin \varphi)^2 = P^2 + P_r^2 + P_d^2$$

în care P_d e luat perpendicular pe P_r în planul yz.

Din diagramă se obţine

$$P_a^2 = U_b^2 I^2 = (U_b I \Delta)^2 + (U_b^* I \Delta^*)^2 + P_d^2 \tag{3}$$

în care

$$(U_b^* I \Delta^*) + P_d^2 = [(U_b I) \sqrt{1 - \Delta^2}]^2 \tag{4}$$

de unde se deduce

$$(\sqrt{1 - \Delta^2})^2 = \Delta^{*2} + \frac{P_d^2}{(U_b I)^2}. \tag{5}$$

Din (5) rezultă:

$$\cos^2\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) = \cos^2 \varphi^* + \frac{P_d^2}{(U_b I)^2}$$

ceea ce ne arată că

$$\frac{\pi}{2} - \varphi < \varphi^*.$$

Se vede din diagrama din figura 26.242 că φ^* devine egal cu $\frac{\pi}{2} - \varphi$ cînd $P_d = 0$.

Într-adevăr în regim sinusoidal avem $\nu = 1$, $\xi = 0$ ceea ce ne arată că puterea deformantă P_d e nulă.

26.7. EXEMPLE DE CIRCUITE CU PUTERILE ACTIVĂ, REACTIVĂ, DEFORMANTĂ ȘI APARENTĂ ÎN REGIM NESINUSOIDAL

I. Circuit electric format numai dintr-o rezistență electrică r.

Se consideră un circuit electric format numai dintr-o rezistență electrică în regim nesinusoidal.

Avem

$$u_b = u_{1m} \sin(\omega t + \alpha_1) + \ldots + u_{\nu m} \sin(\nu\omega t + \alpha_\nu) + \ldots$$

$$i = i_{1m} \sin(\omega t + \alpha_1) + \ldots + i_{\nu m} \sin(\nu\omega t + \alpha_\nu) + \ldots$$

$$u^* = u_{1m} \sin\left(\omega t + \alpha_1 - \frac{\pi}{2}\right) + \ldots + u_{\nu m} \sin\left(\nu\omega t + \alpha_\nu - \frac{\pi}{2}\right) + \ldots$$

Se obține

$$P = \sum U_\nu I_\nu \cos 0 = U_b I \qquad \Delta = 1$$

$$U_\nu I_\xi - U_\xi I_\nu = 0 \qquad \frac{U_\nu}{I_\nu} = \frac{U_\xi}{I_\xi} = r$$

$$P_r = \sum U_\nu^* I_\nu \cos\frac{\pi}{2} = 0 = U_b^* I \Delta^*, \qquad \Delta^* = \cos\frac{\pi}{2} = 0$$

$$P_d^2 = \sum\{(U_\nu I_\xi)^2 + (U_\xi I_\nu)^2 - 2U_\nu U_\xi I_\nu I_\xi \cos(\varphi_\nu - \varphi_\xi)\}$$

în care $\varphi_\nu = \varphi_\xi = 0$, astfel că

$$P_d^2 = \sum(U_\nu I_\xi - U_\xi I_\nu)^2 = 0$$

$P = P_a$ se găsește în direcția lui U_b cu I (v. diagrama din fig. 26.243).

II. Circuit electric format numai dintr-o inductivitate L.

Circuitul electric este format numai dintr-o inductivitate.

Avem

$$u_b = u_{1m} \sin(\omega t + \alpha_1) + \ldots + u_{\nu m} \sin(\nu\omega t + \alpha_\nu) + \ldots$$

$$i = i_{1m} \sin\left(\omega t + \alpha_1 - \frac{\pi}{2}\right) + \ldots + i_{\nu m} \sin\left(\nu\omega t + \alpha_\nu - \frac{\pi}{2}\right) + \ldots$$

$$u_b^* = u_{1m} \sin\left(\omega t + \alpha_1 - \frac{\pi}{2}\right) + \ldots + u_{\nu m} \sin\left(\nu\omega t + \alpha_\nu - \frac{\pi}{2}\right) + \ldots$$

Se obțin

$$P = \sum U_\nu I_\nu \cos\frac{\pi}{2} = 0 = U_b I \Delta \qquad \Delta = \cos\frac{\pi}{2}$$

$$P_r = \sum U_\nu I_\nu \cos 0 = U_b^* I \Delta^* \quad \text{însă} \quad \Delta^* < 1.$$

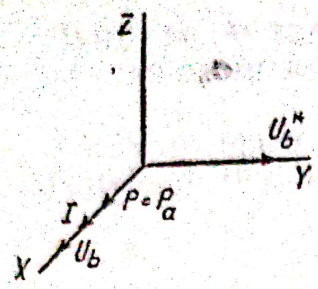


Fig. 26.243. Diagrama puterilor la un circuit cu r.

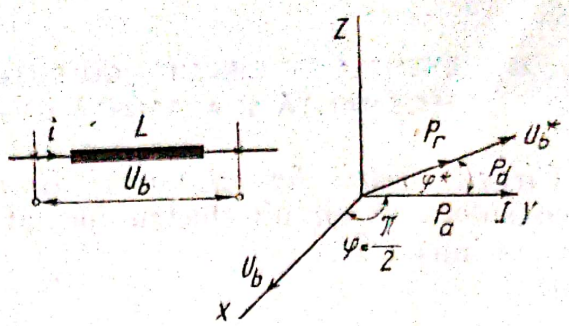


Fig. 26.244. Diagrama puterilor la un circuit cu L.

Pentru că

$$(U_\nu I_\xi - U_\xi I_\nu)^2 > 0$$

$$(I_\nu \nu\, \omega L I_\xi) - (I_\xi\, \xi \omega L I_\nu) = (I_\nu I_\xi\, \omega L)(\nu - \xi)$$

$$I_\nu I_\xi \omega L(\nu - \xi)^2 > 0$$

$$P_d^2 = \Sigma(U_\nu I_\xi - U_\xi I_\nu)^2 \neq 0.$$

În diagrama puterilor P_r și P_d se găsesc în planul yz (v. diagrama din figura 26.244).

În cazul a două circuite paralele care conțin numai inductivitățile L' diferit de L'' curenții electrici I' și I'' care sînt ortogonali la U_b nu posedă aceeași direcție.

Aceasta se justifică prin aceea că față de U_b^*, P_r' diferă de P_r'' și P_d' diferă de P_d''.

Se obține

$$P_r' = \Sigma U_\nu I_\nu' \cos\, 0 = U_b^* I' \Delta^{*\prime}$$

cu

$$(U_\nu\, I_\xi' - U_\xi I_\nu')^2 = I_\nu' I_\xi' \omega L'(\nu - \xi)^2 > 0$$

$$P_d'^2 = \Sigma(U_\nu I_\xi' - U_\xi\, I_\nu')^2 \neq 0$$

respectiv

$$P_r'' = \Sigma U_\nu I_\nu''\, \cos\, 0 = U_b^* I''\, \Delta^{*\prime\prime}$$

cu

$$(U_\nu\, I_\xi' - U_\xi I_\nu'')^2 = I_\nu''\, I_\xi''\, \omega L''(\nu - \xi)^2 > 0$$

$$P_d''^2 = \Sigma(U_\nu I_\xi'' - U_\xi I_\nu'')^2 \neq 0.$$

Dacă în diagrama din figura 26.244 se ia I' în axa y atunci I'' se va afla deasupra axei y obținîndu-se componenta I_z'' a lui I'' diferită de zero în forma

$$I_z''^2 = I''^2(1 - \Delta_i^2) \text{ pentru } \Delta'' = 0$$

în care Δ_i, care corespunde lui φ_i, arcul dintre I' și I'', e diferit de valoarea 1.

III. *Circuitul unui cuptor electric*

La un cuptor electric cînd tensiunea de borne e sinusoidală, curentul electric i nu mai e sinusoidal.

Avem

$$u_b = u_{1m} \sin \omega t$$

$$i = i_{1m} \sin \omega t + \ldots + i_{\nu m} \sin (\nu \omega t + \alpha_\nu) + \ldots$$

$$u_b^* = u_{1m} \sin \left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right).$$

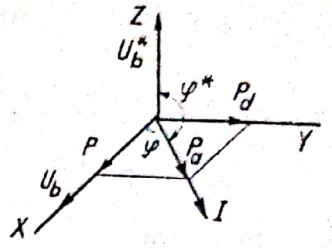


Fig. 26.245. Diagrama puterilor la un cuptor electric.

Se obține

$$I^2 = I_1^2 + I_3^2 + \ldots + I_\nu^2 + \cdots = I_1^2 + I_1^2 k_d^2 = I_1^2(1 + k_d^2)$$

în care

$$I_1^2 k_d^2 = I_3^2 + \ldots + I_\nu^2 + \ldots$$

reprezintă reziduul deformant iar k_d e denumit factorul de distorsiune.

Avem

$$P = U_1 I_1 = U_b I\Delta$$

astfel că

$$I_1 = I\Delta.$$

Ca urmare din

$$I^2 = I^2\Delta^2(1 + k_d^2)$$

se obține

$$1 + k_d^2 = \frac{1}{\Delta^2}.$$

Cunoscîndu-se Δ se determină factorul de distorsiune k_d.

De aici se trage următoarea concluzie: se poate determina reziduul deformant la o funcție periodică generală de timp pentru care avem

$$I^2 = I_1^2 + I_3^2 + \ldots + I_\nu^2 + \ldots = I_1^2(1 + k_d^2)$$

dacă se folosește o tensiune sinusoidală cunoscută în forma

$$u_b = u_m \sin(\omega t + \alpha_1)$$

la care α_1 se poate varia.

Cu ajutorul unui generator la care poziția statorului se poate schimba, se obține ușor o tensiune sinusoidală cu o defazare anumită față de o altă funcție sinusoidală de timp, dată.

Folosindu-se un wattmetru la care circuitul de tensiune este conectat la $u_b = u_m \sin(\omega t + \alpha_1)$ și prin bobina de curent circulă curentul nesinusoidal i, se obține puterea P ca o valoare maximă la o anumită poziție a statorului generatorului.

Scanned with OKEN Scanner

Ca urmare se obține

$$P = U_b I\Delta = U_b I_1.$$

de unde se deduc $I_1 = I\Delta$.

Astfel că din

$$I^2 = I_1^2(1 + k_d^2)$$

se obține k_d^2.

În felul acesta se obține pe lîngă valoarea efectivă I_1 și reziduul deformant $I_1^2 k_d^2$.

În continuare pentru circuitul cuptorului electric se mai obține

$$P_r = U_1 I_1 \cos\frac{\pi}{2} = 0 = U_b^* I\Delta^* \quad \text{cu} \quad \Delta^* = \cos\frac{\pi}{2} = 0$$

$$P_d^2 = U_1^2 \{I_3^2 + I_5^2 + \dots I_\nu^2\} = U_1^2 (I^2 - I^2\Delta^2) = P_a^2 - P^2.$$

Din diagrama puterilor din figura 26.245 tensiunea U_b^* se găsește în axa Z, formînd cu I unghiul $\varphi^* = \frac{\pi}{2}$ iar puterea P_d este perpendiculară pe U_b^*.

Se obține

$$P_a^2 = P^2 + P_d^2.$$

IV. *Circuitul unui redresor electric*

La un redresor electric se dau

$$u_b = u_{1m} \sin \omega t$$

$$i = i_{1m} \sin(\omega t - \varphi_1) + \dots + i_{\nu m} \sin(\nu\omega t + \alpha_\nu) + \dots$$

$$u_b^* = u_{1m} \sin\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right).$$

Se obțin

$$P = U_b I_1 \cos\varphi_1 = U_b I\Delta$$

$$I_1 = \delta I$$

$$I_1 \cos\varphi_1 = \delta I \cos\varphi_1 = I\Delta$$

$$I_1 \sin\varphi_1 = \delta I \sin\varphi_1 = I\Delta^* \qquad \delta^2 = \Delta^2 + \Delta^{*2}$$

$$P_r = U_b I_1 \sin\varphi_1 = U_b^* I\Delta^*$$

$$P_d^2 = U_b^2 \{I_3^2 + \dots + I_\nu^2 + \dots\}$$

$$P_d^2 = U_b^2 (I^2 + I_1^2) = P_a^2 - (P^2 + P_r^2).$$

Din diagrama din figura 26.246 se obțin pozițiile puterilor.

Scanned with OKEN Scanner

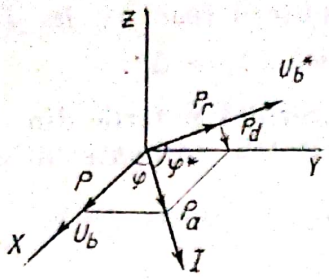


Fig. 26.246. Diagrama puterilor la un redresor electric.

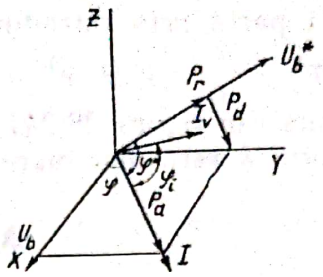


Fig. 26.247. Măsurarea puterii reactive în regim nesinusoidal.

V. *Măsurarea puterii reactive în regim nesinusoidal*

S-a văzut în paragraful 11.1 că la măsurarea puterii reactive în regim sinusoidal se înlocuiește rezistența R din circuitul bobinei de tensiune cu o inductivitate L.

Ne întrebăm ce măsoară un astfel de wattmetru cu L în circuitul de tensiune în regim nesinusoidal?

Pentru circuitul de utilizare în paralel cu circuitul de tensiune al wattmetrului conectat la tensiunea u_b se obține:

$$u_b = u_{1m} \sin(\omega t + \alpha_1) + \ldots + u_{\nu m} \sin(\nu\omega t + \alpha_\nu) + \ldots$$

$$i = i_{1m} \sin(\omega t + \alpha_1 - \varphi_1) + \ldots + i_{\nu m} \sin(\nu\omega t + \alpha_\nu - \varphi_\nu) + \ldots$$

$$i_v = i_{v1m} \sin\left(\omega t + \alpha_1 - \frac{\pi}{2}\right) + \ldots + i_{v\nu m} \sin\left(\nu\omega t + \alpha_\nu - \frac{\pi}{2}\right) + \ldots$$

$$u_b^* = u_{1m} \sin\left(\omega t + \alpha_1 - \frac{\pi}{2}\right) + \ldots + u_{\nu m} \sin\left(\nu\omega t + \alpha_\nu - \frac{\pi}{2}\right).$$

Cuplul mijlociu în raport cu o perioadă care acționează asupra bobinei mobile a wattmetrului este proporțional cu $II_v\Delta_t$.

Avem

$$\sum I_\nu I_{v\nu} \sin\varphi_\nu = II_v\Delta_t. \tag{2}$$

Puterea reactivă se reprezintă în forma

$$\sum U_\nu I_\nu \sin\varphi_\nu = U_b^* I\Delta^*. \tag{3}$$

Relațiile (2) și (3) pentru a fi comparate între ele se reprezintă în formele

$$\sum I_\nu \frac{U\nu}{\nu\omega L} \sin\varphi_\nu = I\frac{U_b}{k\omega L}\Delta_t \tag{4}$$

$$\sum \frac{U_\nu}{\omega L} I_\nu \sin\varphi_\nu = \frac{U_b^*}{\omega L} I\Delta^*. \tag{5}$$

S-a relevat la cercetarea a două circuite în paralel în regim nesinusoidal că U_b, I și I_v nu se găsesc în același plan.

Pe de altă parte prin introducerea puterii reactive în direcția lui U_b s-a relevat că $\varphi^* > \frac{\pi}{2} - \varphi$ și $\varphi^* > \varphi_t$ adică, $\Delta_t > \Delta^*$.

În diagrama din figura 26.247 se reprezintă puterile din circuite. Cum factorul k este mai mare ca unitatea, se poate întîmpla ca

$$\Delta^* \geqslant \frac{\Delta_t}{k}. \tag{6}$$

Pentru determinarea factorului de putere mediu (cos φ) med ar fi trebuit să se obțină de la contorul de energie activă și energie reactivă.

$$W^{\text{kWh}} = U_b^{\text{kV}}(I\Delta)_{\text{mijl}}\, h^{\text{ore}} \tag{7}$$

$$W_r'^{\text{kVAr}} = U_b(I\sqrt{1-\Delta^2})_{\text{mijl}}\, h^{\text{ore}} \tag{8}$$

de unde s-ar fi obținut

$$\frac{W_r'}{W} = (\text{tg}\,\varphi)_{\text{mijl}}. \tag{9}$$

Cum însă în locul relației (8) se folosește

$$W_r'' = U_b(I\Delta_t)_{\text{mijl}}\, h^{\text{ore}} \tag{10}$$

în care

$$\Delta_t < \sqrt{1-\Delta^2}$$

înseamnă că W_r'' e mai mic ca W' și astfel că prin $\frac{W_r''}{W} = (\text{tg}\,\varphi'')_{\text{mijl}}$ se obține un unghi φ'' mai mic, deci cu un cos φ'' mai mare ca cos φ.

VI. *Determinarea caracteristicii de magnetizare*

$(k\Phi)_{\text{mom}}$ în funcție de i_{mom} din caracteristica de magnetizare $(k\Phi)_{\max}$ în funcție de valoarea efectivă I a curentului electric i, care conține în special armonica de ordinul 3.

În cazul cînd caracteristica de magnetizare pentru valorile momentane $(k\Phi)_{\text{mom}} = f(i)$ ar fi cunoscută ca în figura 26.248, ea se poate exprima analitic în forma

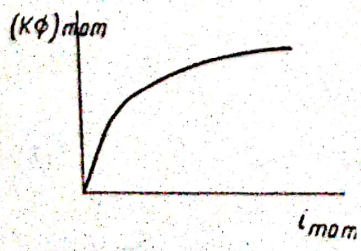


Fig. 26.248. Caracteristica de magnetizare.

$$i = \frac{1}{\lambda}[(k\Phi) - a(k\Phi)^3 + b(k\Phi)^5] \tag{1}$$

în care constantele λ, $\frac{a}{\lambda}$ și $\frac{b}{\lambda}$ devin cunoscute prin stabilirea a trei ecuații pentru 3 puncte de pe curbă.

Cînd bobina cu W spire și cu miez de fier e conectată la o tensiune de borne sinusoidală și rezistența electrică a bobinei e neglijabilă față de reactanța ei ωL, fluxul magnetic $(k\Phi)$ momentan apare ca o funcție cosinusoidală de timp în forma

$$(k\Phi) = (k\Phi)_{max} \cos \omega t.$$

Ca urmare relația (1) devine

$$i = \frac{1}{\lambda} [(k\Phi)_m \cos \omega t - a\,(k\Phi)_m^3 \cos^3 \omega t + b(k\Phi)_m^5 \cos^5 \omega t \cdot \qquad (2)$$

Ținîndu-se seama de formula lui Euler în forma

$$(e^{j\omega t} + e^{-j\omega t})^n = 2^n \cos^n \omega t$$

se obțin următoarele relații

$$\cos^2 \omega t = \frac{1}{2} (\cos 2\omega t + 1)$$

$$\cos^3 \omega t = \frac{1}{4} (\cos 3\omega t + 3 \cos \omega t)$$

$$\cos^4 \omega t = \frac{1}{8} (\cos 4\omega t + 4 \cos 2\omega t + 3) \qquad (3)$$

$$\cos^5 \omega t = \frac{1}{16} (\cos 5\omega t + 5 \cos 3\omega t + 10 \cos \omega t)$$

$$\cos^6 \omega t = \frac{1}{2 \cdot 16} (\cos 6\,\omega t + 6 \cos 4\omega t + 15 \cos 2\,\omega t + 10).$$

. . . . . .

Înlocuind în (2) pe $\cos^3 \omega t$ și $\cos^5 \omega t$ prin expresiile corespunzătoare din (3), se obține ca o serie trigonometrică de $\cos \omega t$, $\cos 3\,\omega t$ etc.

Pentru determinarea amplitudinii armonicei fundamentale a curentului electric i se formează integrala

$$\int_0^T i \cos \omega t \, dt = i_{1m} \frac{T}{2} = \frac{1}{\lambda} \int_0^T [(k\Phi)_m \cos^2 \omega t - a(k\Phi)_m^3 \cos^4 \omega t + b(k\Phi)_m^5 \cos^6 \omega t] \, dt$$

și înlocuind pe $\cos^2 \omega t$, $\cos^4 \omega t$ și $\cos^6 \omega t$ prin expresiile corespunzătoare din (3) se obține

$$i_{1m} = I_1 \sqrt{2} = \frac{1}{\lambda} \left\{ (k\Phi)_{max} - a(k\Phi)_{max}^3 \frac{3}{4} + \frac{5}{8} b(k\Phi)_{max}^5 \right\}. \qquad (4)$$

Relația (4) exprimă caracteristica de magnetizare a fluxului maximal $(k\Phi)_{max}$ în funcție de valoarea efectivă I_1 a armonicei fundamentale a curentului i.

Prin conectarea bobinei cu W spire și cu miez de fier la o tensiune de borne sinusoidală u_b se obține experimental, pentru cazul cînd tensiunea electromotoare u_Φ e practic egală cu $-u_b$ din

$$-u_\Phi = k_f \cdot 4 \cdot (k\Phi)_{max} W \cdot f \cdot 10^{-8}$$

cu $k_f = 1{,}11$ în regim sinusoidal $(k\Phi)_{max}$ în funcție de valoarea efectivă a curentului I. Se știe că i conține în special armonica de ordinul 3.

Dacă se poate folosi un grup de două generatoare sincrone cu tensiuni sinusoidale, așa fel ca la unul din generatoare, să se poată roti statorul față de pereții statorului de la celălalt generator, cu un unghi oarecare, deci să se creeze două tensiuni sinusoidale cu diferite defazări între ele, atunci se va putea determina experimental valoarea electrică I_1 a armonicei de bază a curentului i.

Se introduc prin bobina de curent al unui wattmetru curentul i iar circuitul de tensiune al wattmetrului va fi conectat la o tensiune de bornă sinusoidală în fază cu armonica de bază a curentului i.

Mai întîi se va face ca tensiunea uneia din cele două generatoare să alimenteze bobina cu W spire și cum valoarea efectivă I e practic perpendiculară pe U_b, se va lua tensiunea sinusoidală a celui de al doilea generator defazată cu $\frac{\pi}{2}$ față de prima tensiune.

Prin bobina de curent a wattmetrului va circula curentul i din bobina cu miez de fier, iar circuitul de tensiune al wattmetrului se va conecta la al doilea generator, printr-o mică deviație a poziției statorului de la al doilea generator, se va obține la wattmetru un număr de diviziuni maximale.

În felul acesta s-a realizat ca armonica fundamentală a curentului să devină în fază cu tensiunea de borne, al celui de al doilea generator.

Se măsoară puterea

$$P = U_b I_1 \cos 0$$

P și U_b fiind cunoscute, se deduce valoarea efectivă a armonicei de bază I_1.

În lipsa unui astfel de grup de două generatoare se poate folosi o rețea trifazată cu tensiuni sinusoidale ca în figura 26.249.

Prin bobina de curent a wattmetrului circulă curentul i iar circuitul bobinei de tensiune a wattmetrului e conectat la faza cu tensiunea U_b care practic e defazată cu π față de armonica de bază a curentului i.

În figură curentul I e defazat cu $\frac{\pi}{2}$ înapoi față de tensiunea U_{12} care alimentează bobina cu miez de fier.

Se obține experimental $(k\Phi)_{max}$ în funcție de valoarea efectivă I_1 a armonicei de bază a curentului i.

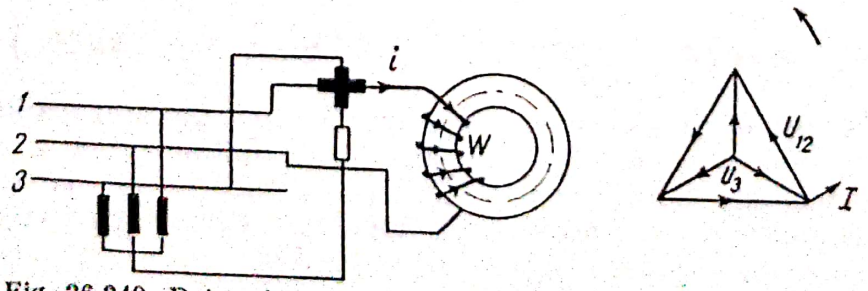


Fig. 26.249. Determinarea experimentală a caracteristicii $(k\Phi)_{max}$ în funcție de I_1.

Scanned with OKEN Scanner

În felul acesta se realizează experimental o caracteristică de magnetizare pentru care expresia analitică e prezentată în (4).

Pentru trei puncte oarecare de pe această caracteristică se obţin din (4) parametrii λa şi b. Ca urmare cu ajutorul acestor parametrii se trece la caracteristica de magnetizare din (2) respectiv (3) pentru valorile momentane ale lui $(k\Phi)$ şi i.

27. FENOMENUL DE FERÓREZONANŢĂ

În figura 27.250 se reprezintă un circuit electric format dintr-o bobină cu miez de fier în serie cu un condensator, conectat la o tensiune de borne U_{b1} considerată ca o funcţie sinusoidală de timp.

Din literatură se cunoaşte diagrama din figura 27.251, α pentru valorile efective ale diferenţelor de potenţiale de la bornele bobinei U_L, de la bornele condensatorului U_C în funcţie de valoarea efectivă a curentului I.

Se formează diferenţa algebrică $(U_L - U_C)$ care reprezintă tensiunea necesară a circuitului din figura 27.250 în funcţie de I

Avem

$$U_{b1} = |U_L - U_C| = I\sqrt{\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}.$$

S-a neglijat rezistenţa electrică a bobinei.

Tensiunea de borne sinusoidală U_{b1}, e considerată ca o tensiune disponibilă.

Din diagrama din figura 27.251, α se constată că după cum tensiunea de borne U_{b1} e mai mică sau mai mare ca ΔU din fig. 27.251 α, curentul electric trece de la I_a la I_b printr-un salt.

Se consideră capacitatea C constantă.

Inductivitatea L descreşte mereu cu creşterea curentului I, ca urmare diferenţa la pătrat $\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2$ devine la un moment dat egal cu zero. Din acest moment curentul electric I tinde să crească la infinit. Cum însă prin

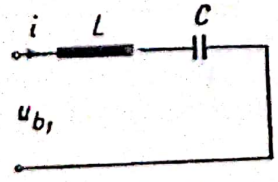


Fig. 27.250 Circuit electric format din L şi C.

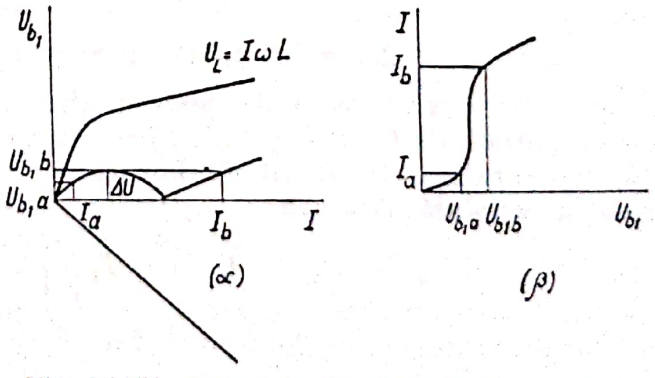


Fig. 27.251. Diagrama de tensiuni şi curenţi în fenomenul de ferorezonanţă.

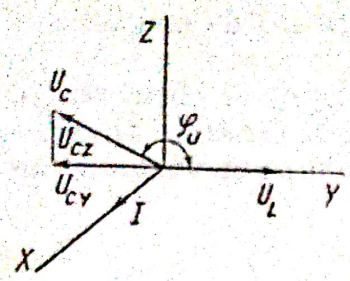


Fig. 27.252. Reprezentarea valorilor efective U_L, U_C, I la două circuite în serie.

creșterea curentului I, L descrește mai departe, diferența de mai sus la pătrat, va obține din nou o valoare pozitivă diferită de zero, astfel că curentul I se fixează la o valoare I_b.

Diagrama din figura 27.251, β reprezintă curentul electric I în funcție de tensiunea de borne disponibilă U_{b1} în cazul fenomenului de ferorezonanță.

În literatură nu s-a ținut seama, că în regim nesinusoidal, datorită curentului i care conține armonici superioare, valorile efective U_L, U_C și I pentru cele două circuite în serie din figura 27.250 nu se găsesc în același plan.

Ca urmare diferența $U_L - U_C$ nu poate exprima o diferență algebrică și în consecință relația (1) nu este strict valabilă.

Cele de mai sus, cu privire la fenomenul de ferorezonanță reprezintă o primă aproximație a acestui fenomen.

În figura 27.252 se reprezintă valoarea efectivă I în sensul axei X, valoarea efectivă U_L defazată înainte cu 90° față de I, fixată în axa Y, iar valoarea efectivă U_C defazată înapoi cu 90° față de I, introdusă în planul YZ.

Componentele U_{CY} și U_{CZ} ale lui U_C se reprezintă în formele

$$U_{CY} = U_C = \frac{\Delta_U - \Delta_1\Delta_2}{\sqrt{1-\Delta_1^2}}$$

$$U_{CZ}^2 = U_C^2 \frac{(1-\Delta_1^2)(1-\Delta_2^2) - (\Delta_U - \Delta_1\Delta_2)}{1-\Delta_1^2}$$

în care

$$U_L I\,\Delta_1 = 0 \qquad U_C I \Delta_2 = 0$$

astfel că

$$\Delta_1 = 0 \qquad \Delta_2 = 0$$

$$U_{CY} = U_C \Delta_U$$

$$U_{CZ} = U_C \sqrt{1-\Delta_U^2}$$

în care

$$\Delta_U = \cos\varphi_U \text{ (v. paragraful 26.5).}$$

Relația (1) devine valabilă pentru armonicile fundamentale ale diferențelor de potențiale U_L și U_C, ținîndu-se seama că U_b reprezintă însăși armonica fundamentală a tensiunii de borne.

Relația valabilă este

$$U_{b1} = |U_{L1} - U_{C1}| = I_1 \sqrt{\left(\omega L_1 - \frac{1}{\omega C}\right)^2} \qquad (2)$$

în care inductivitatea L_1 se determină din

$$L_1 = \frac{\psi_{1\,max} \cdot 10^{-8}}{I_1 \cdot \sqrt{2}} \qquad (3)$$

deoarece avem

$$U_{L1} = I_1 \omega L_1 = 4\, k_f \psi_{1\,max} f \cdot 10^{-8}. \tag{4}$$

$\psi_{1\,max}$ reprezintă înlănțuirea magnetică maximă care corespunde armonicei fundamentale a curentului i.

În cazul cînd apare $\left(\omega L_1 - \frac{1}{\omega C}\right)$ se recomandă să se introducă relația

$$\omega_0 L_1 = \frac{1}{\omega_0 C} \tag{5}$$

de unde se obține

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{L_1 C}}, \tag{6}$$

în care ω_0 reprezintă frecvența circulară care corespunde rezonanței, atunci cînd se cunosc L și C.

Prin introducerea frecvenței circulare ω_0 în calcul, diferența $\omega L_1 - \frac{1}{\omega C}$ va obține o nouă formă.

Fie

$$\frac{\omega}{\omega_0} = \eta$$

$$\omega L_1 = \sqrt{\frac{L_1}{C}}\,\eta \qquad \frac{1}{\omega C} = \sqrt{\frac{L_1}{C}}\,\frac{1}{\eta} \tag{7}$$

astfel că

$$\omega L_1 - \frac{1}{\omega C} = \sqrt{\frac{L_1}{C}}\left(\eta - \frac{1}{\eta}\right) = \sqrt{\frac{L_1}{C}}\,\frac{\omega^2 - \omega_0^2}{\omega\,\omega_0}. \tag{8}$$

Ținîndu-se seama că I_1 din (2) ia forma

$$I_1 = \frac{U_{b1}}{\sqrt{(\omega L_1 - 1/\omega C)^2}}$$

se obține diferența de potențial U_{L1} în forma

$$U_{L1} = I_1 \omega L_1 = \frac{U_{b1}\omega}{\sqrt{\frac{L_1}{C}}\,\frac{\omega^2 - \omega_0^2}{\omega\omega_0}} = U_{b1}\,\frac{\omega^2}{\omega^2 - \omega_0^2}. \tag{9}$$

Dat fiindcă U_{L1} se exprimă în funcție de U_{b1} o considerăm ca o tensiune disponibilă a circuitului, ω reprezintă variabila.

Apare o problemă nouă:

Se cere să se determine diferența de potențial de la bornele bobinei u_L în forma

$$u_L = \frac{d\psi}{dt} \tag{10}$$

pe care o considerăm ca o tensiune necesară a circuitului.

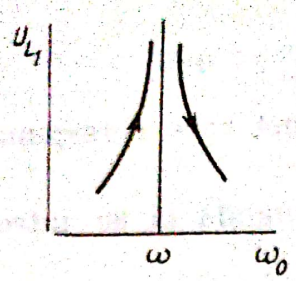


Fig. 27.253. Tensiunea disponibilă U_{L1} ca funcție de ω_0.

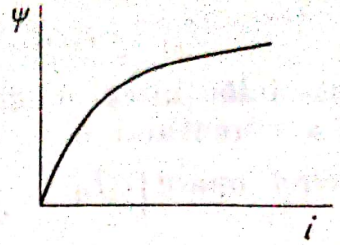


Fig. 27.254. Caracteristica de magnetizare.

Aceasta este posibil atunci, cînd înlănțuirea magnetică ψ este exprimată analitic în funcție de i.

În felul acesta se crează posibilitatea ca în figura 27.253 să se traseze o nouă curbă care să exprime valoarea efectivă U_{L1} a armonicei fundamentale din (10) ca funcție de ω_0. O astfel de tensiune o considerăm ca o tensiune necesară a circuitului. Punctele de intersecție ale curbei noi cu cele din figura 27.251 vor reprezenta puncte stabile sau labile în fenomenul de ferorezonanță.

Dat fiind că în (4) se reprezintă legătura dintre $\psi_{1\,max}$ și I_1, înseamnă că e de mare importanță să obținem pentru bobina cu miez de fier, o caracteristică de magnetizare în care să apară $\psi_{1\,max}$ în funcție de valoarea efectivă a armonicei fundamentale a curentului i .

În figura 27.254 se reprezintă caracteristica de magnetizare a circuitului feromagnetic a bobinei din schema din figura 27.250.

Ținîndu-se seama că în ecuația diferențială care corespunde circuitului din figura 27.250 avem

$$u_{b1} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\psi + \frac{1}{C}\int i\,\mathrm{d}t \tag{11}$$

se recomandă ca sub semnul integralei să apară i ca funcție de înlănțuirea magnetică ψ.

Într-adevăr, se poate forma următoarea expresie analitică valabilă pentru caracteristica de magnetizare

$$i = \frac{1}{\lambda_2}(\psi - a_2\psi^3 + b\,\psi^5). \tag{12}$$

Constantele λ_2, a_2 și b se determină cu ajutorul caracteristicii de magnetizare din figura 27.254.

Ne vom folosi de (12) la rezolvarea ecuației diferențiale din (11).

S-a relevat mai sus că este necesar să se cunoască caracteristica de magnetizare din figura 27.255. Ea se poate obține fie pe cale experimentală sau pe cale analitică așa cum se prezintă în paragraful 26.7 exemplul 6, ținîndu-se seama de (12).

Scanned with OKEN Scanner

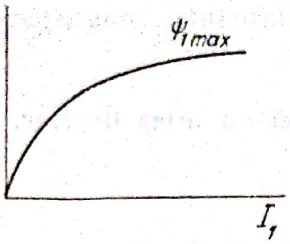


Fig. 27.255. $\psi_{1\,max}$ în funcție de I_1.

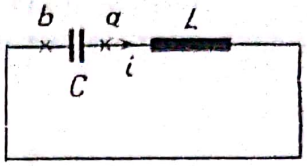


Fig. 27.256. Descărcarea unui condensator peste o inductivitate L.

Rezolvarea ecuației diferențiale pentru ψ.

Pentru rezolvarea ecuației diferențiale în ψ se consideră cazul descărcării unui condensator electric într-un circuit electric format numai din L ca în figura 27.256.

Din schema circuitului din figura 27.256 se obține prin formarea $\int (\mathrm{d}l/\mathcal{E})$

$$V_a - V_b = \frac{Q}{C} = u_C$$

$$V_a - V_b - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(iL) = 0$$

în care s-a neglijat căderea ohmică.

Se formează

$$-\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t} = i$$

semnul minus se datorește faptului că atunci cînd condensatorul se descarcă apare $\mathrm{d}Q < 0$; însă curentul electric considerat este pozitiv.

Se obține

$$u_C = \frac{Q}{C} = -\frac{1}{C}\int i\,\mathrm{d}t + \frac{Q_0}{C}$$

în care

$$\frac{Q_0}{C} = u_{C0}.$$

Ca urmare ecuația diferențială de mai sus devine

$$-\frac{1}{C}\int i\,\mathrm{d}t + u_{C0} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\psi = 0$$

în care

$$\psi = iL$$

sau

$$\frac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{C}\int i\,\mathrm{d}t = u_{C0}. \qquad (13)$$

(13) reprezintă ecuaţia diferenţială a înlănţuirii magnetice ψ în care i în funcţie de ψ este cunoscut din (12).

Deosebim următoarele două cazuri:

I. Bobină fără miez de fier şi II. Bobină cu miez de fier.

Cazul I.

În primul caz avem $i = \frac{\psi}{L}$ în care L e constant.

Ecuaţia diferenţială (13) ia forma

$$\frac{d\psi}{dt} + \frac{1}{LC}\int \psi \, dt = u_{C0} \tag{14}$$

de unde se deduce

$$\frac{d^2\psi}{dt^2} + \frac{1}{LC}\psi = 0 \tag{15}$$

în care $\frac{1}{LC} = \sigma^2$ reprezintă frecvenţa circulară la pătrat.

σ^2 este considerată ca o mărime pozitivă.

Soluţia acestei ecuaţii diferenţiale este cunoscută din Adaus la volumul II.

Avem

$$\psi = \psi_{max} \cos \sigma t. \tag{16}$$

Avînd în vedere că în cazul II bobina posedă un miez de fier, astfel că sub semnul integralei din (13) se introduce i din (12), se recomandă ca o astfel de ecuaţie diferenţială să o rezolvăm pe o altă cale ca cea arătată mai sus. Metoda de integrare folosită o aplicăm şi în cazul ecuaţiei diferenţiale din (15).

Se înmulţeşte ecuaţia diferenţială din (15) cu $2\frac{d\psi}{dt}$ de unde se obţine

$$\left(\frac{d\psi}{dt}\right)^2 + \frac{1}{LC}\psi^2 = u^{*2} \tag{17}$$

în care u^{*2} reprezintă o constantă de integrare care după cum se vede are aceeaşi dimensiune ca $\left(\frac{d\psi}{dt}\right)^2$ adică dimensiunea unei tensiuni la pătrat.

Pentru $\psi = \psi_{max}$ se obţine

$$\frac{1}{LC}\psi^2_{max} = u^{*2} \tag{18}$$

relaţie folosită la determinarea constantei de integrare.

Ecuaţia diferenţială (17) o exprimă în forma

$$dt = \frac{d\psi}{\pm\sqrt{u^{*2} - \psi^2/LC}} \tag{19}$$

Scanned with OKEN Scanner

de unde se obține

$$t - t_0 = -\int \frac{d\psi}{\sqrt{u^* - \psi^2/LC}} = -\sqrt{LC}\,\text{arc sin}\,\frac{-\frac{2\psi}{LC}}{\sqrt{\frac{4}{LC}\,u^{*2}}}$$

se mai poate scrie

$$(t - t_0)\,\frac{1}{\sqrt{LC}} = \varphi = \text{arc sin}\,\frac{\psi}{\sqrt{LC}\,u^{*2}}. \tag{20}$$

Din (19) se deduce:

$$\psi = \sqrt{LC}\,u^* \sin\frac{1}{\sqrt{LC}}\,(t - t_0); \quad \text{Fie}\,\frac{t_0}{\sqrt{LC}} = -\frac{\pi}{2}$$

astfel că

$$\psi = \sqrt{LC}\,u^* \cos\frac{1}{\sqrt{LC}}\,t.... \tag{21}$$

în care

$$\psi_{max} = \sqrt{LC}\,u^*$$

ψ în forma (21) corespunde soluției ecuației diferențiale exprimată în (16) împreună cu (18).

Cazul II.

Cînd condensatorul s-a descărcat pe circuitul unei bobine fără miez de fier, s-a văzut că înlănțuirea magnetică ψ devine proporțională cu cos φ; φ la rîndul lui e proporțională cu intervalul de timp $t - t_0$.

De data aceasta condensatorul se descarcă peste circuitul bobinei care posedă un miez de fier.

Se va vedea că înlănțuirea magnetică ψ va apare tot cu cos φ proporțională. În schimb, φ depinde de argumentul θ care exprimă o integrală eliptică. Ca urmare φ apare ca o sumă de armonice în care apare variabila θ.

Pe de altă parte argumentul θ devine proporțional cu diferența de timp $t - t_0$

În ecuația diferențială (13) se introduce i din (12).

Se obține

$$\frac{d\psi}{dt} + \frac{1}{C}\int \frac{1}{\lambda_2}(\psi - a_2\psi^3 + b\psi^5)dt = u_{C0}.$$

Prin derivare rezultă

$$\frac{d^2\psi}{dt^2} + \frac{1}{\lambda_2 C}(\psi - a_2\,\psi^3 + b\psi^5) = 0.$$

Înmulțind ecuația diferențială cu $2\frac{d\psi}{dt}$ rezultă

$$\left(\frac{d\psi}{dt}\right)^2 + \frac{1}{\lambda_2 C}\left(\psi^2 - \frac{a_2}{2}\psi^4 + \frac{b}{3}\psi^6\right) = u^{*2}.\ ^{1)} \tag{22}$$

În lucrarea de față se introduce i în legătură cu ψ în felul următor

$$i = \frac{\psi}{L} = \frac{1}{\lambda_1}(\psi + a_1\psi^3). \tag{23}$$

Prin aceasta se simplifică rezolvarea ecuației diferențiale și se obține o soluție bună.

Constantele η_1 și a_1 se obțin tot cu ajutorul caracteristicii din figura 27.254. Caracteristica de magnetizare exprimată din (23) diferă puțin față de curba din (5).

Prin introducerea lui i din (23) în ecuația diferențială (14) se obține

$$\frac{d\psi}{dt} + \frac{1}{\lambda_1 C}\int(\psi + a_1\psi^3)\,dt = u_{C0} \tag{24}$$

se formează

$$\frac{d^2\psi}{dt^2} + \frac{1}{\lambda_1 C}(\psi + a_1\psi^3) = 0. \tag{25}$$

Înmulțind ecuația diferențială (25) cu $2\frac{d\psi}{dt}$ se obține

$$\left(\frac{d\psi}{dt}\right)^2 + \frac{1}{\lambda_1 C}\left(\psi^2 + \frac{a_1}{2}\psi^4\right) = u^{*2} \tag{26}$$

sau

$$\left(\frac{d\psi}{dt}\right)^2 = u^{*2}\left(1 - \frac{\psi^2}{\lambda_1 C u^{*2}} - \frac{a_1\psi^4}{2\lambda_1 C u^{*2}}\right). \tag{27}$$

Din (27) se obține

$$t - t_0 = \int_0^{\psi} \frac{d\psi}{u^*\sqrt{1 - \frac{\psi^2}{\lambda_1 C u^{*2}} - \frac{a_1\psi^4}{2\lambda_1 C u^{*2}}}}. \tag{28}$$

Integrala din (28) se transformă într-o integrală eliptică de forma

$$\int \frac{m\,dy}{(1 + y^2)(1 - ny^2)}. \tag{29}$$

---

[1]) Rezolvarea ecuației diferențiale (22) e făcută de Birmanns. J. Birmanns: Die Resonanzspannungen bei eisenhaltiger Infuktivität, Af. E.X. Bd. 1/2 Heft, 1921.

Scanned with OKEN Scanner

În acest scop se introduce prima substituție

$$\psi^2 = gy^2 \tag{30}$$

în care g posedă dimensiunea mărimii ψ^2. Variabila y e fără dimensiune.

Din (30) se deduce

$$2\psi \frac{d\psi}{dt} = g\, 2y \frac{dy}{dt}$$

$$\frac{d\psi}{dt} = gy \frac{dy}{dt} \frac{1}{\sqrt{g}\, y} = \sqrt{g} \frac{dy}{dt}. \tag{31}$$

Introducîndu-se în (27) pe $\frac{d\psi}{dt}$ din (31) rezultă

$$\left(\frac{d\psi}{dt}\right)^2 = g\left(\frac{dy}{dt}\right)^2 = u^{*2}\left(1 - \frac{gy^2}{\lambda_1 Cu^{*2}} - \frac{a_1 g^2 y^4}{2\lambda_1 Cu^{*2}}\right). \tag{32}$$

Pentru a exprima parametrii din (32) în forma numitorului din (29) se formează

$$(1 + y^2)\left(1 - \frac{a_1 g^2 y^2}{2\lambda_1 Cu^{*2}}\right)$$

în locul parantezei din (32), obținîndu-se pentru g ecuația de gradul II în forma

$$\frac{a_1}{2} g^2 - g - \lambda_1 Cu^{*2} = 0 \tag{33}$$

cu soluția

$$g = \frac{1}{a_1} + \sqrt{\frac{1}{a_1^2} + \frac{2\lambda_1 Cu^{*2}}{a_1}}. \tag{34}$$

Se mai formează relația

$$ga_1 = 1 + \sqrt{1 + 2\lambda_1\, Cu^{*2}\, a_1} \tag{35}$$

care va fi folosită mai tîrziu.

Ca urmare $\left(\frac{dy}{dt}\right)^2$ din (32) obține forma

$$\left(\frac{dy}{dt}\right)^2 = \frac{u^{*2}}{g}(1 + y^2)\left(1 - \frac{a_1 g^2 y^2}{2\lambda_1 Cu^{*2}}\right). \tag{36}$$

Pentru ca ecuația diferențială (36) să ne conducă la o integrală eliptică în forma trigonometrică, se introduce a doua substituție

$$\sqrt{\frac{a_1 g^2}{2\lambda_1 Cu^{*2}}}\, y = \cos\varphi. \tag{37}$$

Din care se obține

$$\frac{dy}{dt} = -\sqrt{\frac{2\lambda_1 Cu^{*2}}{a_1 g^2}} \sin\varphi \frac{d\varphi}{dt}. \tag{38}$$

Introducîndu-se (38) în (36) se obține:

$$\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 \sin^2\varphi \frac{2\lambda_1 Cu^{*2}}{a_1 g^2} = \frac{u^{*2}}{g}\left(1 + \frac{2\lambda_1 Cu^{*2}}{a_1 g^2}\cos^2\varphi\right)\sin^2\varphi$$

de unde se deduc

$$\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 = \frac{u^{*2}}{g}\left(\frac{a_1 g^2}{2\lambda_1 Cu^{*2}} + \cos^2\varphi\right). \tag{39}$$

Se formează

$$\cos^2\varphi = 1 - \sin^2\varphi$$

astfel că

$$\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 = \frac{u^{*2}}{g}\left(1 + \frac{a_1 g^2}{2\lambda_1 Cu^{*2}}\right)\left(1 - \frac{\sin^2\varphi}{1 + \frac{a_1 g^2}{2\lambda_1 Cu^{*2}}}\right) \tag{40}$$

în care s-a introdus modulul la pătrat k^2 în forma

$$k^2 = \frac{1}{1 + \frac{a_1 g^2}{2\lambda Cu^{*2}}}. \tag{41}$$

Se mai folosește relația

$$\frac{1}{k^2 g} = \frac{1}{g} + \frac{a_1 g}{2\lambda_1 Cu^{*2}}. \tag{42}$$

Ecuația diferențială (40) devine

$$\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 = \frac{u^{*2}}{gk^2}(1 - k^2\sin^2\varphi). \tag{43}$$

Din ecuația diferențială (43) se obține timpul t în forma unei integrale eliptice.

Avem

$$(t - t_0)\frac{u^*}{\sqrt{g}\,k} = \theta = \int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2\sin\varphi}}. \tag{44}$$

Atunci cînd bobina din circuitul din fig. 27.256 nu posedă miez de fier $(t - t_0)$ s-a exprimat printr-un arc φ, așa cum ne arată (20).

Cînd însă bobina posedă un miez de fier, timpul t se exprimă prin argumentul θ care reprezintă o integrală eliptică.

Scanned with OKEN Scanner

Din (44) se constată că sin φ din integrala eliptică depinde atît de argumentul θ cît și de modulul k. sin φ se reprezintă în acest caz în forma unei serii.

Se scrie

$$\sin \varphi = \sin am\, \theta^{1)} = \frac{2\pi}{kK} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q^{n-1}}{1 - q^{2n-1}} \sin \frac{(2n-1)\pi\theta}{2K} \tag{45}$$

în mod analog se obține

$$\frac{d\varphi}{d\theta} = \frac{\pi}{2K} + \frac{2\pi}{K} \sum_{=}^{\infty} \frac{q^n}{1 + q^{2n}} \cos \frac{n\pi\theta}{K} \tag{46}$$

în care

$$K = \int_0^{\pi/2} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2\varphi}} \qquad K' = \int_0^{\pi/2} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k'^2 \sin^2\varphi}} \tag{47}$$

$$k^2 + k'^2 = 1 \qquad q = e^{-\pi \frac{K'}{K}}.$$

Spre exemplu, pentru

$$k = 0{,}55 \qquad k' = 0{,}898$$

se obține

$$K = 1{,}72 \qquad K' = 2{,}5$$

$$q = e^{-\pi \frac{K'}{K}} = e^{4{,}56} = 0{,}012.$$

Pentru $n = 1$ rezultă

$$\frac{1}{1 + q^2} = 0{,}012 \qquad \frac{\pi}{2K} = 0{,}94$$

$$\frac{2\pi}{K} \frac{q}{1 + q^2} = 0{,}044.$$

Din cele de mai sus se trage concluzia că în (46) termenul al doilea poate fi considerat ca neglijabil față de primul termen.

Din (30) și (37) se obține

$$\psi = \sqrt{g}\, y = \sqrt{g} \sqrt{\frac{2\lambda Cu^{*2}}{a_1 g^2}} \cos \varphi = \sqrt{\frac{2\lambda_1 Cu^{*2}}{a_1 g}} \cos \varphi. \tag{48}$$

---

1) Prin sin $am\,\theta$ se înțelege sin φ care depinde de argumentul θ și de modulul k.

Prin exprimarea lui ψ în funcție de cos φ din (48) apoi pe φ în funcție de θ din (46) și în fine θ în funcție de t din (44) se poate determina u_L în forma (10).

Se obține

$$u_L = \frac{d\psi}{dt} = -\sqrt{\frac{2\lambda_1 C u^{*2}}{a_1 g}} \sin \varphi \frac{d\varphi}{dt} \frac{d\theta}{dt} \tag{49}$$

în care $\frac{d\theta}{dt}$ se obține din (44).

Avem

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{u^*}{\sqrt{g}\, k}. \tag{50}$$

Introducîndu-se în (49) relațiile (45) (46) și (50) neglijîndu-se termenul al doilea din (46), se obține

$$u_L = -\sqrt{\frac{2\lambda_1 C u^*}{a_1 g}} \frac{2\pi}{kK} \frac{\pi}{2K} \frac{u^*}{\sqrt{g}\, k} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q^{n-\frac{1}{2}}}{1 - q^{2n-1}} \sin \frac{(2n-1)\pi u^* t}{2Kk\sqrt{g}} \tag{51}$$

u_L din (51) reprezintă diferența de potențial la bornele bobinei cu miez de fier, atunci cînd condensatorul se descarcă în circuitul bobinei. O astfel de diferență de potențial e considerată ca o tensiune necesară circuitului.

Pentru a verifica exactitatea relațiilor (44) și (48) se revine la bobina fără miez de fier.

În cazul în care bobina nu posedă miez de fier se obține din (23) $a_1 = 0$, ca urmare rezultă

$$i = \frac{\psi}{\lambda_1} = \frac{\psi}{L}.$$

Din (34) se obține pentru $a_1 = 0 \qquad g = \infty$
iar din (35) rezultă

$$a_1 g = 2.$$

Pe de altă parte modulul la pătrat k^2 din (41) devine egal cu zero iar $\frac{1}{k^2 g}$ obține valoarea $\frac{1}{k^2 g} = \frac{1}{\lambda_1 C u^{*2}} = \frac{1}{LCu^{*2}}$.

Pentru $k^2 = 0$ integrala eliptică din (44) ne dă:

$$(t - t_0) \frac{u^*}{\sqrt{g}\, k} = (t - t_0) \frac{1}{\sqrt{LC}} = \theta = \varphi.$$

Argumentul θ devine egal cu arcul φ. După cum se vede formula (44) revine la formula (20).

Pentru $k = 1$ și $\varphi = \frac{\pi}{2}$ integrala eliptică reprezintă un argument egal cu infinit.

Scanned with OKEN Scanner

Pentru $k = 0$ modulul 0 devine egal cu arcul φ și pe măsură ce modulul k crește 0 devine mai mare ca arcul φ.

Modulul se reprezintă așa dar în limitele

$$0 \leqslant k \leqslant 1. \tag{52}$$

Pentru $a_1 = 0$, $g = \infty$, $a_1 g = 2$ înlănțuirea magnetică ψ din (48) ia forma

$$\psi = \sqrt{LC}\, u^* \cos \varphi = \sqrt{LC}\, u^{*2} \cos \frac{t - t_0}{\sqrt{LC}}$$

sau pentru $t_0 = 0$, avem

$$\psi = \sqrt{LC}\, u^* \cos \frac{t}{\sqrt{LC}}$$

care revine la relația (21).

Din (51) se obține armonica fundamentală a tensiunii u_L în forma

$$u_{L1} = -\sqrt{\frac{2\lambda_1 C u^{*2}}{a_1 g}}\, \frac{2\pi^2}{2Kk}\, \frac{u^*}{\sqrt{g}\, k}\, \frac{\sqrt{q}}{1-q} \sin\left(\frac{\pi}{2K}\, \frac{u^* t}{\sqrt{g} k}\right) \tag{53}$$

în care frecvența circulară este

$$\sigma = \frac{\pi}{2K}\, \frac{u^*}{\sqrt{g}\, k}. \tag{54}$$

Revenim la circuitul din figura 27.250 în care bobina cu miez de fier în serie cu condensatorul sînt conectate la o tensiune de borne u_{L1} sinusoidală.

Armonica fundamentală a tensiunii u_{L1} își păstrează aceeași formă ca în (53) numai că frecvența circulară devine ω.

Ca urmare amplitudinea tensiunii u_{L1} din (53) va fi înmulțită cu

$$\frac{\omega}{\frac{\pi}{2K}\, \frac{u^*}{\sqrt{g}\, k}}. \tag{55}$$

Se obține

$$u_{L1\,\max} = \sqrt{\frac{2\lambda_1 C u^{*2}}{a_1 g}}\, \frac{2\pi}{kK}\, \omega\, \frac{\sqrt{q}}{1-q}; \quad U_{L1} = \frac{u_{L1\,\max}}{\sqrt{2}}. \tag{56}$$

Ținîndu-se seama de relația (26), din care se obține pentru $\psi_{1\max}$ relația

$$\frac{1}{\lambda_1 C}\left(\psi_{1\max}^2 + \frac{a_1}{2}\, \psi_{1\max}^4\right) = u^{*2} \tag{57}$$

rezultă că pentru o anumită valoare a lui $\psi_{1\max}$ se determină constanta u^{*2}. Ca urmare din (41) se obține modulul la pătrat k^2 iar din (47) se obține K, K' și q. Ca urmare amplitudinea armonicei fundamentale a tensiunii necesare $u_{L1\max}$ devine cunoscută din (56).

Scanned with OKEN Scanner

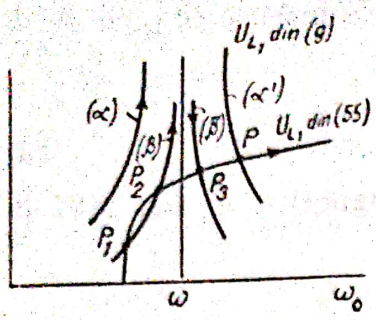


Fig. 27.257. Caracteristicile în fenomenul de ferorezonanță

Pe de altă parte pentru aceeași valoare a lui ψ_{1max} se obține din diagrama din figura 27.255, I_1. iar din (3) se obține L_1. Ca urmare frecvența circulară ω_0. din (6) devine cunoscută.

Din $u_{L1max}\frac{1}{\sqrt{2}} = U_{L1}$ se obține valoarea efectivă a tensiunii necesare, care va fi reprezentată în diagrama din figura 27.257 în funcție de ω_0.

În figura 27.257 se reprezintă valorile efective ale armonicilor fundamentale pentru tensiunea disponibilă U_{L1} din (9) și pentru tensiunea necesară U_{L1} din (56). Pentru curbele (β) β' ale tensiunii disponibile U_{L1} din (9) se obțin punctele de intersecție cu curbele tensiunii necesare U_{L1} din (56).

Din cele trei puncte de intersecție numai P_1 și P_3 sînt puncte stabile deoarece la o creștere a tensiunii necesare, tensiunea disponibilă descrește.

Pentru curbele α, α' punctele de intersecție cu U_{L1} din (56) este numai P, care e un punct stabil.

28. CIRCUITUL TRIFAZAT ÎN REGIM NESINUSOIDAL

Figura 28.258, α reprezintă un circuit trifazat simetric în conectare stea fără conductorul neutru cu tensiunile pe fază în generator nesinusoidal.

În figura 28.258, β se prezintă cele trei tensiuni de fază induse în generator, nesinusoidale.

S-a admis că ele sînt simetrice în raport cu o jumătate de perioadă.

Avem

$$\begin{aligned} u_1 &= \sum u_{\nu m} \sin(\nu\omega t + \alpha_\nu) \\ u_2 &= \sum u_{\nu m} \sin(\nu(\omega t - 120) + \alpha_\nu) \\ u_3 &= \sum u_{\nu m} \sin(\nu(\omega t - 240) + \alpha_\nu). \end{aligned} \tag{1}$$

Se recomandă ca ordinul armonicilor la un sistem trifazat să fie exprimat în forma

$$\nu = 3n + 2 \qquad \nu = 3n + 1 \qquad \nu = 3n \tag{2}$$

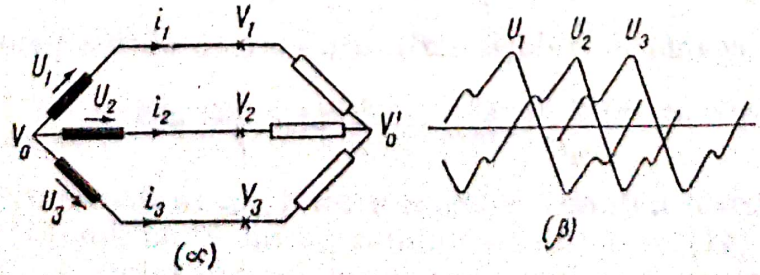


Fig. 28.258. (α) circuit trifazat simetric în regim nesinusoidal. (β) tensiunile induse pe fază nesinusoidale.

cu

$$n = 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4 \ldots \infty$$

Deoarece s-a admis

$$u_1(t) = -\,u\left(t + \frac{T}{2}\right)$$

înseamnă că ν reprezintă un număr impar. Se formează următoarea tabelă pentru cele trei valori ale lui ν: $3n + 2$, $3n + 1$ şi $3n$.

Ca urmare tensiunile electromotoare u_1, u_2, u_3 devin

Tabela 28.1

n	$3n+2$	$3n+1$	$3n$
0		1	
1	5		3
2		7	
3	11		9
4		13	
5	17		15
6		19	
7	23		21

Din tabelă se vede ce valori obţine $3n + 2$, $3n + 1$ şi $3n$ pentru diferitele valori ale lui n.

$$\begin{aligned}
u_1 &= \Sigma\, u_{(3n+2)m} \sin((3n+2)\,\omega t + \alpha_{3n+2}) + \\
&+ \Sigma\, u_{(3n+1)m} \sin((3n+1)\,\omega t + \alpha_{3n+1}) + \\
&+ \Sigma\, u_{3nm} \sin(3n\,\omega t + \alpha_{3n}) \\
u_2 &= \Sigma\, u_{(3n+2)m} \sin((3n+2)(\omega t - 120) + \alpha_{3n+2}) + \\
&+ \Sigma\, u_{(3n+1)m} \sin((3n+1)(\omega t - 120) + \alpha_{3n+1}) + \\
&+ \Sigma\, u_{3nm} \sin(3n(\omega t - 120) + \alpha_{3n}) \\
u_3 &= \Sigma\, u_{(3n+2)m} \sin((3n+2)(\omega t - 240) + \alpha_{3n+2}) + \\
&+ \Sigma\, u_{(3n+1)m} \sin((3n+1)(\omega t - 240) + \alpha_{3n+1}) + \\
&+ \Sigma\, u_{3nm} \sin(3n(\omega t - 240) + \alpha_{3n}).
\end{aligned} \tag{3}$$

Se cere să se determine $V_0 - V_0'$ curenţii i_1, i_2, i_3, tensiunile pe fază la circuitele de utilizare:

$$u_{1b} = V_1 - V_0' \qquad u_{2b} = V_2 - V_0' \qquad u_{3b} = V_3 - V_0'$$

şi tensiunile înlănţuite la circuitul de utilizare.

$$\begin{aligned}
u_{12} &= (V_1 - V_0') - (V_2 - V_0') \\
u_{23} &= (V_2 - V_0') - (V_3 - V_0') \\
u_{31} &= (V_3 - V_0') - (V_1 - V_0').
\end{aligned}$$

Prin formarea integralei $\int(\mathrm{d}\ell\ \mathcal{E})$ pentru fiecare fază se obține

$$u_1 + V_0 - V_0' - L\frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t} = ri_1$$

sau

$$\begin{aligned} u_1 &= L\frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t} + ri_1 - (V_0 - V_0') \\ u_2 &= L\frac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t} + ri_2 - (V_0 - V_0') \\ u_3 &= L\frac{\mathrm{d}i_3}{\mathrm{d}t} + ri_3 - (V_0 - V_0') \end{aligned} \tag{4}$$

mai avem

$$i_1 + i_2 + i_3 = 0 \tag{5}$$

Din

$$\begin{array}{l|l|l} -(3n+2)\cdot 0 : 0 & -(3n+1)\,0 : 0 & -3n\cdot 0 : 0 \\ -(3n+2)\,120 : -240 & -(3n+1)\cdot 120 : -120 & -3n\cdot 120 : 0 \\ -(3n+2)\,240 : -120 & -(3n+1)\ \ 240 : -240 & -3n\cdot 240 : 0 \end{array} \tag{6}$$

Se obține

$$u_1 + u_2 + u_3 = -3\,(V_0 - V_0') = 3\sum u_{3n_m}\sin(3n\omega t + \alpha_{3n}). \tag{7}$$

Din (7) rezultă, că într-un circuit trifazat simetric, dacă apare o diferență de potențial între punctele neutre de la generator și circuitul de utilizare $(V_0 - V_0')$ diferită de zero, ea se datorește numai armonicilor de ordinul $3n$(3, 9, 15, 21, ...).

Din figura 28.259 se remarcă că armonicile de ordinul $(3n + 2)$ ale tensiunilor de fază u_1, u_2, u_3 au o secvență opusă față de armonicile de ordinul $(3n + 1)$ ale celor trei tensiuni u_1, u_2, u_3.

Din relațiile (4) se constată că curenții electrici i_1, i_2, i_3 la un circuit trifazat simetric în conectare stea, nu posedă armonici de ordinul $3n$ pentru că cele trei tensiuni induse în generator, de ordinul $3n$ sînt în fază și egale. Ca urmare ele nu produc curenți electrici.

În figura 28.260 se prezintă trei circuite în paralel cu aceleași tensiuni electromotoare

$$u_1 = u_2 = u_3. \tag{8}$$

Se formează

$$\begin{aligned} V_0 - V_0' + u_1 &= i_1 r_1 \\ V_0 - V_0' + u_2 &= i_2 r_2 \\ V_0 - V_0' + u_3 &= i_3 r_3. \end{aligned} \tag{9}$$

Scanned with OKEN Scanner

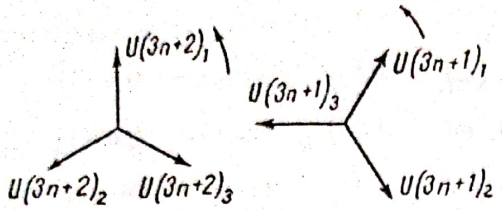


Fig. 28.259. Valorile efective ale tensiunilor de fază ale armonicilor de ordinul $(3n + 2)$ și $(3n + 1)$.

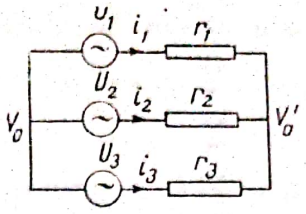


Fig. 28.260. 3 circuite în paralel cu $u_1 = u_2 = u_3$.

Din (8) și (9) rezultă

$$(V_0 - V_0')\left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_3}\right) + u_1\left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_3}\right) = i_1 + i_2 + i_3 = 0 \qquad (10)$$

de unde se deduce

$$-(V_0 - V_0') = u_1 = u_2 = u_3. \qquad (11)$$

Ca urmare din (9) se constată

$$i_1 = 0 \qquad i_2 = 0 \qquad i_3 = 0. \qquad (12)$$

Din (4) și (7) rezultă

$$u_1 + (V_0 - V_0') = L\frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t} + ri_1 =$$

$$= \sum u_{(3n+2)m} \sin((3n + 2)\,\omega t + \alpha_{3n+2}) + \qquad (13)$$

$$+ \sum u_{(3n+1)m} \sin((3n + 1)\,\omega t + \alpha_{3n+1})$$

de unde se deduce

$$i_1 = \sum i_{(3n+2)m} \sin((3n + 2)\,\omega t + \alpha_{3n+2} - \varphi_{3n+2}) +$$
$$+ \sum i_{(3n+1)m} \sin((3n + 1)\,\omega t + \alpha_{3n+1} - \varphi_{3n+1}) \qquad (14)$$

în care

$$i_{(3n+2)m} = \frac{u_{(3n+2)m}}{\sqrt{r^2 + ((3n+2)\omega L)^2}}$$

$$i_{(3n+1)m} = \frac{u_{(3n+1)m}}{\sqrt{r^2 + ((3n+1)\omega L)^2}}$$

$$\operatorname{tg}\varphi_{(3n+2)} = \frac{(3n + 2)\omega L}{r}; \qquad \operatorname{tg}\varphi_{(3n+1)} = \frac{(3n + 1)\omega L}{r}.$$

Scanned with OKEN Scanner

În mod analog se obține

$$\begin{aligned} i_2 &= \sum i_{(3n+2)m} \sin((3n+2)(\omega t - 120) + \alpha_{3n+2} - \varphi_{3n+2}) + \\ &+ \sum i_{(3n+1)m} \sin((3n+1)(\omega t - 120) + \alpha_{3n+1} - \varphi_{3n+1}) \\ i_3 &= \sum i_{m(3n+2)} \sin((3n+2)(\omega t - 240) + \alpha_{3n+2} - \varphi_{3n+2}) + \\ &+ \sum i_{(3n+1)m} \sin((3n+1)(\omega t - 240) + \alpha_{3n+1} - \varphi_{3n+1}). \end{aligned} \tag{16}$$

Tensiunile de fază în circuitul de utilizare.

Din

$$\begin{aligned} u_{1b} &= V_1 - V_0' = L_b \frac{di_1}{dt} + r_b i_1 \\ u_{2b} &= V_2 - V_0' = L_b \frac{di_2}{dt} + r_b i_2 \\ u_{3b} &= V_3 - V_0' = L_b \frac{di_3}{dt} + r_b i_3 \end{aligned} \tag{17}$$

în care

$$\begin{aligned} u_{1b} &= \sum i_{(3n+2)m} Z_{b(3n+2)} \sin((3n+2)\omega t + \alpha_{3n+2} - \varphi_{3n+2} + \varphi'_{3n+2}) + \\ &+ \sum i_{(3n+1)m} Z_{b(3n+1)} \sin((3n+1)\omega t + \alpha_{3n+1} - \varphi_{3n+1} + \varphi'_{3n+1}) = \\ &= \sum i_{(3n+2)m} Z_{b(3n+2)} \sin((3n+2)\omega t + \psi_{(3n+2)}) + \\ &+ \sum i_{(3n+1)m} Z_{b(3n+1)} \sin((3n+1)\omega t + \psi_{(3n+1)}) \end{aligned} \tag{18}$$

în care

$$\begin{aligned} Z_{b(3n+2)} &= \sqrt{r_b^2 + ((3n+2)\omega L_b)^2} \qquad \operatorname{tg} \varphi'_{(3n+2)} = \frac{(3n+2)\omega L_b}{r_b} \\ Z_{b(3n+1)} &= \sqrt{r_b^2 + ((3n+1)\omega L_b)^2} \qquad \operatorname{tg} \varphi'_{(3n+1)} = \frac{(3n+1)\omega L_b}{r_b}. \end{aligned} \tag{19}$$

În același fel se explică tensiunile de borne u_{2b} și u_{3b} în care apar $(\omega t - 120)$ respectiv $(\omega t - 240)$.

Tensiunea înlănțuită u_{12}

Se formează

$$u_{12} = (V_1 - V_0') - (V_2 - V_0') = u_{1b} - u_{2b}. \tag{20}$$

Se obțin

$$\begin{aligned} u_{12} &= \sum i_{(3n+2)m} Z_{b(3n+2)} \sin((3n+2)\omega t + \alpha_{3n+2} - \varphi_{3n+2} + \varphi'_{3n+2}) + \\ &+ \sum i_{(3n+1)n} Z_{b(3n+1)} \sin((3n+1)\omega t + \alpha_{3n+1} - \varphi_{3n+1} + \varphi'_{3n-1}) - \\ &- \sum i_{(3n+2)m} Z_{b(3n+2)} \sin((3n+2)(\omega t - 120) + \alpha_{3n+2} - \varphi_{3n+2} + \varphi'_{3n+2}) - \\ &- \sum i_{(3n+1)m} Z_{b(3n+1)} \sin((3n+1)(\omega t - 120) + \alpha_{3n+1} - \varphi_{3n+1} + \varphi'_{3n+1}) \end{aligned} \tag{21}$$

Se folosește relația

$$\sin\alpha - \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}$$

ca urmare u_{12} din (21) ia forma

$$u_{12} = \sum i_{(3n+2)m} Z_{b(3n+2)}\, 2\sin(3n+2)\,60\cos((3n+2)\,\omega t + \\ + \alpha_{3n+2} - \varphi_{3n+2} + \varphi'_{3n+2} - (3n+2)\,60) + \sum i_{(3n+1)m} Z_{b(3n+1)} \cdot \quad (22)$$
$$\cdot 2\sin(3n+1)\,60\cos((3n+1)\,\omega t + \alpha_{3n+1} - \varphi_{3n+1} + \varphi'_{(3n+1)} - (3n+1)60)$$

Ținîndu-se seama de

$$(3n+2)\,60 = 180\,n + 120$$
$$(3n+1)\,60 = 180\,n + 60$$

se obține

$$\sin(180\,n+120) = \cos 180\cdot n \sin 120 = (-1)^n \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\sin(180\,n+60) = \cos 180\cdot n\cdot \sin 60 = (-1)^n \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Ca urmare u_{12} devine

$$u_{12} = \sum i_{3n+2} Z_{b(3n+2)} \sqrt{3}\,(-1)^n \sin((3n+2)\,\omega t + \alpha_{3n+2} - \varphi_{3n+2} + \\ + \varphi'_{3n+2}) - (3n+2)\,60 + 90) + \sum i_{(3n+1)} Z_{b(3n+1)} \sqrt{3}\,(-1)^n \sin((3n + \quad (23)$$
$$+ 1)\,\omega t + \alpha_{3n+1} - \varphi_{3n+1} + \varphi'_{3n+1} - (3n+1)\,60 + 90).$$

Tabela 28.2

n	$3n+2$	$3n+1$	$(-1)^n$	$-(3n+2)\,60+90$	$-(n-1)\,60+90$
0	–	1	1	–	30
1	5		−1	$-210 = -180-30$	–
2	–	7	1	–	$-330 = -360+30$
3	11	–	−1	$-570 = -360-180-30$	–
4	–	13	1		$-690 = -720+30$
5	17	–	−1	$-930 = -2\cdot360-180-30$	–
6	–	19	1	–	$-1050 = -3\cdot360+30$
7	23	–	−1	$-1290 = -3\cdot360-180-30$	–

Fie

$$\alpha_1 - \varphi_1 + \varphi'_1 = \psi_1$$
$$\alpha_5 - \varphi_5 + \varphi'_5 = \psi_5. \quad (23')$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Ținîndu-se seama de tabelă și de (23), u_{12} din (22) devine

$$u_{12} = i_{1m} Z_{b1} \sqrt{3} \sin (\omega t + \psi_1 + 30) - i_{5m} Z_{b5} \sqrt{3} \sin (5\omega t + \\ + \psi_5 - 180 - 30) - i_{11m} Z_{b11} \sqrt{3} \sin (11\,\omega t + \psi_{11} - 180 - 30) + \ldots$$

sau

$$u_{12} = i_{1m} Z_{b1} \sqrt{3} \sin (\omega t + \psi_1 + 30) + i_{5m} Z_{b5} \sqrt{3} \sin (5\omega t + \\ + \psi_5 - 30) + i_{7m} Z_{b7} \sqrt{3} \sin (7\omega t + \psi_7 + 30) + \\ + i_{11m} Z_{b11} \sqrt{3} \sin (11\,\omega t + \psi_{11} - 30). \qquad (24)$$

Fie

$$\omega t + 30 = \omega t'$$

$$5\omega t + 150 = 5\omega t' \qquad 5\omega t - 30 = 5\,\omega t' - 180$$

$$7\omega t + 210 = 7\,\omega t' \qquad 7\omega t + 30 = 7\,\omega t' - 180$$

$$11\omega t + 330 = 11\,\omega t' \qquad 11\omega t - 30 = 11\,\omega t' - 360$$

Ca urmare

$$u_{12} = i_{1m} Z_{b1} \sqrt{3} \sin (\omega t' + \psi_1) - i_{5m} Z_{b5} \sqrt{3} \cdot \\ \cdot \sin (5\,\omega t' + \psi_5) - i_{7m} Z_{b7} \sqrt{3} \sin (7\,\omega t' + \psi_7) + \\ + i_{11m} Z_{b11} \sqrt{3} \sin (11\,\omega t' + \psi_{11}). \qquad (25)$$

Se compară u_{12} din (25) cu u_{1b} din (18). u_{1b} din (18) ia forma

$$u_{1b} = i_{1m} Z_{b1} \sin (\omega t + \psi_1) + \\ + i_{5m} Z_{b5} \sin (5\omega t + \psi_5) + \\ + i_{7m} Z_{b7} \sin (7\omega t + \psi_7) + \\ + i_{11m} Z_{b11} \sin (11\,\omega t + \psi_{11}).$$

. . . . . .

În figura 28.261 se reprezintă tensiunea de fază u_{1b} și tensiunea înlănțuită u_{12}, luîndu-se în considerare numai armonicile 1 și 5.

Se vede deosebirea între ele în ce privește forma lor.

În cazul cînd tensiunile induse pe fază la un generator sincron trifazat conține armonici de ordinul $3n$, bobinajul celor trei faze nu poate fi conectat în triunghi deoarece tensiunile de ordinul $3n$ fiind în fază, ele produc, însumîndu-le, o tensiune diferită de zero.

Scanned with OKEN Scanner

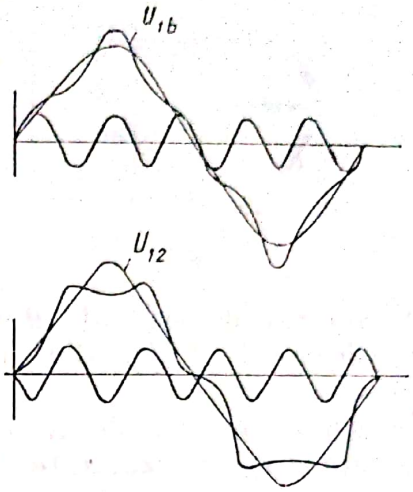


Fig. 28.261. Tensiunile u_{1b} și u_{12} cu armonicile *1* și *5*.

Ca urmare, în bobinajul generatorului vor circula chiar cînd generatorul nu e conectat, curenți electrici cu frecvențele $3nf$.

La un generator de curent continuu la care bobinajul este închis, el poate fi folosit ca un bobinaj conectat în triunghi cu inele colectoare, pentru a obține trei tensiuni electromotoare defazate cu cîte 120°.

Pentru ca să nu apară tensiuni electromotoare ale armonicilor de $3n$ care ar produce curenți în bobinaj, trebuie ca inducția magnetică să ia forma arătată în figura 26.232.

La un circuit trifazat în conectare stea cu conductorul neutru va apare în conductorul neutru curenți electrici cu frecvența $3nf$ dacă tensiunile de fază conțin armonici de ordinul $3n$.

Bineînțeles că acești curenți circulă și în fazele circuitului.

În schimb, tensiunile înlănțuite nu posedă armonici de ordinul $3n$.

Prezența curenților electrici de ordinul $3n$ se constată în felul următor:

Valorile efective ale tensiunilor pe fază și ale tensiunilor înlănțuite se reprezintă în formele

$$U_{\mathrm{I}}^2 = U_1^2 + U_3^2 + U_5^2 + U_7^2 + \ldots$$

$$U_{\mathrm{I,\,II}}^2 = (\sqrt{3}\,U_1)^2 + (\sqrt{3}\,U_5)^2 + (\sqrt{3}\,U_7)^2 + \ldots$$

Formîndu-se raportul

$$\frac{U_{\mathrm{I,\,II}}}{U_{\mathrm{I}}} = \sqrt{3}\sqrt{\frac{U_1^2 + U_5^2 + U_7^2 + \ldots}{U_1^2 + U_3^2 + U_5^2 + U_7^2 + \ldots}} = \sqrt{3}\,\delta$$

în care $\delta < 1$ cînd există armonici de ordinul $3n$ și $\delta = 1$ cînd nu există armonici de ordinul $3n$.

În cazul cînd se alimentează primarul unui transformator cu curenții i_1, i_2, i_3 de la un circuit trifazat, în care bobina primară e formată ca în figura 28.262 se constată următoarele:

Scanned with OKEN Scanner

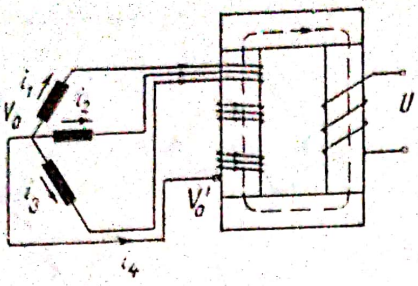


Fig. 28.262. Circuit trifazat cu conductorul neutru care conține armonica de ordinul $3n$.

Armonicile de ordinul $3n+2$ și $3n+1$ al celor trei curenți i_1, i_2, și i_3 fiind defazate cu cîte 120°, amperspirele rezultante devin nule în fiecare moment.

În schimb armonicile de ordinul $3n$ al curenților i_1, i_2, i_3 fiind în fază produc amperspire rezultante diferite de zero.

Ca urmare în secundarul transformatorului va apare o tensiune electromotoare cu frecvența $3f$, admițînd că armonicile de ordinul $3n = 9$ sînt neglijabile.

29. CIRCUITE ELECTRICE CU r, L, C, g UNIFORM REPARTIZATE

La cercetarea circuitelor în regim sinusoidal și în stare staționară de funcționare, s-au folosit parametrii concentrați.

Indiferent de felul cum era circuitul dat, format din circuite în serie, în paralel, în serie-paralel sau în conectare complexă, întotdeauna era posibil să se găsească un circuit echivalent cu o anumită impedanță z_e și $\operatorname{tg}\varphi = \frac{X_e}{r_e}$ în care X_e și r_e exprimă reactanța și rezistența concentrate.

Conectînd circuitele echivalente la aceeași tensiune de borne ca a circuitului dat, apare același curent cu aceeași defazare față de tensiune ca la circuitul dat.

Pe lîngă circuitele dipolare se întîlnesc și circuite cuadripolare, adică circuite cu două perechi de borne.

Un transformator sau o linie, care posedă două perechi de borne, leagă spre exemplu sursa de circuitul de utilizare.

La o linie apar parametri uniform repartizați de-a lungul liniei.

Se va vedea, că numai pentru o anumită lungime a liniei, acea porțiune poate fi înlocuită cu un circuit cuadripolar cu parametrii concentrați.

La capetele unui astfel de circuit cuadripolar cu parametrii concentrați vor apare aceleași tensiuni și curenți cu defazările respective ca la linia dată în porțiunea respectivă.

Se mai remarcă la un circuit cuadripolar că există două circuite echivalente cu parametrii concentrați. Unul face legătura dintre tensiunea de

borne și curentul electric cu defazarea respectivă de la sfîrșitul liniei cu tensiunea de la începutul liniei, iar al doilea circuit echivalent face legătura dintre tensiunea și curentul de la sfîrșitul liniei cu curentul de la începutul liniei.

Studiul unor astfel de circuite cuadripolare cu parametri uniformi repartizați, formează obiectul cercetării care urmează.

29.1. CIRCUIT CUADRIPOLAR INFINITEZIMAL

În figura 29.263 se prezintă o linie cu parametrii r, L, C, g uniform repartizați.

Linia reprezintă un circuit cuadripolar. La începutul liniei există tensiunea de borne u_0 și curentul i_0 iar la sfîrșitul liniei se găsește tensiunea u_L și curentul electric i_L la distanța x de la începutul liniei, apare tensiunea de borne u_x și curentul i_x.

Se introduc parametrii specifici

$$r^{*\Omega/km},\ L^{*H/km},\ C^{*F/km},\ g^{*Sm/km}$$

pentru un km dus și 1 km întors.

La sfîrșitul liniei se găsește un circuit de utilizare cu r, L, c concentrați.

Avem

$$u_L = u_{Lm} \sin \omega t$$

$$i_L = \frac{u_{Lm}}{Z_b} \sin (\omega t - \varphi_b).$$

Pentru a se putea efectua integrala $\int (d\ell\, \mathcal{S})$ se introduce un circuit cuadripolar infinitezimal cu parametrii concentrați (v. fig. 29.264).

În felul acesta linia apare ca un lanț format din circuite cuadripolare infinitezimale.

Figura 29.264 reprezintă două feluri de circuite cuadripolare infinitezimale cu parametrii concentrați de forma I respectiv II. Să luăm spre exemplu circuitul cuadripolar infinitezimal de forma I pentru care se formează $\int (d\ell\, \mathcal{S})$.

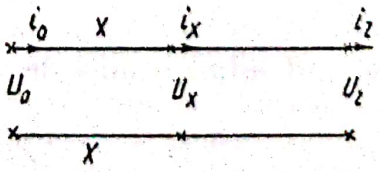


Fig. 29.263. Linie cu r, L, C, g uniform repartizate.

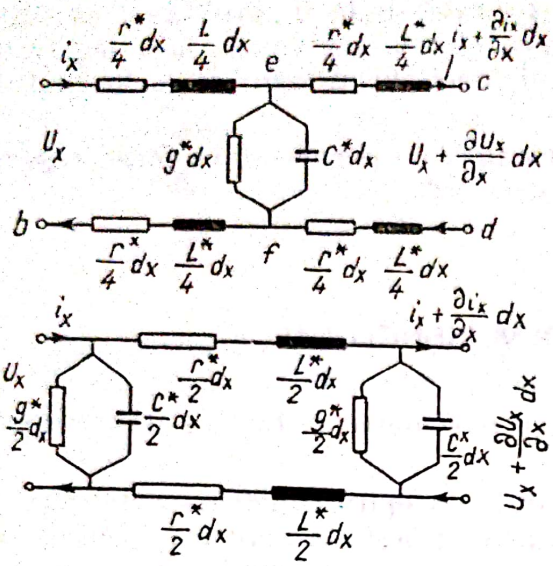


Fig. 29.264. Circuite cuadripolare infinitezimale de forma I și II.

Se obține

$$V_a - V_c - \frac{L^* dx}{4}\frac{\partial}{\partial t} i_x - \frac{L^* dx}{4\partial}\frac{\partial}{\partial t}\left(i_x + \frac{\partial i_x}{\partial x} dx\right) =$$

$$= \frac{r^*}{4} dx i_x + \frac{r^*}{4} dx \left(i_x + \frac{\partial i_x}{\partial x} dx\right)$$

$$V_d - V_b - \frac{L^* dx}{4}\frac{\partial i_x}{\partial t} - \frac{L^* dx}{4}\frac{\partial}{\partial t}\left(i_x + \frac{\partial i_x}{\partial x} dx\right) =$$

$$= \frac{r^*}{4} dx i_x + \frac{r^*}{4} dx \left(i_x + \frac{\partial i_x}{\partial x} dx\right).$$

Formînd suma, rezultă

$$V_a - V_b - \frac{L^*}{2} dx \frac{\partial i_x}{\partial t} - \frac{L^* dx}{2}\frac{\partial}{\partial t}\left(i_x + \frac{\partial i_x}{\partial x} dx\right) =$$

$$= \frac{r^*}{2} dx i_x + \frac{r^*}{2} dx \left(i_x + \frac{\partial i_x}{\partial x} dx\right) + V_c - V_d.$$

în care:

$$V_a - V_b = u_x$$

$$V_c - V_d = u_x + \frac{\partial u_x}{\partial x}.$$

Neglijînd infiniții mici de ordinul doi se obține.

$$-\frac{\partial u_x}{\partial x} = L^* \frac{\partial i_x}{\partial t} + r^* i_x.$$

Pe de altă parte pentru stabilirea relației curenților electrici, se obține din schema de sus în figura 29.264

$$u'_x = V_e - V_f.$$

Ca urmare avem

$$i_x = u'_x g^* \, dx + \frac{\partial u'_x}{\partial t} C^* \, dx + i_x + \frac{\partial i_x}{\partial x} dx$$

de unde se deduc

$$-\frac{\partial i_x}{\partial x} = C^* \frac{\partial u'_x}{\partial t} + g^* u'_x.$$

Ținîndu-se seama că avem (din fig. 29.264)

$$u_x - \frac{L^*}{2} dx \frac{\partial i_x}{\partial t} = i_x \frac{r^*}{2} dx + u'_x.$$

și neglijînd termenii infinitezimali rezultă

$$u_x \cong u'_x$$

astfel că

$$-\frac{\partial i_x}{\partial x} = C^* \frac{\partial u_x}{\partial t} + g^* u_x.$$

Se obțin următoarele ecuații diferențiale cu derivate parțiale.

$$\begin{aligned} -\frac{\partial u_x}{\partial x} &= L^* \frac{\partial i_x}{\partial t} + r^* i_x \\ -\frac{\partial i_x}{\partial x} &= C^* \frac{\partial u_x}{\partial t} + g^* u_x \end{aligned} \qquad (1)$$

cunoscute în literatură sub denumirea de „ecuațiile telegrafiștilor".

Cînd liniile telegrafice începuseră să fie cunoscute (1855) se considera r, L, C ca mărimi concentrate.

S-au determinat prin calcul tensiunea și curentul la începutul liniei, considerîndu-se cunoscute tensiunea și curentul la sfîrșitul liniei.

S-a constatat că tensiunea și curentul de la începutul liniei calculate, nu corespundeau cu cele obținute experimental.

Cauza principală era frecvența ridicată de 1 000 Hz, care după cum vom vedea nu permite concentrarea parametrilor r, L, C pentru o linie mai lungă de 16 km.

Scanned with OKEN Scanner

29.2. LINIA FORMATĂ DINTR-UN LANȚ DE CIRCUITE CUADRIPOLARE INFINITEZIMALE

Prin utilizarea ecuațiilor diferențiale cu derivate parțiale din (1) se deduc o ecuație diferențială în u_x respectiv i_x.

Se formează

$$\begin{aligned} -\frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} &= L^* \frac{\partial^2 i_x}{\partial t\, \partial x} + r^* \frac{\partial i_x}{\partial x} \\ -\frac{\partial^2 i_x}{\partial x\, \partial t} &= C^* \frac{\partial^2 u_x}{\partial t^2} + g^* \frac{\partial u_x}{\partial t} \end{aligned} \tag{2}$$

astfel că

$$\frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} = L^*C^* \frac{\partial^2 u_x}{\partial t^2} + (L^*g^* + C^* r^*) \frac{\partial u_x}{\partial t} + g^*\, r^*\, u_x. \tag{3}$$

În mod analog se obține

$$\frac{\partial^2 i_x}{\partial x^2} = L^*C^* \frac{\partial^2 i_x}{\partial t^2} + (L^*g^* + C^*r^*) \frac{\partial i_x}{\partial t} + g^*r^*i_x. \tag{4}$$

Pentru determinarea tensiunii u_x respectiv curentului i_x din ecuațiile diferențiale cu derivate parțiale (3) și (4) se consideră mai întîi cazul $r^* = 0$ și $g^* = 0$.

Ca urmare ecuațiile diferențiale (2) și (4) pentru $r^*=0$ și $g^*=0$ iau formele

$$\frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} = L^*C^* \frac{\partial^2 u_x}{\partial t^2}\,; \quad \frac{\partial^2 i_x}{\partial x^2} = L^*C^* \frac{\partial^2 i_x}{\partial t^2}\,. \tag{5}$$

Din punct de vedere dimensional avem

$$\frac{[U]}{[L^2]} = [LC^2] \frac{[U]}{[T^2]}$$

astfel că

$$\dim L^*C^* = [L^*C^*] = \left[\frac{T^2}{L^2}\right] = \frac{1}{[v_U^2]}\,.$$

Se obține

$$L^*C^* = \frac{1}{v_U^2}\,. \tag{6}$$

De altfel din cercetarea fenomenului electromagnetic în care apare ecuația diferențială

$$\nabla^2 V + \frac{\varepsilon\mu}{c^2} \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = \Box V = 0 \tag{7}$$

s-a văzut că:

$$\frac{c^2}{\varepsilon\mu} = v_U^2$$

sau:

$$v_U^2 = \frac{c^2}{\varepsilon_0\mu_0}\,\frac{1}{\zeta_\varepsilon\,\zeta_\mu} = v_{U0}^2\,\frac{1}{\zeta_\varepsilon\,\zeta_\mu}$$

de unde se obține

$$v_U = v_{U0}\,\frac{1}{\sqrt{\zeta_\varepsilon\cdot\zeta_\mu}} = \frac{v_{U0}}{n} \tag{8}$$

în care n este denumit indicele de refracție.

Pentru $\zeta_\mu = 1$ se obține

$$v_U = v_{U0}\,\frac{1}{\sqrt{\zeta_\varepsilon}}$$

ceea ce se verifică experimental la un cablu electric care conține un dielectric cu $\varepsilon > \varepsilon_0$.

Din cercetarea cîmpului electromagnetic se cunoaște forma cea mai simplă a funcției potențiale $V(t)$ în punctul P care satisface ecuația diferențială (7) atunci cînd în O se găsește o sarcină electrică punctiformă ca funcție de timp $Q(t)$ (v. fig. 29.265).

Se obțin

$$V(t) = \frac{Q(u)}{\varepsilon r}$$

în care

$$u = t - \frac{r}{v_U}.$$

Deoarece punctul P față de punctul O, unde e sarcina $Q(t)$, poate avea orice poziție în spațiu, înseamnă că avem pentru x, y, z ca variabile independente

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2.$$

În cazul însă cînd propagarea stării electromagnetice, are loc într-o anumită direcție, atunci se consideră vectorul unitar i constant.

Se obține în acest caz

$$i = \cos\alpha\, i + \cos j\beta + \cos\gamma\, k$$

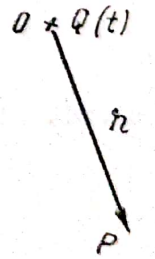


Fig. 29.265. Funcția potențială $V(t)$ în punctul P.

cu α, β, γ constante și

$$\bar{r} = xi + yj + zk$$

din

$$r = (\bar{r}\bar{i}) = x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma$$

se constată legătura dintre x, y, z și r cînd se menține $\bar{r}$ constant.

Într-un astfel de caz, următoarea ecuație diferențială de forma

$$-\nabla^2\Phi + \frac{\varepsilon\mu}{c^2}\frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2} = 0 \tag{9}$$

posedă o soluție

$$\Phi = \Phi_m \cos\omega\left(t - \frac{r}{v_U}\right). \tag{10}$$

Pentru simplificare se așază de obicei sistemul de coordonate cu axa x după $\bar{r}$, astfel că

$$\alpha = 0, \quad \beta = \frac{\pi}{2}, \quad \gamma = \frac{\pi}{2}, \quad \bar{r} = i, \quad r = x. \tag{11}$$

Ca urmare ecuația diferențială (9) ia forma

$$-\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} + \frac{\varepsilon\mu}{c^2}\frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2} = 0 \tag{12}$$

cu soluția

$$\Phi = \Phi_m \cos\omega\left(t - \frac{x}{v_U}\right). \tag{13}$$

Ecuația diferențială (5) posedă aceeași formă ca (12). Ca urmare ecuația diferențială

$$\frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} = L^*C^*\frac{\partial^2 u_x}{\partial t^2} \tag{5}$$

posedă ca soluție

$$u_{x_i} = u_m \sin\omega\left(t - \frac{x}{v_U}\right) = u_m \sin(\omega t - \alpha^* x). \tag{14}$$

Expresia (14) reprezintă o linie sinusoidală mobilă care pentru α^* pozitiv se deplasează în sensul lui x pozitiv. O undă mobilă care se deplasează în sensul lui x pozitiv e denumită undă incidentă.

Scanned with OKEN Scanner

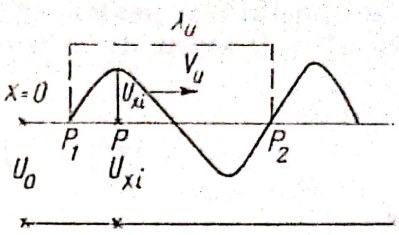


Fig. 29.266. Diferența de potențial u_{xi} exprimată prin unda incidentă.

În figura 29.266 se prezintă unda incidentă. La poziția x se obține u_x dată de unda incidentă la timpul t. Din (14) se vede cum variază u_{xi} în funcție de t.

Din figură se vede cum variază cu timpul u_x dat de unda incidentă care se deplasează cu viteza v_U spre dreapta.

Tot din figură se obține lungimea de undă λ. Se vede că în punctele P_1 și P_2, u_x devine nul iar în timp, în acele puncte u_{xi1} și u_{xi2} sînt în fază.

Față de un punct P_1, u_{xi} se poate menține constantă, dacă punctul P se deplasează spre dreapta cu aceeași viteză v_U ca unda.

Prin introducerea soluției (14) în ecuația diferențială (5) se obține

$$-\alpha^* u_x = -u_x L^* C^* \omega^2$$

de unde se deduce

$$\alpha^* = \pm\sqrt{L^* C^*}\,\omega = \pm\frac{\omega}{v_U}. \tag{15}$$

Faptul că apare $\pm\alpha^*$ înseamnă că apar două unde sinusoidale: una incindentă pentru $\alpha^* > 0$ care se deplasează după x pozitiv; și o undă reflectată pentru α^* negativ care se deplasează în sensul opus lui x pozitiv.

Unda reflectată în forma

$$u_{xr} = u_m \sin(\omega t - \alpha^* x) \quad \text{pentru } \alpha^* < 0 \tag{16}$$

se deplasează spre stînga cu viteza v_U. Numai față de un punct P mobil care se deplasează spre stînga cu x negativ, cu aceeași viteză ca unda reflectată, diferența de potențial u_{xr} se poate menține constantă în timp.

Avem

$$u_x = u_{xi} + u_{xr}.$$

Din

$$\omega t - \alpha^* x = \text{const}$$

se obține

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\omega}{\alpha^*} = v_U. \tag{17}$$

Din (17) se constată că pentru $\alpha^* > 0$ avem $dx > 0$, $x_2 - x_1 = dx$, $x_2 > x_1$ iar pentru $\alpha^* < 0$ avem $dx < 0$ cu $x_2 < x_1$.

Din

$$\lambda = v_U T,$$

se obține

$$\lambda \frac{1}{T} = \lambda f = v_U$$

astfel că

$$\alpha^* = \frac{\omega}{v_U} = \frac{2\pi}{T}\frac{T}{\lambda} = \frac{2\pi}{\lambda}$$

sau

$$\alpha^* \lambda = 2\pi$$

în care α^* rad/km e denumit argumentul de fază.

Reprezentarea experimentală a undei sinusoidale mobile

În figura 29.267 se consideră un conductor perpendicular pe planul hîrtiei în axa ce trece prin centrul sistemului de coordonate din figură.

În diagrama amplitudinilor pentru $x = 0$ avem

$$u_0 = u_m \sin \omega t.$$

Pe măsură ce înaintăm pe conductor pentru $x > 0$ (deasupra hîrtiei) amplitudinea u_m rotește către dreapta, deoarece argumentul este $-\alpha^* x$.

Amplitudinea revine în poziția inițială pentru $x = \lambda$, deoarece avem

$$\alpha^* \lambda = 2\pi.$$

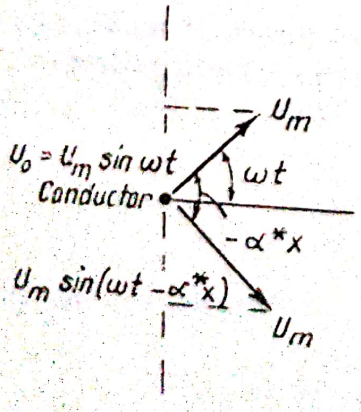


Fig. 29.267. Reprezentarea undei sinusoidale mobile $u_m \sin(\omega t - \alpha^* x)$.

Se împarte λ în n părți egale, ceea ce corespunde la 2π împărțit în n segmente de arcuri egale. Se obține o diagramă a amplitudinilor, pentru diferite segmente egale pe conductor. Se fixează pe conductor pentru arcurile egale cîte o vergea subțire de lungime m și se unesc vîrfurile acelor vergele printr-o sîrmă.

Se obține o linie helicoidală.

Așezînd o hîrtie subțire verticală pe planul figurii ce coincide cu Δ și proiectînd din dreapta linia helicoidală a sîrmei cu ajutorul unui bec electric, se obține pe partea stîngă a hîrtiei subțire, proiecția liniei helicoidale în forma unei linii sinusoidale.

Dacă se rotește conductorul în care sînt înfipte vergelele, apare pe hîrtia transparentă o linie sinusoidală mobilă.

Rezolvarea ecuației diferențiale (5) cu metoda complexă

Diferența de potențial u_x în forma complexă devine

$$\mathcal{U}_{xi} = u_m e^{-j\alpha^* x} e^{j\omega t} \tag{18}$$

în care

$$\mathcal{U}_{xi} = u_m \cos(\omega t - \alpha^* x) + j\, u_m \sin(\omega t - \alpha^* x).$$

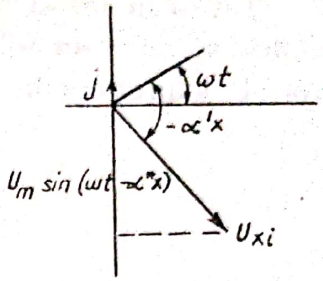


Fig. 29.268. Diagrama amplitudinilor în planul complex.

Se vede ușor din figura 29.268 că numai proiecția lui $\mathcal{U}_{xi}$ pe axa imaginară reprezintă valoarea momentană $u_{xi} = u_m \sin(\omega t - \alpha^* x)$.

Datorită acestui fapt se va considera din expresia lui $\mathcal{U}_{xi}$ în forma complexă, numai termenul care e înmulțit cu j pentru a se trece la exprimarea lui u_{xi} momentan în forma obișnuită.

Reprezentarea lui $\mathcal{U}_x$ în forma complexă are avantajul că derivata sau integrala lui u_x apare într-o formă simplă.

Spre exemplu din

$$\mathcal{U}_{xi} = u_m e^{-j\alpha^* x} e^{j\omega t}$$

se obține

$$\frac{d}{dt}\mathcal{U}_{xi} = j\,\omega \mathcal{U}_{xi}.$$

Se introduce și ecuația diferențială (5) în forma complexă

$$\frac{\partial^2 \mathcal{U}_x}{\partial x^2} = L^* C^* \frac{\partial^2 \mathcal{U}_x}{\partial t^2}. \tag{19}$$

Soluția ecuației diferențiale (19) e de forma generală:

$$\mathcal{U}_x = u_m e^{j\alpha^* x} e^{j\omega t}. \tag{20}$$

Introducînd pe (20) în (19) se obține

$$-\alpha^{*2} = -L^* C^* \omega^2$$

care ne conduce la

$$\alpha^* = \pm \omega \sqrt{L^* C^*} = \pm \frac{\omega}{v_U}$$

astfel că soluția ecuației diferențiale devine

$$\mathcal{U}_x = (u_m e^{-j\alpha^* x} + u_m e^{j\alpha^* x}) e^{j\omega t}. \tag{21}$$

Prin exprimarea diferenței de potențial $\mathcal{U}_x$ în forma complexă, se va rezolva ușor și ecuația diferențială (3) cînd r^* și g^* nu mai sînt neglijabile.

Totuși în loc să luăm în considerare ecuația diferențială (3) în care apare numai u_x ne vom folosi direct de ecuațiile diferențiale cu derivate parțiale din (1) exprimată în forma complexă

$$\begin{aligned} -\frac{\partial \mathcal{U}_x}{\partial x} &= L^* \frac{\partial \mathcal{I}_x}{\partial t} + r^* \mathcal{I}_x \\ -\frac{\partial \mathcal{I}_x}{\partial x} &= C^* \frac{\partial \mathcal{U}_x}{\partial t} + g^* \mathcal{U}_x \end{aligned} \tag{22}$$

care posedă ca soluții

$$\begin{aligned} \mathcal{U}_x &= \mathcal{U} e^{\gamma^* x} e^{j\omega t} \\ \mathcal{I}_x &= \mathcal{I} e^{\gamma^* x} e^{j\omega t} \end{aligned} \tag{23}$$

în care

$$\gamma^* = \beta^* + j\alpha^* \tag{24}$$

γ^* e denumit argumentul de undă iar β^* argumentul de atenuare.

Prin introducerea soluțiilor (23) în ecuațiile diferențiale (22) se obțin

$$\begin{aligned} -\gamma^* \mathcal{U} &= (j\,\omega L^* + r^*)\,\mathcal{I} \\ -\gamma^* \mathcal{I} &= (j\,\omega C^* + g^*)\,\mathcal{U} \end{aligned}$$

de unde se deduc

$$\gamma^{*2} = (j\,\omega L^* + r^*)\,(j\,\omega C^* + g^*). \tag{25}$$

Apare așa dar $\pm\,\gamma^*$, astfel că

$$\begin{aligned} \mathcal{U}_x &= (\mathcal{U}_1 e^{\gamma^* x} + \mathcal{U}_2 e^{-\gamma^* x}) e^{j\omega t} \\ \mathcal{I}_x &= (\mathcal{I}_1 e^{\gamma^* x} + \mathcal{I}_2 e^{-\gamma^* x}) e^{j\omega t}. \end{aligned} \tag{26}$$

Introducîndu-se (26) spre exemplu numai în prima ecuație diferențială din (22) se obține

$$-\gamma^* (\mathcal{U}_1 e^{\gamma^* x} - \mathcal{U}_2 e^{-\gamma^* x}) e^{j\omega t} = (j\,\omega L^* + r^*)\,(\mathcal{I}_1 e^{\gamma^* x} + \mathcal{I}_2 e^{-\gamma^* x}) e^{j\omega t}$$

de unde se deduce

$$\frac{\mathcal{U}_1}{\mathcal{I}_1} = -\frac{j\omega L^* + r^*}{\gamma^*} = -z_u\,; \quad \frac{\mathcal{U}_2}{\mathcal{I}_2} = \frac{j\omega L^* + r^*}{\gamma^*} = z_u$$

în care z_u reprezint impedanța de undă.

Impedanța de undă z_u ne dă legătura dintre constantele $\mathcal{U}_1$ și $\mathcal{I}_1$ respectiv $\mathcal{U}_2$ și $\mathcal{I}_2$, tot așa după cum într-un circuit electric cu parametrii r, L, C concentrați, impedanța circuitului z reprezintă legătura dintre amplitudinea tensiunii $\mathcal{U}_b$ și amplitudinea curentului $\mathcal{I}$ exprimată spre exemplu complex.

Scanned with OKEN Scanner

29.3. DETERMINAREA MĂRIMILOR: γ^* ȘI z_u

Avem

$$\gamma^{*2} = (\mathrm{j}\,\omega L^* + r^*)\,(\mathrm{j}\,\omega C^* + g^*) \tag{1}$$

$$z_u = \frac{\mathrm{j}\,\omega L^* + r^*}{\gamma^*} \quad \text{sau} \quad z_u^2 = \frac{(\mathrm{j}\,\omega L^* + r^*)}{(\mathrm{j}\,\omega C^* + g^*)} \tag{2}$$

în care:

$$\gamma^* = \beta^* + \mathrm{j}\,\alpha^*$$

$\omega, r^*, L^*, C^*, g^*$ sînt considerate ca mărimi cunoscute. Se cere să se determine α^*, β^*, z_u.

γ^{*2} se reprezintă în două feluri.

Se formează

$$\gamma^* = \sqrt{\beta^{*2} + \alpha^{2*}}\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi_\gamma}; \quad \operatorname{tg}\varphi_\gamma = \frac{\alpha^*}{\beta^*}$$

$$\gamma^{*2} = (\beta^{*2} + \alpha^{*2})\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}2\varphi_\gamma} \tag{4}$$

astfel că

$$(\beta^{*2} + \alpha^{*2})\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}2\varphi_\gamma} = \sqrt{(\omega L^*)^2 + r^{*2}}\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi_L}\sqrt{(\omega C^*)^2 + g^{*2}}\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi_C} =$$

$$= \sqrt{((\omega L^*)^2 + r^{*2})\,((\omega C^*)^2 + g^{*2})}\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\varphi_L + \varphi_C)} \tag{5}$$

în care

$$\operatorname{tg}\varphi_L = \frac{\omega L^*}{r^*} \qquad \operatorname{tg}\varphi_C = \frac{\omega C^*}{g^*}.$$

Din (4) și (5) se obține

$$\beta^{*2} + \alpha^{*2} = \sqrt{((\omega L^*)^2 + r^{*2})\,((\omega C^*)^2 + g^{*2})}. \tag{6}$$

Pe de altă parte se mai obține

$$\gamma^{*2} = \beta^{*2} - \alpha^{*2} + \mathrm{j}\,2\beta^*\alpha^* = -\omega^2 L^* C^* + r^* g^* + \mathrm{j}\,\omega(L^* g^* + r^* C^*) \tag{7}$$

de unde se deduc

$$\beta^* - \alpha^* = \omega^2 L^* C^* + r^* g^*$$

$$2\alpha^*\beta^* = \omega(L^* g^* + r^* C^*). \tag{8}$$

Din (6) și (8) rezultă

$$2\beta^{*2} = -\omega^2 L^* C^* + r^* g^* + \sqrt{((\omega L^*)^2 + r^{*2})\,((\omega C^*)^2 + g^{*2})}$$

$$2\alpha^{*2} = \omega^2 L^* C^* - r^* g^* + \sqrt{((\omega L^*)^2 + r^{*2})\,((\omega C^*)^2 + g^{*2})}.$$

Scanned with OKEN Scanner

Dat fiindcă în general g^* e mic deoarece reprezintă conductanța izolatoarelor (a materiei dielectrice) avem $g^* = 0{,}1 \cdot 10^{-6}$S/km.

Relațiile (9) devin

$$2\beta^{*2} = \omega^2 L^* C^* \left(-1 + \sqrt{1 + (r^*/\omega L^*)^2}\right)$$
$$2\alpha^{*2} = \omega^2 L^* C^* \left(1 + \sqrt{1 + (r^*/\omega L^*)^2}\right). \tag{10}$$

Din (10) se constată că

$$\beta^* < \alpha^*. \tag{11}$$

Din (8) se mai obține

$$\beta^* = \frac{\omega C^* r^*}{2\alpha^*} \cong \frac{r^*}{2}\sqrt{\frac{C^*}{L^*}} \tag{12}$$

în care s-a considerat

$$2\alpha^{*2} \cong 2\omega^2 L^* C^*$$
$$\alpha^* \cong \omega\sqrt{L^* C^*}. \tag{13}$$

Figura 29.269 reprezintă α^*, β^* în funcție de ω.

Pentru: $f = 50$ Hz se obține

$$\lambda f = v_{v0} = 300\,000 \text{ km/s}$$
$$\lambda = 6\,000 \text{ km} \qquad \alpha^* = 0{,}001045 \text{ rad/km}$$
$$\alpha^* \lambda = 2\pi.$$

Pentru $f = 1\,000$ Hz $\lambda = 300$ km, $\alpha^* = 0{,}0209$ rad/km. La o linie aeriană cu secțiunea $S = 50$ mm^2 se obține

$$L^* = 1{,}67 \text{ mH/km}$$
$$C^* = 0{,}0067 \ \mu\text{F/km}$$

ca urmare

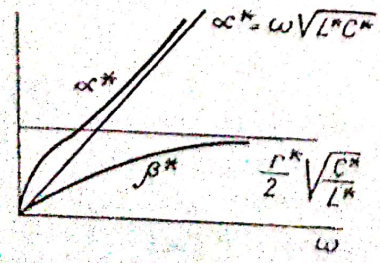


Fig. 29.269. α^* și β^* în funcție de ω.

$$v_{v0} = \frac{1}{\sqrt{L^* C^*}} = 300\,000 \text{ km/s}.$$

La un cablu subteran cu $\varepsilon_r = 4$ avem

$$L^* = 0{,}33 \text{ mH/km}, \quad C^* = 0{,}133 \ \mu\text{F/km}$$

se obține

$$v_v = \frac{1}{\sqrt{L^* C^*}} = 150\,000 \text{ km/s}.$$

Scanned with OKEN Scanner

Din

$$z_U^2 = \frac{\mathrm{j}\,\omega L^* + r^*}{\mathrm{j}\,\omega C^* + g^*}$$

se obține pentru

$$g^* = 0$$

$$z_U^2 = \frac{L^*}{C^*}\left(1 + \frac{r^*}{\mathrm{j}\,\omega L^*}\right); \quad z_U = \sqrt{\frac{L^*}{C^*}}\left(1 + \frac{r^*}{\mathrm{j}\,\omega C^*}\right)^{1/2} \cong \sqrt{\frac{L^*}{C^*}}\left(1 - \mathrm{j}\,\frac{r^*}{2\omega L^*}\right)$$

în care s-a folosit

$$(1+a)^m = 1 + \frac{m}{1}1^{m-1}a + \frac{m(m-1)}{1\cdot 2}1^{m-2}a^2 + \ldots$$

ca urmare

$$z_U = \sqrt{\frac{L^*}{C^*}} - \mathrm{j}\,\frac{r^*}{2\omega\sqrt{L^*C^*}} \qquad \mathrm{tg}\,\varphi_z = \frac{r^*}{2\omega L^*}.$$

Avem

$$z_U = z_{U1} - \mathrm{j}\,z_{U2}$$

în care

$$z_{U1} = \sqrt{\frac{L^*}{C^*}} \qquad z_{U2} = \frac{r^*}{2\omega\sqrt{L^*C^*}}.$$

Figura 29.270 reprezintă z_{U1} și z_{U2} ca funcție de ω.
Cînd ω e mare avem

$$z_U = \sqrt{\frac{L^*}{C^*}}.$$

La o linie aeriană cu $S = 50$ mm² se obține

$$z_{U1} = \sqrt{\frac{L^*}{C^*}} = 500\ \Omega.$$

iar la cablu electric

$$z_{U1} = 50\ \Omega.$$

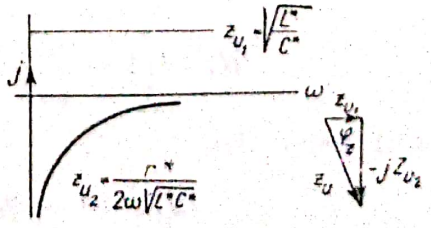


Fig. 29.270. z_{U1} și z_{U2} ca funcție de ω.

29.4. DETERMINAREA CONSTANTELOR ÎN EXPRESIILE MĂRIMILOR $\mathcal{U}_x$ ȘI $\mathcal{I}_x$.

În paragraful 27.2 s-au obținut pentru un lanț de circuite cuadripolare infinitezimale $\mathcal{U}_x$ și $\mathcal{I}_x$ în formele

$$\mathcal{U}_x = (\mathcal{U}_1 e^{\gamma^* x} + \mathcal{U}_2 e^{-\gamma^* x}) e^{j\omega t}$$
$$\mathcal{I}_x = (\mathcal{I}_1 e^{\gamma^* x} + \mathcal{I}_2 e^{-\gamma^* x}) e^{j\omega t} \quad (1)$$

în care argumentul de undă r^* și impedanța de undă z_U sînt cunoscute.

Apar patru constante care trebuie determinate. Cu ajutorul impedanțelor de undă, constantele $\mathcal{I}_1$ și $\mathcal{I}_2$ se reprezintă în funcție de $\mathcal{U}_1$ și $\mathcal{U}_2$ în formele

$$\frac{\mathcal{U}_1}{\mathcal{I}_1} = -z_U \qquad \frac{\mathcal{U}_2}{\mathcal{I}_2} = z_U. \quad (2)$$

Ca urmare $\mathcal{I}_x$ devine.

$$\mathcal{I}_x = -\frac{1}{z_U}(\mathcal{U}_1 e^{\gamma^* x} - \mathcal{U}_2 e^{-\gamma^* x}) \quad (3)$$

La determinarea constantelor $\mathcal{U}_1$, $\mathcal{U}_2$ ne folosim de condiția inițială.

La sfîrșitul liniei se cunoaște

$$\mathcal{U}_l = \mathcal{I}_l z_b$$

în care

$$\mathcal{U}_l = u_m e^{j\omega t} = \mathcal{I}_l z_b$$
$$z_b = z_b e^{j\varphi_b}$$
$$\mathcal{I}_l = \frac{u_m}{z_b} e^{j(\omega t - \varphi_b)}. \quad (4)$$

Ca urmare pentru $x = l$ se obține

$$\mathcal{U}_1 e^{\gamma^* l} + \mathcal{U}_2 e^{-\gamma^* l} = -\frac{z_b}{z_U}(\mathcal{U}_1 e^{\gamma^* l} - \mathcal{U}_2 e^{-\gamma^* l}). \quad (5)$$

Din (5) se obține legătura între constantele $\mathcal{U}_1$ și $\mathcal{U}_2$.

$$\mathcal{U}_1 e^{\gamma^* l}\left(1 + \frac{z_b}{z_U}\right) = \mathcal{U}_2 e^{-\gamma^* l}\left(\frac{z_b}{z_U} - 1\right).$$

Pe de altă parte din

$$\mathcal{U}_l e^{-j\omega t} = \mathcal{U}_1 e^{\gamma^* l} + \mathcal{U}_2 e^{-\gamma^* l}$$

Scanned with OKEN Scanner

se obține

$$\mathcal{U}_l\, e^{-j\omega t} = \mathcal{U}_1\, e^{\gamma^* l} + \mathcal{U}_1\, e^{\gamma^* l}\left(1 + \frac{z_b}{z_U}\right)\frac{1}{\frac{z_b}{z_U} - 1}$$

sau

$$\mathcal{U}_l\, e^{-j\omega t} = \mathcal{U}_1\, e^{\gamma^* l}\,\frac{2\,\frac{z_b}{z_U}}{\frac{z_b}{z_U} - 1}$$

de unde se deduce $\mathcal{U}_1$

$$\mathcal{U}_1 = \mathcal{U}_l\, e^{-j\omega t}\, e^{-\gamma^* l}\,\frac{\frac{z_b}{z_U} - 1}{2\,\frac{z_b}{z_U}} \tag{6}$$

În mod analog se obține

$$\mathcal{U}_2 = \mathcal{U}_l\, e^{-j\omega t}\, e^{\gamma^* l}\,\frac{\frac{z_b}{z_U} + 1}{2\,\frac{z_b}{z_U}}. \tag{7}$$

Se remarcă ușor că pentru $z_b = z_U$ se obține

$$\mathcal{U}_1 = 0,\quad \mathcal{U}_2 = \mathcal{U}_l\, e^{-j\omega t}\, e^{\gamma^* l}. \tag{8}$$

Pentru $z_b = z_U$, $\mathcal{U}_x$ și $\mathcal{I}_x$ devine

$$\mathcal{U}_x = \mathcal{U}_l\, e^{\gamma^*(l-x)}$$

$$\mathcal{I}_x = \frac{\mathcal{U}_l}{z_U}\, e^{\gamma^*(l-x)} \tag{9}$$

iar pentru $x = 0$ se obține

$$\mathcal{U}_0 = \mathcal{U}_l\, e^{\gamma^* l}$$

$$\mathcal{I}_0 = \frac{\mathcal{U}_l}{z_U}\, e^{\gamma^* l} \tag{10}$$

$$\frac{\mathcal{U}_0}{\mathcal{I}_0} = z_0 = z_U.$$

Scanned with OKEN Scanner

Constantele $\mathcal{U}_1$ și $\mathcal{U}_2$ fiind cunoscute, se obține $\mathcal{U}_x$ în forma

$$\mathcal{U}_x = \left[\mathcal{U}_1 e^{-\gamma^* l}\left(\frac{z_b}{z_U} - 1\right)e^{\gamma^* x} + \mathcal{U}_l e^{\gamma^* l}\left(\frac{z_b}{z_U} + 1\right)e^{-\gamma^* x}\right]\frac{1}{2\frac{z_b}{z_U}}$$

sau

$$\mathcal{U}_x = \frac{\mathcal{U}_l}{2} e^{(\gamma^*(-\cdot} + e^{-\gamma^*(l-x)}) + \frac{\mathcal{J}_l}{2} z_U (e^{\gamma^*(l-x)} - e^{-\gamma^*(l-x)})$$

$$\mathcal{U}_x = \mathcal{U}_l \operatorname{ch} \gamma^*(l-x) + \mathcal{J}_l z_U \operatorname{sh} \gamma^*(l-x). \tag{11}$$

În mod analog se obține

$$\mathcal{J}_x = \mathcal{J}_l \operatorname{ch} \gamma^*(l-x) + \frac{\mathcal{U}_l}{z_U} \operatorname{sh} \gamma^*(l-x). \tag{12}$$

În figura 29 271 se prezintă $\mathcal{U}_x = \mathcal{U}_l \operatorname{ch} \gamma^*(l-x)\, e^{j\omega t}$.
În adausul matematic paragraful 1.1 se prezintă

$$\operatorname{sh}\gamma = \sqrt{\frac{1}{2}(\operatorname{ch} 2\beta - \cos 2\alpha)}\, e^{j\theta_s}$$

$$\operatorname{tg}\theta_s = \frac{\sin\alpha \operatorname{ch}\beta}{\cos\alpha \operatorname{sh}\beta} \tag{13}$$

$$\operatorname{ch}\gamma = \sqrt{\frac{1}{2}(\operatorname{ch} 2\beta + \cos 2\alpha)}\, e^{j\theta_s}$$

$$\operatorname{tg}\theta_c = \frac{\sin\alpha \operatorname{sh}\beta}{\cos\alpha \operatorname{ch}\beta} \tag{14}$$

în care $\gamma = \beta + j\alpha$.

Ținîndu-se seama de expresiile (13) și (14) $\operatorname{ch}\gamma^*(l-x)$ și $\operatorname{sh}\gamma^*(l-x)$ devin

$$\operatorname{ch}\gamma^*(l-x) = \sqrt{\frac{1}{2}(\operatorname{ch} 2\beta^*(l-x) + \cos 2\alpha^*(l-x))}\, e^{j\theta_c}$$

$$\operatorname{tg}\theta_c = \frac{\sin\alpha^*(l-x) \operatorname{sh}\beta^*(l-x)}{\cos\alpha^*(l-x) \operatorname{ch}\beta^*(l-x)}$$

$$\operatorname{sh}\gamma^*(l-x) =$$

$$= \sqrt{\frac{1}{2}(\operatorname{ch} 2\beta^*(l-x) - \cos 2\alpha^*(l-x))}\, e^{j\theta_s}$$

$$\operatorname{tg}\theta_s = \frac{\sin\alpha^*(l-x) \operatorname{ch}\beta^*(l-x)}{\cos\alpha^*(l-x) \operatorname{sh}\beta^*(l-x)}.$$

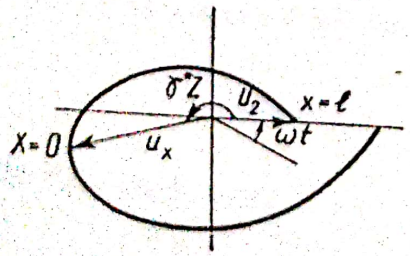


Fig. 39.271.
$\mathcal{U}_x = \mathcal{U}_l \operatorname{ch}\gamma^*(l-x)\, e^{j\omega t}$.

Scanned with OKEN Scanner

Pe de altă parte mai avem.

$$\mathcal{U}_l = u_m\, e^{j\omega t} \quad \mathcal{I}_l = \frac{u_m}{z_b}\, e^{j(\omega t - \varphi_b)} \quad z_U = z_U\, e^{j\varphi_U}.$$

Ca urmare valoarea momentană u_x în forma obișnuită devine

$$u_x = u_m \sqrt{\frac{1}{2}(\operatorname{ch} 2\beta^*(l-x) + \cos 2\alpha^*(l-x)}\, \sin(\omega t + \theta_c) + \\ + \frac{u_m}{z_b} z_U \sqrt{\frac{1}{2}(\operatorname{ch} 2\beta^*(l-x) - \cos 2\alpha^*(l-x)}\, \sin(\omega t - \varphi_b - \varphi_U + \theta_s). \tag{15}$$

Expresia tensiunii momentane în forma obișnuită u_x ne arată ce simplu a fost ea obținută folosind exprimarea ecuațiilor diferențiale cu derivate parțiale în forma complexă.

La începutul liniei pentru $x = 0$ se obține

$$\mathcal{U}_0 = \mathcal{U}_l \operatorname{ch} \gamma^* l + \mathcal{I}_l z_U \operatorname{sh} \gamma^* l$$
$$\mathcal{I}_0 = \mathcal{I}_l \operatorname{ch} \gamma^* l + \frac{\mathcal{U}_l}{z_U} \operatorname{sh} \gamma^* l \tag{16}$$

în care

$$\gamma^{*2} = (j\,\omega l^* + r^*)(j\,\omega C^* + g^*)$$
$$z_U^2 = \frac{j\omega L^* + r^*}{j\omega C^* + g^*}. \tag{17}$$

Relațiile (16) reprezintă legătura dintre tensiunea și curentul de la sfîrșitul liniei cu tensiunea de la începutul liniei respectiv cu curentul de la începutul liniei. Argumentul de undă γ^* și impedanța de undă z_U reprezintă mărimi cunoscute. Aceste mărimi au apărut prin faptul că linia este considerată ca un lanț de circuite cuadripolare infinitezimale și exprimarea lor în forma complexă ușurează determinarea lor.

29.5. CIRCUITE ECHIVALENTE UNUI LANȚ DE CIRCUITE CUADRIPOLARE

Se determină mai întîi impedanța liniei la mersul în gol z_{00} și impedanța liniei cînd linia la sfîrșit e pusă în scurtcircuit z_{0k}.

În mersul în gol linia la sfîrșit este deschisă. Avem

$$\mathcal{I}_l = 0.$$

Se obține

$$\mathcal{U}_{00} = \mathcal{U}_l \operatorname{ch} \gamma^* l$$
$$\mathcal{I}_{00} = \frac{\mathcal{U}_l}{z_U} \operatorname{sh} \gamma^* l \tag{1}$$

de unde impedanța în mersul în gol z_{00} ia forma

$$z_{00} = \frac{\mathcal{U}_{00}}{\mathcal{I}_{00}} = z_U \frac{\operatorname{ch} \gamma^* l}{\operatorname{sh} \gamma^* l}. \tag{2}$$

Impedanța la mersul în gol apare ca o mărime concentrată și poate fi determinată experimental. Cînd linia e pusă la sfîrșit în scurtcircuit se obține $\mathcal{U}_l = 0$.

Ca urmare relațiile (14) devin

$$\begin{aligned} \mathcal{U}_{lk} &= \mathcal{I}_l z_0 \operatorname{sh} \gamma^* l \\ \mathcal{I}_{0k} &= \mathcal{I}_l \operatorname{ch} \gamma^* l \end{aligned} \tag{3}$$

iar impedanța de scurtcircuit ia forma

$$z_{0k} = \frac{\mathcal{U}_{0k}}{\mathcal{I}_{0k}} = z_U \frac{\operatorname{sh} \gamma^* l}{\operatorname{ch} \gamma^* l}. \tag{4}$$

De asemenea impedanța de scurtcircuit apare ca o impedanță concentrată și poate fi determinată experimental prin măsurarea puterii, tensiunii de borne și curentului electric.

Împărțind relațiile (16) din paragraful precedent cu $\operatorname{ch} \gamma^* l$ se obține

$$\begin{aligned} \frac{\mathcal{U}_0}{\operatorname{ch} \gamma^* l} &= \mathcal{U}_l + \mathcal{I}_l z_{lk} \\ \frac{\mathcal{I}_0}{\operatorname{ch} \gamma^* l} &= \mathcal{I}_l + \frac{\mathcal{U}_l}{z_{00}}. \end{aligned} \tag{5}$$

Pentru legătura dintre tensiunea de la începutul liniei cu tensiunea și curentul de la sfîrșitul liniei se obține relația de sus din (5) iar pentru legătura curentului de la începutul liniei cu tensiunea și curentul de la sfîrșitul liniei se obține relația (5) de jos.

Pentru fiecare din aceste relații apare cîte un circuit echivalent care sînt reprezentate în figura 29.272.

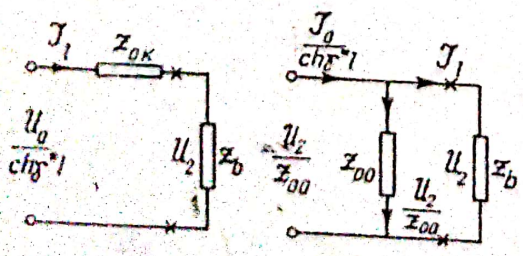


Fig. 29. 272. Circuite echivalente pentru $\mathcal{U}_0$ în legătură cu $\mathcal{U}_l$ și $\mathcal{I}_l$ respectiv pentru $\mathcal{I}_0$ în legătură cu $\mathcal{U}_l$ și $\mathcal{I}_l$.

Scanned with OKEN Scanner

Se formează raportul

$$\frac{\mathcal{U}_0}{\mathcal{I}_0} = z_0 = \frac{\mathcal{U}_l + \mathcal{I}_l z_{0k}}{\mathcal{I}_l + \frac{\mathcal{U}_l}{z_{00}}} = \frac{z_b + z_{0k}}{1 + \frac{z_b}{z_{00}}} \tag{6}$$

în care

$$\mathcal{U}_l = \mathcal{I}_l z_b$$

z_0 reprezintă impedanța întregii linii împreună cu impedanța de utilizare z_b ca o mărime concentrată care poate fi determinată experimental prin măsurarea puterii, tensiunii și a curentului la începutul liniei cînd circuitul de utilizare e conectat.

Din (6) se obțin pentru $z_b = z_U$

$$z_0 = z_U.$$

Determinarea mărimilor $\gamma^* z_U$ la o linie construită

Se determină experimental z_{00} și z_{0k}.

Se obține

$$z_{0c} z_{0k} = z_U^2$$

$$\frac{z_{00}}{z_{0k}} = \left(\frac{\operatorname{ch} \gamma^* l}{\operatorname{sh} \gamma^* l}\right)^2. \tag{7}$$

Determinarea lui γ^*

Avem

$$\sqrt{\frac{z_{00}}{z_{0k}}} = \sqrt{\frac{z_{00}}{z_{0k}}} e^{j\frac{\varphi_{00} - \varphi_{0k}}{2}} = M e^{j\varphi_\gamma} = \frac{\operatorname{ch} \gamma^* l}{\operatorname{sh} \gamma^* l} \tag{8}$$

în care

$$M = \sqrt{\frac{z_{00}}{z_{0k}}}$$

$$\varphi_\gamma = \frac{\varphi_{00} - \varphi_{0k}}{2} \tag{9}$$

sînt cunoscute.

Se formează

$$M e^{j\varphi_\gamma} = \frac{e^{\gamma^* l} + e^{-\gamma^* l}}{e^{\gamma^* l} - e^{-\gamma^* l}} = \frac{e^{2\gamma^* l} + 1}{e^{2\gamma^* l} - 1}$$

de unde se deduce

$$e^{2\gamma^* l} (M e^{j\varphi_\gamma} - 1) = M e^{j\varphi_\gamma} + 1$$

$$e^{2\gamma^* l} = \frac{M e^{j\varphi_\gamma} + 1}{M e^{j\varphi_\gamma} - 1} = e^{2\beta^* l} e^{j2\alpha^* l} = a + j b$$

în care a și b sînt cunoscute.

Se obține

$$e^{2\beta^* l} \cdot \cos 2\alpha^* l = a$$

$$e^{2\beta^* l} \cdot \sin 2\alpha^* l = b$$

$$e^{4\beta^* l} = a^2 + b^2,\ 4\beta^2 l = \ln(a^2 + b^2)$$

$$\beta^* = \frac{1}{4l} \ln(a^2 + b^2) \tag{10}$$

$$\cos 2\alpha^* l = \frac{a}{e^{2\beta^* l}}. \tag{11}$$

Determinarea impedanței de undă z_U.

Din

$$z_{00} z_{0k} = z_U^2 = z_{00} z_{ck} e^{j(\varphi_{00} + \varphi_{0k})}$$

se obține

$$z_U = \sqrt{z_{00} z_{0k}}\, e^{j\frac{\varphi_{00} + \varphi_{0k}}{2}} = z_U e^{j\varphi_z}$$

în care

$$z_U = \sqrt{z_0 z_{0k}} \qquad \varphi_z = \frac{\varphi_{00} + \varphi_{0k}}{2}. \tag{12}$$

Determinarea parametrilor r^*, L^*, c^*, g^* *la o linie construită*

Din

$$z_U = \frac{j\omega L^* + r^*}{\beta^* + j\alpha^*}$$

$$j\omega L^* + r^* = z_U e^{j\varphi_z} (\beta^* + j\alpha^*) = (z_U \cos \varphi_z + j z_U \sin \varphi_z)(\beta^* + j\alpha^*)$$

de unde se deduce

$$\gamma^* = z_U \cos \varphi_z \beta^* - z_U \sin \varphi_z \alpha^*$$

$$\omega L^* = z_U \cos \varphi_z \alpha^* + z_U \sin \varphi_z \beta^*.$$

De asemenea din

$$z_U = \frac{\beta^* + j\alpha^*}{j\omega C^* + g^*}$$

rezultă

$$j\omega C^* + g^* = \frac{\beta^* + j\alpha^*}{z_U} e^{-j\varphi_z} = \frac{1}{z_U} (\beta^* + j\alpha^*)(\cos \varphi_z - j \sin \varphi_z)$$

de unde se obține

$$\omega C^* = \frac{1}{z_U}\cos\varphi_z\alpha^* - \frac{1}{z_U}\sin\varphi_z\beta^*$$

$$g^* = \frac{1}{z_U}\cos\varphi_z\beta^* + \frac{1}{z_U}\sin\varphi_z\alpha^*.$$

29.6. CIRCUITE CUADRIPOLARE FINITE

În loc să se formeze un lanț de circuite cuadripolare infinitezimale se poate forma și un lanț de circuite cuadripolare finite împărțind linia în ζ părți egale.

În figura 29.273 se va vedea din cele ce urmează în ce măsură noile relații pentru $\mathcal{U}_0$ și $\mathcal{I}_0$, în funcție de $\mathcal{U}_\zeta$ și $\mathcal{I}_\zeta$ diferă de relațiile obținute pentru cazul cînd lanțul era format din circuite cuadripolare infinitezimale.

De data aceasta se introduce un indice de ordine pentru mărime exprimat prin n.

Avem $n = 0, 1, 2, 3, \ldots \zeta$.

Pentru conductoarele de dus și întors de lungime l/ζ se obține

$$r^* = \rho^{\Omega mm^2/m} \cdot \frac{2\,000^m}{S^{mm^2}} \qquad r^*\frac{l}{\zeta} = r_1$$

$$L^{*H/km} = 2\mu_0 \cdot 10^{-4}\, 2\left\{\ln\frac{a}{\rho_0} + 0{,}25\right\} \qquad L^*\frac{l}{\zeta} = L_1 \qquad (1)$$

$$C^{*F/km} = \frac{\varepsilon^{cst}\cdot 10^{-6}}{9\cdot 4\cdot \ln\dfrac{a}{\rho_0}} \qquad C^*\frac{l}{\zeta} = C_2$$

$$g^* = 0{,}1\cdot 10^{-6} \qquad \rho^*\frac{l}{\zeta} = g_2.$$

în care $2\rho_0$ reprezintă diametrul conductorului și a distanței dintre conductoare.

Figura 29.274 reprezintă un circuit cuadripolar finit de tipul $\overline{\Gamma\Gamma}$.

Avem

$$z_1 = r_1 + j\,\omega L_1$$
$$y_2 = g_2 + j\,\omega C_2 \qquad (2)$$

lanțul e format din astfel de circuite cuadripolare finite.

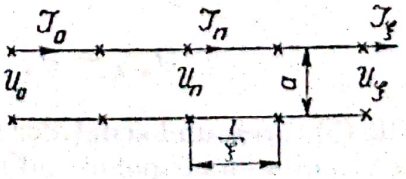


Fig. 29.273. Linia împărțită în ζ părți egale.

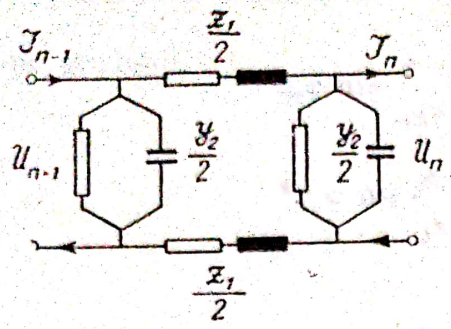


Fig. 29.274. Circuit cuadripolar finit de tipul $\square$

Formînd $\int dl\mathcal{E}$ pentru valorile momentane ale circuitului cuadripolar din fig. 29.274 se obține

$$u_{n-1} - 2\frac{L_1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\left\{i_{n-1} - u_{n-1}\frac{g_2}{2} - \frac{C_2}{2}\frac{\partial}{\partial t}u_{n-1}\right\} =$$

$$= 2\frac{r_1}{2}\left\{i_{n-1} - \frac{g_2}{2}u_{n-1} - \frac{C_2}{2}\frac{\partial}{\partial t}u_{n-1}\right\} + u_n;$$

$$i_{n-1} = \frac{g_2}{2}u_{n-1} + \frac{C_2}{2}\frac{\partial}{\partial t}u_{n-1} + \frac{g_2}{2}u_n + \frac{C_2}{2}\frac{\partial u_n}{\partial t} + i_n.$$

Înlocuind valorile momentane în forma obișnuită prin valorile momentane în forma complexă se obține

$$\mathcal{U}_{n-1} = \mathrm{j}\,\omega L_1\left\{\mathcal{J}_{n-1} - \frac{1}{2}(g_2 + \mathrm{j}\,\omega C_2)\,\mathcal{U}_{n-1}\right\} +$$

$$+ r_1\left\{\mathcal{J}_{n-1} - \frac{1}{2}(g_2 + \mathrm{j}\,\omega C_2)\,\mathcal{U}_{n-1}\right\} + \mathcal{U}_n \tag{3}$$

$$\mathcal{J}_{n-1} = \frac{1}{2}(g_2 + \mathrm{j}\,\omega C_2)\,\mathcal{U}_{n-1} + \frac{1}{2}(g_2 + \mathrm{j}\,\omega C_2)\,\mathcal{U}_n + \mathcal{J}_n =$$

$$= \mathcal{J}_n + \frac{1}{2}(g_2 + \mathrm{j}\,\omega C_2)(\mathcal{U}_{n-1} + \mathcal{U}_n)$$

în care

$$\mathcal{U}_n = \mathcal{U}\,e^{\gamma n}\,e^{\mathrm{j}\omega t}$$

$$\mathcal{J}_n = \mathcal{J}\,e^{\gamma n}\,e^{\mathrm{j}\omega t}. \tag{4}$$

Relațiile (3) și (4) se pot exprima în formele

$$\mathcal{U}_{n-1} - \mathcal{U}_n = z_1\left(\mathcal{J}_{n-1} - \frac{y_2}{2}\mathcal{U}_{n-1}\right)$$

$$\mathcal{J}_{n-1} - \mathcal{J}_n = \frac{y_2}{2}(\mathcal{U}_{n-1} + \mathcal{U}_n). \tag{5}$$

Ecuațiile (5) corespund ecuațiilor telegrafiștilor cînd circuitul e format dintr-un lanț de circuite cuadripolare infinitezimale în lanț.

Prin introducerea lui $\mathcal{U}_n$ şi $\mathcal{I}_n$ din (4) în (5) rezultă

$$\mathcal{U}(e^{\gamma(n-1)} - e^{\gamma n}) = z_1\left(\mathcal{I}\, e^{\gamma(n-1)} - \frac{y_2}{2}\,\mathcal{U}\, e^{\gamma(n-1}\right)$$

$$\mathcal{I}(e^{\gamma(n-1)} - e^{\gamma n}) = \frac{y_2}{2}\,\mathcal{U}(e^{\gamma n} + e^{\gamma(n-1)})$$

sau

$$\begin{aligned} \mathcal{U}(1 - e^{\gamma}) &= z_1\left(\mathcal{I} - \frac{y_2}{2}\,\mathcal{U}\right) \\ \mathcal{I}(1 - e^{\gamma}) &= \frac{y_2}{2}\,\mathcal{U}(e^{\gamma} + 1) \end{aligned} \tag{6}$$

în care $e^{\gamma n}$ e înmulţit cu $\frac{e^{\gamma}}{e^{\gamma}}$.

În fine

$$\begin{aligned} \mathcal{U}\left(1 - e^{\gamma} + \frac{z_1 y_2}{2}\right) &= \mathcal{I} z_1 \\ \mathcal{U}\,\frac{y_2}{2}\,(1 + e^{\gamma}) &= \mathcal{I}(1 - e^{\gamma}). \end{aligned} \tag{7}$$

Prin înmulţire se elimină $\mathcal{U}$, $\mathcal{I}$.
Se obţine

$$(1 - e^{\gamma})^2 + \frac{z_1 y_2}{2}\,(1 - e^{\gamma}) = (1 + e^{\gamma})\,\frac{z_1 y_2}{2}$$

$$1 + e^{2\gamma} - 2e^{\gamma} = z_1 y_2\, e$$

$$1 + e^{2\gamma} = e^{\gamma}\,(z_1 y_2 + 2)$$

sau

$$\frac{e^{-\gamma} + e^{\gamma}}{2} = \operatorname{ch}\,\gamma = 1 + \frac{z_1 y_2}{2}. \tag{8}$$

Pe de altă parte avem

$$\operatorname{ch}^2\gamma - \operatorname{sh}^2\gamma = 1$$

astfel că

$$\left(1 + \frac{z_1 y_2}{2}\right)^2 - 1 = \operatorname{sh}^2\gamma$$

Scanned with OKEN Scanner

sau

$$\frac{z_1 y_2}{2}\left(\frac{z_1 y_2}{2}+2\right)=\mathrm{sh}^2\gamma;\quad \mathrm{sh}\,\gamma=\pm\sqrt{\frac{z_1 y_2}{2}\left(\frac{z_1 y_2}{2}+2\right)} \tag{9}$$

Relaţia (9) ne arată că apare $\pm\gamma$
Ca urmare $\mathcal{U}_n$ şi $\mathcal{I}_n$ din (4) devine

$$\begin{aligned}\mathcal{U}_n&=(\mathcal{U}_1\,e^{\gamma n}+\mathcal{U}_2 e^{-\gamma n})\,e^{j\omega t}\\ \mathcal{I}_n&=(\mathcal{I}_1\,e^{\gamma n}+\mathcal{I}_2\,e^{-\gamma n})e^{j\omega t}.\end{aligned} \tag{10}$$

Din relaţia a doua (7) se obţine

$$\begin{aligned}\mathcal{U}_1(1+e^{\gamma})\frac{y_2}{2}&=\mathcal{I}_1(1-e^{\gamma})\\ \mathcal{U}_2(1+e^{-\gamma})\frac{y_2}{2}&=\mathcal{I}_2(1-e^{-\gamma}).\end{aligned} \tag{11}$$

Din (11) se se obţine

$$\begin{aligned}\frac{\mathcal{U}_1}{\mathcal{I}_1}&=\frac{1-e^{\gamma}}{1+e^{-\gamma}}\,\frac{2}{y_2}\,\frac{e^{-\gamma/2}}{e^{-\gamma/2}}=\frac{e^{-\gamma/2}-e^{\gamma/2}}{e^{-\gamma/2}+e^{\gamma/2}}\,\frac{2}{y_2}=-\left(\mathrm{th}\,\frac{\gamma}{2}\right)\frac{2}{y_2}=-z_U\\ \frac{\mathcal{U}_2}{\mathcal{I}_2}&=\frac{1-e^{-\gamma}}{1+e^{-\gamma}}\,\frac{2}{y_2}\,\frac{e^{\gamma/2}}{e^{\gamma/2}}=\frac{e^{\gamma/2}-e^{-\gamma/2}}{e^{\gamma/2}+e^{-\gamma/2}}\,\frac{2}{y_2}=\left(\mathrm{th}\,\frac{\gamma}{2}\right)\frac{2}{y_2}=z_U.\end{aligned} \tag{12}$$

Datorită legăturilor dintre $\mathcal{U}_1$ şi $\mathcal{I}_1$ respectiv $\mathcal{U}_2$ şi $\mathcal{I}_2$ din (12), relaţia curentului $\mathcal{I}_n$ din (10) ia forma

$$\mathcal{I}_n=-\frac{1}{z_U}(\mathcal{U}_1\,e^{\gamma n}-\mathcal{U}_2\,e^{-\gamma n})e^{j\omega t}. \tag{13}$$

Constantele $\mathcal{U}_1$ şi $\mathcal{U}_2$ se determină la fel ca la circuitele cuadripolare infinitezimale.

Se ţine seama de condiţia iniţială că la sfîrşitul liniei avem:

$$\begin{aligned}u_\zeta&=u_m\,e^{j\omega t}\\ \mathcal{I}_\zeta&=\frac{u_\zeta}{z_b}=\frac{u_m}{z_b}\,e^{j(\omega t-\varphi_b)}.\end{aligned} \tag{14}$$

Relaţiile

$$\begin{aligned}\mathcal{U}_n&=(\mathcal{U}_1\,e^{\gamma n}+\mathcal{U}_2\,e^{-\gamma n})\,e^{j\omega t}\\ \mathcal{I}_n&=-\frac{1}{z_U}(\mathcal{U}_1\,e^{\gamma n}-\mathcal{U}_2\,e^{-\gamma n})\,e^{j\omega t}\end{aligned} \tag{15}$$

Scanned with OKEN Scanner

iau formele

$$\mathcal{U}_n = \mathcal{U}_\zeta \operatorname{ch} \gamma(\zeta - n) + \mathcal{I}_\zeta z_U \operatorname{sh} \gamma(\zeta - n)$$

$$\mathcal{I}_n = \mathcal{I}_\zeta \operatorname{ch} \gamma(\zeta - n) + \frac{\mathcal{U}_\zeta}{z_U} \operatorname{sh} (\zeta - n). \tag{16}$$

La începutul liniei avem $n = 0$, astfel că $\mathcal{U}_0$ și $\mathcal{I}_0$ devin

$$\mathcal{U}_0 = \mathcal{U}_\zeta \operatorname{ch} \gamma\zeta + \mathcal{I}_\zeta z_U \operatorname{sh} \gamma\zeta$$

$$\mathcal{I}_1 = \mathcal{I}_\zeta \operatorname{ch} \gamma\zeta + \frac{\mathcal{U}_\zeta}{z_U} \operatorname{sh} \gamma\zeta \tag{17}$$

în care

$$\operatorname{ch} \gamma = 1 + \frac{z_1 y_2}{2}; \quad z_U = \left(\operatorname{th} \frac{\gamma}{2}\right) \frac{2}{y_2}. \tag{18}$$

Relațiile (17) și (18) reprezintă $\mathcal{U}_0$ și $\mathcal{I}_0$ la începutul unei linii considerate ca un lanț de circuite cuadripolare finite.

Introducîndu-se impedanțele de mers în gol și de scurt circuit z_{00} și z_{0k}, se obține

$$z_{00} = z_U \frac{\operatorname{ch} \gamma\zeta}{\operatorname{sh} \gamma\zeta}; \quad z_{0k} = z_U \frac{\operatorname{sh} \gamma\zeta}{\operatorname{ch} \gamma\zeta} \tag{19}$$

în care

$$z_U^2 = z_{00} z_{0k}$$

$$\left(\frac{\operatorname{ch} \gamma\zeta}{\operatorname{sh} \gamma\zeta}\right)^2 = \frac{z_{00}}{z_{0k}}. \tag{20}$$

Din (18) și (19) se obțin γ, z_U, r, L, C, g cînd z_{00} și z_{0k} sînt cunoscute.

29.7. COMPARAȚIA RELAȚIILOR OBȚINUTE PENTRU CELE DOUĂ FELURI DE LANȚURI FORMATE DIN CIRCUITE CUADRIPOLARE INFINITEZIMALE ȘI FINITE

Ecuațiile care ne dau rezultate exacte sînt

$$\mathcal{U}_0 = \mathcal{U}_l \operatorname{ch} \gamma^* l + \mathcal{I}_l z_U \operatorname{sh} \gamma^* l$$

$$\mathcal{I}_0 = \mathcal{I}_l \operatorname{ch} \gamma^* l + \frac{\mathcal{U}_l}{z_U} \operatorname{sh} \gamma^* l \tag{1}$$

Scanned with OKEN Scanner

cu

$$\gamma^{*2} = (\mathrm{j}\,\omega L^* + r^*)\,(\mathrm{j}\,\omega C^* + g^*)$$
$$z_U^2 = \frac{\mathrm{j}\omega L^* + r^*}{\mathrm{j}\omega C^* + g^*}. \tag{2}$$

Ecuațiile care ne dau rezultate mai puțin exacte sînt

$$\mathcal{U}_0 = \mathcal{U}_\zeta \operatorname{ch}\gamma\zeta + \mathcal{I}_\zeta z_U \operatorname{sh}\gamma\zeta$$
$$\mathcal{I}_0 = \mathcal{I}_\zeta \operatorname{ch}\gamma\zeta + \frac{\mathcal{U}_\zeta}{z_U}\operatorname{sh}\gamma\zeta \tag{3}$$

cu

$$\operatorname{ch}\gamma = 1 + \frac{z_1 y_2}{z_U}\ ; \quad z_U = \left(\operatorname{th}\frac{\gamma}{2}\right)\frac{2}{y_2}. \tag{4}$$

Ca să putem compara relațiile (1) și (3) să vedem cînd dau practic aceleași rezultate, se va face comparație între

$$\mathcal{U}_{\zeta-1} = \mathcal{U}_\iota \operatorname{ch}\gamma^*\frac{l}{\zeta} + \mathcal{I}_\iota z_U \operatorname{sh}\gamma^*\frac{l}{\zeta}$$
$$\mathcal{I}_{\zeta-1} = \mathcal{I}_\iota \operatorname{ch}\gamma^*\frac{l}{\zeta} + \frac{\mathcal{U}_\iota}{z_U}\operatorname{sh}\gamma^*\frac{l}{\zeta} \tag{5}$$

și

$$\mathcal{U}_{\zeta-1} = \mathcal{U}_\zeta \operatorname{ch}\gamma + \mathcal{I}_\zeta z_U \operatorname{sh}\gamma$$
$$\mathcal{I}_{\zeta-1} = \mathcal{I}_\zeta \operatorname{ch}\gamma + \frac{\mathcal{U}_\zeta}{z_U}\operatorname{sh}\gamma. \tag{6}$$

Din (5) și (6) se vor obține aceleași rezultate cînd condiția

$$\operatorname{ch}\gamma^*\frac{l}{\zeta} \cong 1 + \frac{1}{2}\left(\frac{\gamma^* l}{\zeta}\right)^2 \tag{7}$$

este satisfăcută.

Se vede ușor că atunci, cînd condiția (7) e satisfăcută avem

$$\operatorname{ch}\gamma^*\frac{l}{\zeta} = 1 + \frac{1}{2}(\mathrm{j}\,\omega L^* + r^*)\,(\mathrm{j}\,\omega C^* + g^*)\left(\frac{l}{\zeta}\right)^2 =$$
$$= 1 + \frac{1}{2}z_1 y_2 = \operatorname{ch}\gamma. \tag{8}$$

Deci numai în cazul cînd seria lui $\operatorname{ch}\gamma^*\frac{l}{\zeta}$ se poate exprima practic numai prin primii doi termeni, relațiile (5) și (6) ne vor da aceleași rezultate.

Scanned with OKEN Scanner

Condiția (7) e satisfăcută, atunci cînd avem

$$\alpha^* \frac{l}{\zeta} \leqslant 0{,}3$$

în care se ține seama că β^* e mai mic ca α^*.

S-a văzut că pentru $f = 50$ Hz și $v_{U0} = 300\,000$ km/s s-a obținut din:

$$\lambda f = v_{U0} \quad \lambda = 6\,000 \text{ km}$$

apoi din $\alpha^*\lambda = 2\pi$ a rezultat $\alpha^* = 0{,}001045$ rad/km, astfel că $\alpha^* \frac{l}{\zeta} = 0{,}3$ ne dă $\frac{l}{\zeta} = 300$ km.

În cablul electric avem $v_U = 150\,000$ km/s, iar pentru $f = 1\,000$ Hz rezultă $\lambda = 300$ km cu $\alpha^* = 0{,}0209$ rad/km astfel că $\frac{l}{\zeta} = 14{,}3$ km.

Din cele de mai sus se vede că la frecvența industrială de 50 Hz parametrii pot fi concentrați pentru linii lungi pînă la 300 km.

La linii telefonice cu frecvența 1 000 Hz și folosindu-se cabluri electrice, parametrii pot fi considerați concentrați pentru o lungime a cablului de 14 km.

Acum ne dăm seama, că liniile telefonice încă de la începutul folosirii lor, fiind mult mai lungi de 28 km, concentrarea parametrilor nu era permisă și în consecință a fost necesar să se folosească ecuațiile telegrafiștilor.

Pe de altă parte z_U la relațiile exacte ia forma

$$z_U^2 = \frac{(\mathrm{j}\,\omega L^* + r^*)\frac{l}{\zeta}}{(\mathrm{j}\,\omega C^* + g^*)\frac{l}{\zeta}} = \frac{z_1}{y_2}; \quad z_U = \sqrt{\frac{z_1}{y_2}}.$$

Se constată că aceeași valoare obține z_U și la relațiile (6) mai puțin exacte.

Din (4) se obține

$$z_U = \left(\mathrm{th}\,\frac{\gamma}{2}\right)\frac{2}{y_2} \cong \frac{\gamma}{2}\,\frac{2}{y_2} = \frac{\gamma}{y_2}$$

în care

$$\gamma = \gamma^* \frac{l}{\zeta}; \quad \gamma^2 = \gamma^{*2}\left(\frac{l}{\zeta}\right)^2 = \mathrm{j}\,\omega L^* + r^*)\,(\mathrm{j}\,\omega C^* + g^*)\left(\frac{l}{\zeta}\right)^2 = z_1 y_2$$

astfel că

$$\gamma = \sqrt{z_1 y_2}.$$

Ca urmare

$$z_U = \frac{\gamma}{y^2} = \frac{\sqrt{z_1 y_2}}{y_2} = \sqrt{\frac{z_1}{y_2}}.$$

Aşa dar cînd condiţia

$$\alpha^* \frac{l}{\zeta} \leqslant 0{,}3$$

e îndeplinită, rezultă

$$\operatorname{ch} \gamma^* \frac{l}{\zeta} = \operatorname{ch} \gamma = 1 + \frac{z_1 y_2}{2}$$

$$z_U^2 = \left(\operatorname{th} \frac{\gamma}{2}\right) \frac{2}{y} = \frac{z_1}{y_2}$$

ceea ce înseamnă că lanţul format din circuite cuadripolare infinitezimale, ne dă acelaşi rezultat ca lanţul format din circuite cuadripolare finite.

29.8. CERCETAREA CIRCUITULUI CUADRIPOLAR DE FORMA $\overline{\Pi}$ CU EXPRESIILE OBIŞNUITE PENTRU $\mathcal{U}_0$ ŞI $\mathcal{I}_0$ CU EXPRESIILE PENTRU $\mathcal{U}_0$ ŞI $\mathcal{I}_0$ OBŢINUTE DIN LANŢ

În figura 29.275 se reprezintă un circuit cuadripolar finit de forma $\overline{\Pi}$ care poate fi cercetat ca un circuit obişnuit. Pe calea obişnuită se obţin direct

$$\begin{aligned} \mathcal{U}_0 &= \mathcal{U}_1 + \left(\mathcal{I}_1 + \frac{y_2}{2}\mathcal{U}_1\right) z_1 \\ \mathcal{I}_0 &= \mathcal{I}_1 + \frac{y_2}{2}(\mathcal{U}_1 + \mathcal{U}_0) = \mathcal{I}_1 + \frac{y_2}{2}\left(\mathcal{U}_1 + \mathcal{U}_1\left(1 + \frac{z_1 y_2}{2}\right) + \mathcal{I}_1 z_1\right) \end{aligned} \tag{1}$$

sau

$$\begin{aligned} \mathcal{U}_0 &= \mathcal{U}_1\left(1 + \frac{z_1 y_2}{2}\right) + \mathcal{I}_1 z_1 \\ \mathcal{I}_0 &= \mathcal{I}_1\left(1 + \frac{z_1 y_2}{2}\right) + \mathcal{U}_1 \frac{y_2}{2}\left(2 + \frac{z_1 y_2}{2}\right). \end{aligned} \tag{2}$$

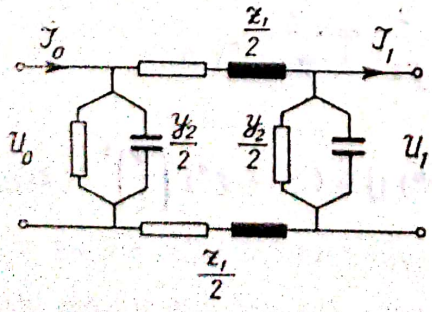


Fig. 29.275. Circuit cuadripolar finit de tipul $\overline{\Pi}$

Pe de altă parte pentru același circuit cuadripolar ca făcînd parte dintr-un lanț de circuite cuadripolare, s-a obținut:

$$\mathcal{U}_0 = \mathcal{U}_1 \operatorname{ch}\gamma + \mathcal{I}_1 z_U \operatorname{sh}\gamma; \quad \mathcal{I}_0 = \mathcal{I}_1 \operatorname{ch}\gamma + \frac{\mathcal{U}_1}{z_U} \operatorname{sh}\gamma \tag{3}$$

în care

$$\operatorname{ch}\gamma = 1 + \frac{z_1 y_2}{2}; \quad \left(\operatorname{th}\frac{\gamma}{2}\right)\frac{2}{y_2} = z_U.$$

Din comparația relațiilor (2) și (3) rezultă

$$1 + \frac{z_1 y_2}{2} = \operatorname{ch}\gamma \tag{4}$$

$$z_1 = z_U \operatorname{sh}\gamma \tag{5}$$

$$\frac{y_2}{2}\left(2 + \frac{z_1 y_2}{2}\right) = \frac{\operatorname{sh}\gamma}{z_U}. \tag{6}$$

Se verifică ușor exactitatea acestor relații.

Relația (4) este verificată în paragraful precedent prin relațiile (7) și (8).

Formînu-se produsul între (5) și (6) se obține

$$\operatorname{sh}^2\gamma = \frac{z_1 y_2}{2}\left(2 + \frac{z_1 y_2}{2}\right) \tag{7}$$

ceea ce se verifică din

$$\operatorname{ch}^2\gamma - \operatorname{sh}^2\gamma = 1. \tag{8}$$

Relația (8) reprezintă

$$\left(1 + \frac{z_1 y_2}{2}\right)^2 - 1 = \operatorname{sh}^2\gamma = \frac{z_1 y_2}{2}\left(2 + \frac{z_1 y_2}{2}\right). \tag{9}$$

Tot din (5) și (6) se obține prin împărțire

$$z_U^2 = \frac{z_1}{\frac{y_2}{2}\left(2 + \frac{z_1 y_2}{2}\right)}, \tag{10}$$

Pentru verificarea exactității relației (9) se formează

$$z_U^2 = z_{0c} z_{0k}.$$

Din schema din figura 29.275 se obține la mersul în gol ($\mathcal{I}_1 = 0$)

$$z_{00} = \frac{\left(z_1 + \frac{2}{y_2}\right)\frac{2}{y_2}}{z_1 + \frac{2}{y_2} + \frac{2}{y_2}} = \frac{z_1 y_2 + 2}{z_1 y_2 + 4}\,\frac{2}{y_2} = \frac{\frac{z_1 y_2}{2} + 1}{\frac{z_1 y_2}{2} + 2}\,\frac{2}{y_2}. \tag{11}$$

De asemenea se obține din scurtcircuit ($\mathcal{U}_1 = 0$)

$$z_{ck} = \frac{z_1\,\frac{2}{y_2}}{z_1 + 2/y_2} = \frac{2z_1}{z_1 y_2 + 2} = \frac{z_1}{\frac{z_1 y_2}{2} + 1}. \tag{12}$$

Din (11) și (12) prin înmulțire, se obține

$$z_{0c} z_{ck} = \frac{z_1}{z_1 y_2 + 2}\,\frac{2}{y_2} = z_U^2$$

ceea ce verifică relația (9).

Din verificarea relațiilor (4), (5) și (6) se constată că legătura dintre $\mathcal{U}_0$ cu $(\mathcal{U}_1, \mathcal{I}_1)$ și legătura dintre $\mathcal{I}_0$ cu $(\mathcal{U}_1, \mathcal{I}_1)$ se reprezintă mult mai simplu dacă se folosesc ch γ și z_U în loc de z_1 și y_2.

Figura 29.276 reprezintă două circuite cuadripolare în lanț.

Folosind relațiile de legătură dintre $\mathcal{U}_1$ cu $\mathcal{U}_2$ și $\mathcal{I}_2$ respectiv dintre $\mathcal{I}_1$ cu $\mathcal{U}_2$ și $\mathcal{I}_2$ după aceea legătura dintre $\mathcal{U}_0$ cu $(\mathcal{U}_1, \mathcal{I}_1)$ și $\mathcal{I}_0$ cu $(\mathcal{U}_1, \mathcal{I}_1)$.

Cu ajutorul impedanței z_1 și admitanței y_2 în formele

$$\begin{aligned} \mathcal{U}_1 &= \mathcal{U}_2\mathcal{A} + \mathcal{I}_2\mathcal{B} & \mathcal{U}_0 &= \mathcal{U}_1\mathcal{A} + \mathcal{I}_1\mathcal{B} \\ \mathcal{I}_1 &= \mathcal{I}_2\mathcal{A} + \mathcal{U}_2\mathcal{C} & \mathcal{I}_0 &= \mathcal{I}_1\mathcal{A} + \mathcal{U}_1\mathcal{C} \end{aligned} \tag{13}$$

în care

$$\mathcal{A}_1 = 1 + \frac{z_1 y_2}{2}; \quad \mathcal{B} = z_1; \quad \mathcal{C} = \frac{y_2}{2}\left(2 + \frac{z_1 y_2}{2}\right. \tag{14}$$

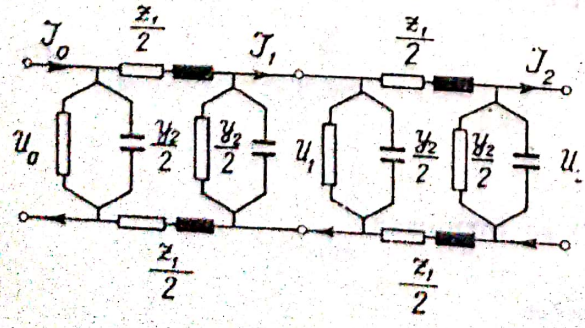


Fig. 29.276. Două circuite cuadripolare în lanț.

se obține pentu cele două circuite cuadripolare în lanț

$$\begin{aligned} \mathcal{U}_0 &= \mathcal{U}_2(\mathcal{A}^2 + \mathcal{BC}) + \mathcal{I}_2 2\mathcal{AB} \\ \mathcal{I}_0 &= \mathcal{I}_2(\mathcal{A}^2 + \mathcal{BC}) + \mathcal{U}_2 2\mathcal{AC}. \end{aligned} \tag{15}$$

De asemenea pentru un lanț format din trei circuite cuadripolare în lanț se va obține

$$\begin{aligned} \mathcal{U}_0 &= \mathcal{U}_3(\mathcal{A}^3 + 3\mathcal{ABC}) + \mathcal{I}_3(3\mathcal{A}^2\mathcal{B} + \mathcal{B}^2\mathcal{C}) \\ \mathcal{I}_0 &= \mathcal{I}_3(\mathcal{A}^3 + 3\mathcal{ABC}) + \mathcal{U}_3(3\mathcal{A}^2\mathcal{C} + \mathcal{BC}^2). \end{aligned} \tag{16}$$

Pentru utilizarea mărimilor ch γ și z_U relațiile (15) și (16) obțin forme mult mai simple

$$\begin{aligned} \mathcal{U}_0 &= \mathcal{U}_2 \operatorname{ch} 2\gamma + \mathcal{I}_2 z_U \operatorname{sh} 2\gamma \\ \mathcal{I}_0 &= \mathcal{I}_2 \operatorname{ch} 2\gamma + \frac{\mathcal{U}_2}{z_U} \operatorname{sh} 2\gamma \end{aligned} \tag{15'}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{U}_0 &= \mathcal{U}_3 \operatorname{ch} 3\gamma + \mathcal{I}_2 z_U \operatorname{sh} 3\gamma \\ \mathcal{I}_0 &= \mathcal{I}_3 \operatorname{ch} 3\gamma + \frac{\mathcal{U}_3}{z_U} \operatorname{sh} 3\gamma. \end{aligned} \tag{16'}$$

Din comparațiile relațiilor (15) cu (15') și (16) cu (16') se constată importanța introducerii parametrilor ch γ și z_U la cercetarea unui lanț format din n circuite cuadripolare finite.

Ca exercițiu se verifică egalitatea

$$\mathcal{A}^2 + \mathcal{BC} = \operatorname{ch} 2\gamma.$$

Avem

$$\mathcal{A} = \frac{z_1 y_2}{2} + 1 = \operatorname{ch} \gamma \quad \mathcal{BC} = \frac{z_1 y_2}{2}\left(\frac{z_1 y_2}{2} + 2\right) = \operatorname{sh}^2 \gamma$$

de unde se obține

$$\mathcal{A}^2 + \mathcal{BC} = \operatorname{ch}^2 \gamma + \operatorname{sh}^2 \gamma = \left(\frac{e^{\gamma} + e^{-\gamma}}{2}\right)^2 + \left(\frac{e^{\gamma} - e^{-\gamma}}{2}\right)^2 =$$

$$= \frac{1}{2}(e^{2\gamma} + e^{-2\gamma}) = \operatorname{ch} 2\gamma.$$

Exemplu de aplicație a relațiilor

$$\mathcal{U}_0 = \mathcal{U}_1\left(1 + \frac{z_1 y_2}{2}\right) + \mathcal{I}_1 z_1$$

$$\mathcal{I}_0 = \mathcal{I}_1\left(1 + \frac{z_1 y_2}{2}\right) + \mathcal{U}_1 \frac{y_2}{2}\left(2 + \frac{z_1 y_2}{2}\right)$$

Scanned with OKEN Scanner

în care

$$z_1 = (\mathrm{j}\,\omega L^* + r^*)\, l^{\mathrm{km}}$$

$$y_2 = (\mathrm{j}\,\omega\, C^* + g^*)\, l^{\mathrm{km}}$$

se neglijează r^* și g^* la formarea produsului $z_1 y_2$.

Se obține

$$z_1 y_2 = -\,\omega^2 L^* C^* l^2_{\mathrm{km}^2}.$$

Ținîndu-se seama de expresiile pentru L^* și C^* din paragraful 26.6(1) avem

$$L^* C^* \cong \frac{\varepsilon_0 \mu_0}{9} \cdot 10^{10}$$

de unde se deduce

$$v_{v0} = \frac{1}{\sqrt{L^* C^*}} = 300\,000 \text{ km/s}.$$

Se formează

$$\frac{z_1 y_2}{2} = -\,\frac{\omega^2}{2}\,\frac{1}{9}\,10^{-10} l^2_{\mathrm{km}^2} = 5{,}47 \cdot 10^{-7}\, l^2_{\mathrm{km}^2}$$

în care

$$\omega = 2\pi f = 314.$$

Pentru $l = 300$ km cînd se mai poate folosi parametrii concentrați se obține

$$\varepsilon = 5{,}47 \cdot 10^{-7} \cdot 9 \cdot 10^4 = 0{,}0492.$$

Ca urmare relațiile pentru $\mathcal{U}_0$ și $\mathcal{I}_0$ devin

$$\begin{aligned} \mathcal{U}_0 &= \mathcal{U}_1(1 - \varepsilon) + \mathcal{I}_1 z_1 \\ \mathcal{I}_0 &= \mathcal{I}_1(1 - \varepsilon) + \mathcal{U}_1 y_2 \end{aligned} \qquad (17)$$

în care

$$\frac{y_2}{2}\left(2 + \frac{z_1 y_2}{2}\right) \cong y_2. \qquad (18)$$

Deoarece în (17) ε, e neglijabil față de 1 se obține

$$\mathcal{U}_0 = \mathcal{U}_1 + \mathcal{I}_1 z_1 \qquad \mathcal{I}_0 = \mathcal{I}_1 + \mathcal{U}_1 y_2. \qquad (19)$$

În diagrama din figura 29.277 se prezintă $\mathcal{U}_0$ și $\mathcal{I}_0$ din relațiile (19) care corespunde circuitului cuadripolar finit din figura 29.275.

Scanned with OKEN Scanner

La liniile trifazate de înaltă tensiune se aplică relaţiile (19.)

Ca urmare admitanţa y_2 nu o mai împărţim în două părţi egale ca la circuitul cuadripolar de tipul II ci o considerăm la sfîrşitul liniei în mersul în gol al liniei ca în figura 29.278.

Pentru calculul numeric se introduc următoarele date

$$r^* = 0{,}12\ \Omega/\text{km} \qquad L^* = 0{,}001272\ \text{H/km} \qquad C_{12}^* = 0{,}002\ \mu\text{F/km}$$

$$C_0^* = 0{,}004\ \mu\text{F/km}$$

pe fază

$$C^* = 0{,}004 + 3 \cdot 0{,}002 = 0{,}01\ \mu\text{F/km}, \qquad g^* = 0.$$

Se calculează

$$2\alpha^{*2} = \omega^2 L^* C^* \left[1 + \sqrt{1 + \left(\frac{r^*}{\omega L^*}\right)^2}\right]$$

$$2\beta^{*2} = \omega^2 L^* C^* \left[-1 + \sqrt{1 + \left(\frac{r^*}{\omega L^*}\right)^2}\right]$$

$$\left(\frac{r^*}{\omega L^*}\right)^2 = 0{,}09 \qquad \sqrt{1 + \left(\frac{r^*}{\omega L^*}\right)^2} = 1{,}043$$

$$L^*C^* = 12{,}72 \cdot 10^{-12} \qquad \omega^2 L^* C^* = 12\,600 \cdot 10^{-10}$$

$$2\alpha^{*2} = 25\,700 \cdot 10^{-10} \qquad \alpha^* = 0{,}001134$$

$$2\beta^{*2} = 541 \cdot 10^{-10} \qquad \beta^* = 0{,}0001645$$

$$v_U = \frac{\omega}{\alpha^*} = 277000\ \text{km/s} \qquad \lambda = \frac{v_U}{f} = 5\,540\ \text{km}.$$

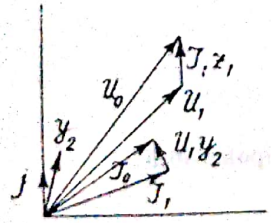


Fig. 29.277. Diagrama tensiunii $\mathcal{U}_0$ şi a curentului $\mathcal{J}_0$.

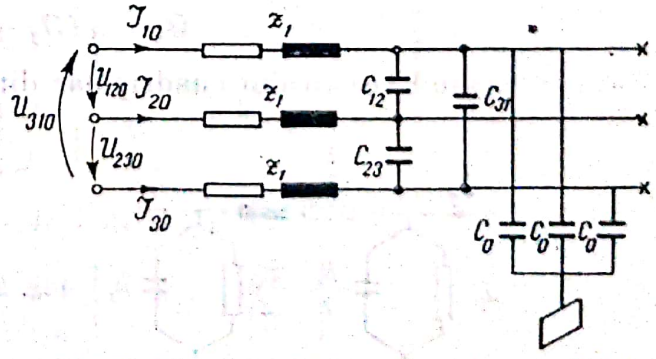


Fig. 29.278. Circuit triafzat în mersul în gol al liniei trifazate.

Avem

$$U_{12} = 200 \text{ kV} \qquad U_1 = \frac{200}{\sqrt{3}} = 115{,}6 \text{ kV}.$$

Şi un calcul aproximativ poate fi folosit în forma

$$v_U = \frac{1}{\sqrt{L^* C^*}} = \frac{10^6}{3{,}572} = 280\,000 \text{ km/s}$$

$$\lambda = \frac{280\,000}{50} = 5\,600 \qquad \alpha^* = \frac{2\pi}{5600} = 0{,}00112 \text{ rad/km}$$

$$z_U = \sqrt{\frac{L^*}{C^*}} = 357{,}2\Omega\,; \qquad \beta^* = \frac{r^*}{2}\frac{1}{\sqrt{\frac{L^*}{C^*}}} = \frac{0{,}06}{357{,}2} = 0{,}0001675 \text{ np/km}$$

$$y_2 = \mathrm{j}\,\omega C^* l = \mathrm{j}\,314 \cdot 0{,}01 \cdot 10^{-6} \cdot 100 = \mathrm{j} \cdot 314 \cdot 10^{-6}$$

pentru

$$l = 100 \text{ km}.$$

În mersul în gol se obţine pe fază curentul electric $I_{1.00}$.

$$I_{1.00} = 115 \cdot 000 \cdot 314 \cdot 10^{-6} = 36{,}4 \text{ A}.$$

30. APLICAREA CALCULULUI MATRICIAL LA STUDIUL CIRCUITELOR CUADRIPOLARE ÎN REGIM STAŢIONAR

Din cele prezentate cu privire la circuitele cuadripolare finite de forma Γ s-au stabilit relaţiile

$$\begin{aligned} \mathcal{U}_0 &= \mathcal{A}\mathcal{U}_1 + \mathcal{B}\mathcal{I}_1 \\ \mathcal{I}_0 &= \mathcal{D}\mathcal{I}_1 + \mathcal{C}\mathcal{U}_1 \end{aligned} \qquad (1)$$

care corespund circuitului cuadripolar din figura 30.279.

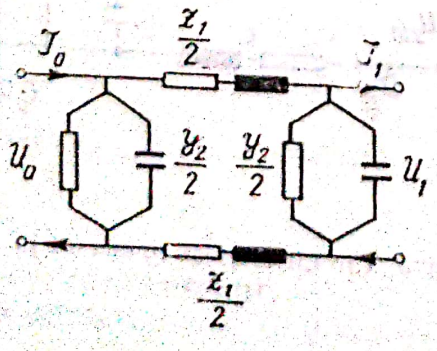


Fig. 30.279. Circuit cuadripolar finit.

Avem

$$\mathcal{A} = 1 + \frac{z_1 y_2}{2} = \operatorname{ch}\gamma$$

$$\mathcal{B} = z_1 = z_U \operatorname{sh}\gamma \tag{2}$$

$$\mathcal{C} = \frac{y_2}{2}\left(2 + \frac{z_1 y_2}{2}\right) = \frac{1}{z_U}\operatorname{sh}\gamma.$$

Prin introducerea matricei (vezi Adaus partea II-a) ecuațiile (1) iau formele

$$\begin{aligned} \mathcal{U}_0 &= a_{11}\mathcal{U}_1 + a_{12}\mathcal{I}_1 \\ \mathcal{I}_0 &= a_{21}\mathcal{U}_1 + a_{22}\mathcal{I}_1 \end{aligned} \tag{3}$$

în care

$$\begin{aligned} a_{11} &= 1 + \frac{z_1 y_2}{2} = \operatorname{ch}\gamma = \mathcal{A} \\ a_{12} &= z_1 = z_U \operatorname{sh}\gamma = \mathcal{B} \\ a_{21} &= \frac{y_2}{2}\left(2 + \frac{z_1 y_2}{2}\right) = \frac{1}{z_U}\operatorname{sh}\gamma = \mathcal{C} \\ a_{22} &= 1 + \frac{z_1 y_2}{2} = \operatorname{ch}\gamma = \mathcal{A}. \end{aligned} \tag{4}$$

Relațiile (3) se reprezintă într-o formă matricială.

$$\mathbf{E}_0 = \mathbf{a}\mathbf{E}_1 \tag{5}$$

în care

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \operatorname{ch}\gamma & z_U \operatorname{sh}\gamma \\ \dfrac{1}{z_U}\operatorname{sh}\gamma & \operatorname{ch}\gamma \end{bmatrix} \tag{6}$$

$$\mathbf{E}_0 = \begin{bmatrix} \mathcal{U}_0 \\ \mathcal{I}_0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{E}_1 = \begin{bmatrix} \mathcal{U}_1 \\ \mathcal{I}_1 \end{bmatrix}.$$

La mersul în gol matricele de mai sus devin

$$\mathbf{E}_{00} = \begin{bmatrix} \mathcal{U}_{00} \\ \mathcal{I}_{00} \end{bmatrix} \quad \mathbf{E}_{10} = \begin{bmatrix} \mathcal{U}_1 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{7}$$

$$\mathbf{E}_{00} = \mathbf{a}\mathbf{E}_{10} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathcal{U}_1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & \mathcal{U}_1 \\ a_{21} & \mathcal{U}_1 \end{bmatrix} \tag{8}$$

Scanned with OKEN Scanner

astfel că

$$\mathcal{U}_{00} = a_{11}\mathcal{U}_1, \qquad \mathcal{I}_{00} = a_{21}\mathcal{U}_1 \tag{9}$$

$$\frac{\mathcal{U}_{00}}{\mathcal{I}_{00}} = \frac{a_{11}}{a_{21}} = z_{00} = z_U \frac{\operatorname{ch}\gamma}{\operatorname{sh}\gamma} = \frac{1 + \frac{z_1 y_2}{2}}{\frac{y_2}{2}\left(2 + \frac{z_1 y_2}{2}\right)}$$

în care z_{00} reprezintă impedanța în mersul în gol.

În scurcircuit matricele de mai sus devin

$$\mathbf{E}_{Ck} = \begin{bmatrix} \mathcal{U}_{0k} \\ \mathcal{I}_{0k} \end{bmatrix} \qquad \mathbf{E}_{1k} = \begin{bmatrix} 0 \\ \mathcal{I}_1 \end{bmatrix} \tag{10}$$

$$\mathbf{E}_{Ck} = \mathbf{A}\mathbf{E}_{1k} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \mathcal{I}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{12} & \mathcal{I}_1 \\ a_{22} & \mathcal{I}_1 \end{bmatrix} \tag{11}$$

de unde se obțin

$$\begin{aligned} \mathbf{U}_{Ck} &= a_{12}\mathbf{I}_1 \\ \mathbf{I}_{Ck} &= a_{22}\mathbf{I}_1 \end{aligned} \tag{12}$$

$$\frac{\mathcal{U}_{0k}}{\mathcal{I}_{0k}} = \frac{a_{12}}{a_{22}} = z_{0k} = z_U \frac{\operatorname{sh}\gamma}{\operatorname{ch}\gamma} = \frac{z_1}{1 + \frac{z_1 y_2}{2}} \tag{13}$$

în care z_{0k} reprezintă impedanța de scurtcircuit.

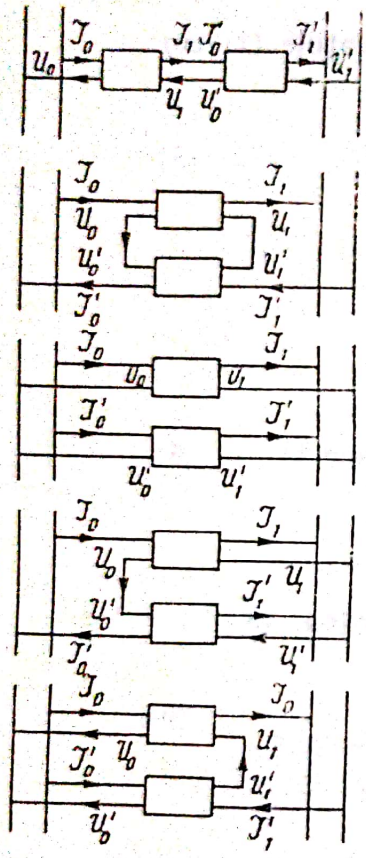


Fig. 30.280. 5 feluri de conectări pentru două circuite cuadripolare.

Cu două circuite cuadripolare ca acelea din figura 30.279 se pot forma cinci feluri de conectări prezentate în figura 30.280.

În figură se prezintă o conectare în lanț, în serie, în paralel, în serie paralel și în paralel-serie.

Pentru fiecare din aceste conectări a cîte două circuite cuadripolare, apare cîte o matrice fundamentală care se exprimă prin

$$\mathbf{a},\ \mathbf{z},\ \mathbf{y},\ \alpha,\ \} \ .$$

La folosirea acestor matrice este necesar să se considere fiecare element al unei matrice în funcție de elementele celorlalte matrice luate pe rînd.

Pentru stabilirea celor cinci matrice fundamentale se folosesc următoarele cinci grupuri de relații

$$\begin{aligned} \mathcal{U}_0 &= a_{11}\mathcal{U}_1 + a_{12}\mathcal{I}_1 \\ \mathcal{I}_0 &= a_{21}\mathcal{U}_1 + a_{22}\mathcal{I}_1 \end{aligned} \tag{14}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{U}_0 &= z_{11}\mathcal{I}_0 + z_{12}\mathcal{I}_1 \\ \mathcal{U}_1 &= z_{21}\mathcal{I}_0 + z_{22}\mathcal{I}_1 \end{aligned} \tag{15}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_0 &= y_{11}\mathcal{U}_0 + y_{12}\mathcal{U}_1 \\ \mathcal{I}_1 &= y_{21}\mathcal{U}_0 + y_{22}\mathcal{U}_1 \end{aligned} \tag{16}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{U}_0 &= \alpha_{11}\mathcal{U}_1 + \alpha_{12}\mathcal{I}_0 \\ \mathcal{I}_1 &= \alpha_{21}\mathcal{U}_1 + \alpha_{22}\mathcal{I}_0 \end{aligned} \tag{17}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{U}_1 &= \beta_{11}\mathcal{U}_0 + \beta_{12}\mathcal{I}_1 \\ \mathcal{I}_0 &= \beta_{21}\mathcal{U}_0 + \beta_{22}\mathcal{I}_1. \end{aligned} \tag{18}$$

Primul grup de relații în (14) corespunde la două circuite cuadripolare în lanț $\mathcal{U}_1 = \mathcal{U}_0'$.

Al doilea grup de relații în (15) corespunde la două circuite cuadripolare în serie $\mathcal{I}_0 = \mathcal{I}_0'$, $\mathcal{I}_1 = \mathcal{I}_1'$.

Al treilea grup de relații (16) corespunde la două circuite cuadripolare în paralel $\mathcal{U}_0 = \mathcal{U}_0'$, $\mathcal{U}_1 = \mathcal{U}_1'$.

Al patrulea grup de relații (17) se folosesc cînd de partea stîngă circuitele cuadripolare sînt în serie $\mathcal{I}_0 = \mathcal{I}_0'$ și în dreapta sînt în paralel ($\mathcal{U}_1 = \mathcal{U}_1'$).

Al cincilea grup de relații se aplică cînd de partea stîngă circuitele cuadripolare sînt în paralel $\mathcal{U}_0 = \mathcal{U}_0'$ iar în dreapta în serie $\mathcal{I}_1 = \mathcal{I}_1'$.

Se obțin următoarele relații matriciale pentru un circuit cuadripolar

$$\mathbf{E}_0 = \mathbf{a}\mathbf{E}_1, \quad \mathbf{U} = \mathbf{z}\mathbf{I}, \quad \mathbf{I} = \mathbf{y}\mathbf{U}, \quad \mathbf{E}^* = \alpha\mathbf{E}_1^*, \quad \mathbf{E}_1^* = \beta\mathbf{E}_0^* \tag{19}$$

în care:

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}; \quad \mathbf{z} = \begin{bmatrix} z_{11} & z_{12} \\ z_{21} & z_{22} \end{bmatrix}; \quad \mathbf{y} = \begin{bmatrix} y_{11} & y_{12} \\ y_{21} & y_{22} \end{bmatrix} \tag{20}$$

$$\alpha = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{bmatrix}; \quad \beta = \begin{bmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} \\ \beta_{21} & \beta_{22} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{E}_0 = \begin{bmatrix} \mathcal{U}_0 \\ \mathcal{I}_0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{E}_1 = \begin{bmatrix} \mathcal{U}_1 \\ \mathcal{I}_1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{E}_0^* = \begin{bmatrix} \mathcal{U}_0 \\ \mathcal{I}_1 \end{bmatrix} \tag{21}$$

$$\mathbf{E}_1^* = \begin{bmatrix} \mathcal{U}_1 \\ \mathcal{I}_0 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{U} = \begin{bmatrix} \mathcal{U}_0 \\ \mathcal{U}_1 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{I} = \begin{bmatrix} \mathcal{I}_0 \\ \mathcal{I}_1 \end{bmatrix}.$$

Scanned with OKEN Scanner

Legăturile dintre elementele celor cinci matrice fundamentale.

Legătura dintre elementele matricelor **a** *și* **z**

Din

$$\mathcal{U}_0 = a_{11}\mathcal{U}_1 + a_{12}\mathcal{I}_1$$

$$\mathcal{I}_0 = a_{21}\mathcal{U}_1 + a_{22}\mathcal{I}_1$$

se obține

$$\mathcal{U}_0 = a_{11}(\mathcal{I}_0 - a_{22}\mathcal{I}_1)\frac{1}{a_{21}} + a_{12}\mathcal{I}_1$$

$$\mathcal{U}_0 = \frac{a_{11}}{a_{21}}\mathcal{I}_0 - \frac{|a|}{a_{21}}\mathcal{I}_1 = z_{11}\mathcal{I}_0 + z_{12}\mathcal{I}_1$$

$$\mathcal{U}_1 = \frac{1}{a_{21}}\mathcal{I}_0 - \frac{a_{22}}{a_{21}}\mathcal{I}_1 = z_{21}\mathcal{I}_0 + z_{22}\mathcal{I}_1$$

de unde rezultă

$$z_{11} = \frac{a_{11}}{a_{21}}; \quad z_{12} = -\frac{|a|}{a_{21}}; \quad z_{21} = \frac{1}{a_{21}}; \quad z_{22} = -\frac{a_{22}}{a_{21}}.$$

Se pot exprima și elementele a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22} în funcție de elementele matricei **z**.

Se obțin

$$a_{11} = z_{11}a_{21} = \frac{z_{11}}{z_{21}}; \quad a_{21} = \frac{1}{z_{21}}; \quad a_{22} = -z_{22}a_{21} = -\frac{z_{22}}{z_{21}}$$

Din:

$$-z_{12}a_{21} = |a| = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

rezultă

$$a_{12} = \left(-\frac{z_{11}}{z_{21}}\frac{z_{22}}{z_{21}} + \frac{z_{12}}{z_{21}}\right)z_{21} = \frac{-|z|}{z_{21}}.$$

Matricele **a** și **z** devin

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = \frac{1}{z_{21}}\begin{bmatrix} z_{21} & -|z| \\ 1 & -z_{22} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{z} = \begin{bmatrix} z_{11} & z_{12} \\ z_{21} & z_{22} \end{bmatrix} = \frac{1}{a_{21}}\begin{bmatrix} a_{11} & -|a| \\ 1 & -a_{22} \end{bmatrix}.$$

Scanned with OKEN Scanner

Legătura dintre elementele matricelor **a** *și* **y**

Din

$$\mathcal{U}_0 = a_{11}\mathcal{U}_1 + a_{12}\mathcal{I}_1$$

$$\mathcal{I}_0 = a_{21}\mathcal{U}_1 + a_{22}\mathcal{I}_1$$

se deduce

$$\mathcal{I}_0 = a_{21}\mathcal{U}_1 + a_{22}(\mathcal{U}_0 - a_{11}\mathcal{U}_1)\frac{1}{a_{21}}$$

$$\mathcal{I}_0 = \frac{a_{22}}{a_{12}}\mathcal{U}_0 - \frac{|a|}{a_{12}}\mathcal{U}_1 = y_{11}\mathcal{U}_0 + y_{12}\mathcal{U}_1$$

$$\mathcal{I}_1 = \frac{1}{a_{12}}\mathcal{U}_0 - \frac{a_{11}}{a_{12}}\mathcal{U}_1 = y_{21}\mathcal{U}_0 + y_{22}\mathcal{U}_1$$

astfel că

$$y_{11} = \frac{a_{22}}{a_{12}}; \quad y_{12} = \frac{-|a|}{a_{12}}; \quad y_{21} = \frac{1}{a_{12}}; \quad y_{22} = -\frac{a_{11}}{a_{12}}.$$

Se obțin elementele matricei **a** cu ajutorul elementelor matricei **y** în felul următor:

$$a_{11} = -y_{22}a_{12} = -\frac{y_{22}}{y_{21}}; \quad a_{12} = \frac{1}{y_{21}}; \quad a_{22} = y_{11}\frac{1}{y_{21}}.$$

Din

$$-\frac{y_{12}}{y_{21}} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

se obține

$$a_{21} = \left(-\frac{y_{22}}{y_{21}}\frac{y_{11}}{y_{21}} + \frac{y_{12}}{y_{21}}\right)y_{21} = \frac{-|y|}{y_{21}}.$$

Legăturile dintre matricele **a** și **y** devin

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = \frac{1}{y_{21}}\begin{bmatrix} -y_{22} & 1 \\ -|y| & y_{11} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} y_{11} & y_{12} \\ y_{21} & y_{22} \end{bmatrix} = \frac{1}{a_{12}}\begin{bmatrix} a_{22} & -|a| \\ 1 & -a_{11} \end{bmatrix}.$$

Scanned with OKEN Scanner

Legăturile dintre elementele matricelor **a** *și* **α**

Din

$$\mathcal{U}_0 = a_{11}\mathcal{U}_1 + a_{12}\mathcal{I}_1$$

$$\mathcal{I}_0 = a_{21}\mathcal{U}_1 + a_{22}\mathcal{I}_1$$

se obține

$$\mathcal{U}_0 = a_{11}\mathcal{U}_1 + a_{12}(\mathcal{I}_0 - a_{21}\mathcal{I}_1)\frac{1}{a_{22}}$$

sau

$$\mathcal{U}_0 = \frac{|a|}{a_{22}}\mathcal{U}_1 + \frac{a_{12}}{a_{22}}\mathcal{I}_0 = \alpha_{11}\mathcal{U}_1 + \alpha_{12}\mathcal{I}_0$$

$$\mathcal{I}_1 = -\frac{a_{21}}{a_{22}}\mathcal{U}_1 + \frac{1}{a_{22}}\mathcal{I}_0 = \alpha_{21}\mathcal{U}_1 + \alpha_{22}\mathcal{I}_0$$

de unde rezultă

$$\alpha_{11} = \frac{|a|}{a_{22}}\ ;\quad \alpha_{12} = \frac{a_{12}}{a_{22}}\ ;\quad \alpha_{21} = -\frac{a_{21}}{a_{22}}\ ;\quad \alpha_{22} = \frac{1}{a_{22}}\ .$$

Se obțin și elementele matricei **a** exprimate prin elementele matricei **α** în formele

$$a_{12} = \alpha_{12}\ ;\ a_{22} = \frac{\alpha_{12}}{\alpha_{22}}\ ;\quad a_{21} = -\frac{\alpha_{21}}{\alpha_{22}}\ ;\quad a_{22} = \frac{1}{\alpha_{22}}\ .$$

Din

$$\frac{\alpha_{11}}{\alpha_{22}} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

se obține

$$a_{11} = \left(\frac{\alpha_{11}}{\alpha_{22}} - \frac{\alpha_{12}}{\alpha_{22}}\,\frac{\alpha_{21}}{\alpha_{22}}\right)\alpha_{22} = \frac{|\alpha|}{\alpha_{22}}\ .$$

Legăturile dintre matricele **a** și **α** devin

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = \frac{1}{\alpha_{22}}\begin{bmatrix} |\alpha| & \alpha_{12} \\ -\alpha_{21} & 1 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{\alpha} = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{bmatrix} = \frac{1}{a_{12}}\begin{bmatrix} |a| & a_{12} \\ -a_{21} & 1 \end{bmatrix}.$$

Scanned with OKEN Scanner

Legătura dintre elementele matricelor **a** *și* **β**

Din

$$\mathcal{U}_0 = a_{11}\mathcal{U}_1 + a_{12}\mathcal{I}_1$$

$$\mathcal{I}_0 = a_{21}\mathcal{U}_1 + a_{22}\mathcal{I}_1$$

se obțin

$$\mathcal{U}_1 = (\mathcal{U}_0 - a_{12}\mathcal{I}_1)\frac{1}{a_{11}} = \beta_{11}\mathcal{U}_0 + \beta_{12}\mathcal{I}_1$$

$$\mathcal{I}_0 = a_{21}(\mathcal{U}_0 - a_{12}\mathcal{I}_1)\frac{1}{a_{11}} + a_{22}\mathcal{I}_1$$

sau

$$\mathcal{I}_0 = \frac{a_{21}}{a_{11}}\,\mathcal{U}_0 + \frac{|a|}{a_{11}}\,\mathcal{I}_1 = \beta_{21}\,\mathcal{U}_0 + \beta_{22}\mathcal{I}_1$$

de unde se deduc

$$\beta_{11} = \frac{1}{a_{11}}; \quad \beta_{12} = -\frac{a_{12}}{a_{11}}; \quad \beta_{21} = \frac{a_{21}}{a_{11}}; \quad \beta_{22} = \frac{|a|}{a_{11}}.$$

Elementele matricei **a** în funcție de elementele matricei **β** devin

$$a_{11} = \frac{1}{\beta_{11}}; \quad a_{12} = -\frac{\beta_{12}}{\beta_{11}}; \quad a_{21} = \frac{\beta_{21}}{\beta_{11}}.$$

Din

$$\frac{\beta_{22}}{\beta_{11}} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

rezultă

$$a_{22} = \left(\frac{\beta_{22}}{\beta_{11}} - \frac{\beta_{12}}{\beta_{11}}\,\frac{\beta_{21}}{\beta_{11}}\right)\beta_{11} = \frac{|\beta|}{\beta_{11}}.$$

Legăturile dintre matricele **a** și **β** sînt

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = \frac{1}{\beta_{11}}\begin{bmatrix} 1 & -\beta_{12} \\ \beta_{21} & |\beta| \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{\beta} = \begin{bmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} \\ \beta_{21} & \beta_{22} \end{bmatrix} = \frac{1}{a_{11}}\begin{bmatrix} 1 & -a_{12} \\ a_{21} & |a| \end{bmatrix}.$$

Revenim la cercetările celor două circuite cuadripolare din figura 30.280.

În cele cinci cazuri de cercetări a două circuite cuadripolare, în baza relațiilor matriciale (19) și (21) se obțin

În primul caz $\mathbf{E}_0 = \mathbf{a}\mathbf{E}_1$; $\mathbf{E}_0' = \mathbf{a}\mathbf{E}_1'$ în care $\mathbf{E}_1 = \mathbf{E}_0'$ se obține $\mathcal{E}_0 = a^2\mathcal{E}_1'$.

În al doilea caz $\mathbf{U} = \mathbf{z}\mathbf{I}$; $\mathbf{U}' = \mathbf{z}'\mathbf{I}'$ în care $\mathbf{I} = \mathbf{I}'$ se obține $\mathbf{U} + \mathbf{U}' = (\mathbf{z} + \mathbf{z}')\,\mathbf{I}$.

În al treilea caz $\mathbf{I} = \mathbf{y}\mathbf{U}$; $\mathbf{I}' = \mathbf{y}'\mathbf{U}'$ în care $\mathbf{U} = \mathbf{U}'$, se obține

$$\mathbf{I} + \mathbf{I}' = (\mathbf{y} + \mathbf{y}')\,\mathbf{U}$$

În al patrulea caz $\mathbf{E}_0^* = \alpha\mathbf{E}_1^*$; $\mathbf{E}_0^{*\prime} = \alpha'\mathbf{E}_1^{*\prime}$ în care $\mathbf{E}_1^* = \mathbf{E}_1^{*\prime}$ se obține

$$\mathbf{E}_0^* + \mathbf{E}_0^{*\prime} = (\alpha + \alpha')\,\mathbf{E}_1^*$$

În al cincilea caz $\mathbf{E}_0^* = \beta\mathbf{E}_0^*$; $\mathbf{E}_1^{*\prime} = \beta'\mathbf{E}_0^{*\prime}$ în care $\mathbf{E}_0^* = \mathbf{E}_0^{*\prime}$ se obține

$$\mathbf{E}_1^* + \mathbf{E}_1^{*\prime} = (\beta + \beta')\,\mathbf{E}_0^*.$$

30.1 MATRICELE DIAGONALE

La folosirea matricelor intervine deseori necesitatea de a se cunoaște matricele diagonale ale lor.

Ne propunem să stabilim matricele diagonale $\mathbf{d}_a$ și $\mathbf{d}_z$ ale matricelor **a** și **z**.

În acest scop se determină valorile proprii ale matricelor **a** și **z**, exprimate prin λ_{a1}, λ_{a2}, λ_{21}, λ_{22} cu care se formează matricele diagonale

$$\mathbf{d}_a = \begin{bmatrix} \lambda_{a1} & 0 \\ 0 & \lambda_{a2} \end{bmatrix} \qquad \mathbf{d}_z = \begin{bmatrix} \lambda_{z1} & 0 \\ 0 & \lambda_{z2} \end{bmatrix}. \tag{1}$$

Din

$$\lambda_{a1},\ \lambda_{a2} = \frac{a_{11} + a_{22}}{2} \pm \sqrt{\frac{(a_{11} - a_{22})^2}{4} + a_{12}\ a_{21}} \tag{2}$$

denumite valori proprii ale matricei **a**, în care

$$a_{11} = a_{22} = \operatorname{ch}\gamma;\ a_{12} = z_U \operatorname{sh}\gamma;\ a_{21} = \frac{1}{z_U}\operatorname{sh}\gamma$$

se obține

$$\frac{a_{11} + a_{22}}{2} = \operatorname{ch}\gamma;\ \sqrt{\frac{(a_{11} - a_{22})^2}{4} + a_{12}\ a_{21}} = \operatorname{sh}\gamma$$

Scanned with OKEN Scanner

astfel că

$$\lambda_{a1},\ \lambda_{a2} = \operatorname{ch}\gamma \pm \operatorname{sh}\gamma = \frac{1}{2}(e^{\gamma} + e^{-\gamma}) \pm \frac{1}{2}(e^{\gamma} - e^{-\gamma}) = e^{\gamma}$$

$$\text{respectiv } e^{-\gamma} \qquad \lambda_{a1} = e^{\gamma} \qquad \lambda_{a2} = e^{-\gamma}$$

$$\mathbf{d}_a = \begin{bmatrix} e^{\gamma} & 0 \\ 0 & e^{\gamma} \end{bmatrix}. \tag{3}$$

Din (3) se constată că matricea diagonală a matricei **a** conține numai argumentul de undă.

Se știe că matricea **a** și matricea $\mathbf{d}_a$ posedă același determinant adică aceeași valoare numerică; asta nu înseamnă că matricele sînt egale, deoarece nu posedă aceiași termeni.

Avem

$$a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = \operatorname{ch}^2\gamma - \operatorname{sh}^2\gamma = 1$$

$$e^{\gamma}e^{-\gamma} = 1. \tag{4}$$

Din

$$\lambda_{z1},\ \lambda_{z2} = \frac{z_{11} + z_{22}}{2} \pm \sqrt{\frac{(z_{11} - z_{22})^2}{4} + z_{12}z_{21}} \tag{5}$$

denumite valori proprii ale matricei **z** în care

$$z_{11} = \frac{a_{11}}{a_{21}}; \quad z_{12} = -\frac{|a|}{a_{21}}; \quad z_{21} = \frac{1}{a_{21}}; \quad z_{22} = -\frac{a_{22}}{a_{21}}$$

se obține

$$\lambda_{z1},\ \lambda_{z2} = \frac{1}{a_{21}}\left(\frac{a_{11} - a_{22}}{2} \pm \sqrt{\frac{(a_{11} + a_{22})^2}{4} - |a|}\right) \tag{6}$$

avem

$$\frac{1}{4}(a_{11} + a_{22})^2 - |a| = \frac{1}{4}(a_{11}^2 + a_{22}^2 + 2a_{11}a_{22}) - a_{11}a_{22} + a_{12}a_{21} =$$

$$= \frac{1}{4}(a_{11}^2 + a_{22}^2) - \frac{1}{2}a_{11}a_{22} + a_{12}a_{21} = \frac{1}{4}(a_{11} - a_{22})^2 + a_{12}a_{21}$$

astfel că

$$\lambda_{z1},\ \lambda_{z2} = \frac{1}{a_{21}}\left(\frac{a_{11} - a_{22}}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4}(a_{11} - a_{22})^2 + a_{12}a_{21}}\right). \tag{7}$$

Introducîndu-se în relația (7)

$$a_{11} = \operatorname{ch}\gamma; \quad a_{12} = z_U \operatorname{sh}\gamma; \quad a_{21} = \frac{1}{z_U}\operatorname{sh}\gamma; \quad a_{22} = \operatorname{ch}\gamma$$

Scanned with OKEN Scanner

se obține

$$\lambda_{z1},\ \lambda_{z2} = \pm z_U$$

astfel că matricea diagonală $\mathbf{d}_z$ devine

$$\mathbf{d}_z = \begin{bmatrix} z_U & 0 \\ 0 & -z_U \end{bmatrix}. \tag{8}$$

Din (8) se vede că matricea diagonală $\mathbf{d}_z$ a matricei $\mathbf{z}$ conține numai impedanța de undă z_U.

Se constată că matricea $\mathbf{z}$ posedă același determinant ca matricea diagonală $\mathbf{d}_z$.

Avem

$$|z| = -\frac{a_{11}a_{22}}{a_{21}^2} + \frac{|a|}{a_{21}^2} = -\frac{\operatorname{ch}^2\gamma}{\operatorname{sh}^2\gamma} z_U^2 + \frac{z_U^2}{\operatorname{sh}^2\gamma}$$

$$\frac{z_U^2}{\operatorname{sh}^2\gamma}(-\operatorname{ch}^2\gamma + 1) = -z_U^2.$$

Elementele matricei $\mathbf{a}$ *în funcție de* λ_{a1}, λ_{a2}, λ_{z1}, λ_{z2}.

Se ține seama de relațiile

$$\lambda_{z1},\ \lambda_{z2} = \frac{1}{a_{21}}\left(\frac{a_{11}-a_{22}}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4}(a_{11}-a_{22})^2 + a_{12}a_{21}}\right) \tag{9}$$

$$\lambda_{a1},\ \lambda_{a2} = \left(\frac{a_{11}+a_{22}}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4}(a_{11}-a_{22})^2 + a_{12}a_{21}}\right)$$

în care se introduc

$$\frac{a_{11}+a_{22}}{2} = q;\quad \frac{a_{11}-a_{22}}{2} = r;\quad \sqrt{\frac{1}{4}(a_{11}-a_{22})^2 + a_{12}a_{21}} = s \tag{10}$$

se formează

$$\lambda_{a1},\ \lambda_{z1} = \frac{1}{a_{21}}(q+s)(r+s);\quad \lambda_{a2}\lambda_{z2} = \frac{1}{a_{21}}(q-s)(r-s)$$

$$\lambda_{a1}\lambda_{z1} - \lambda_{a2}\lambda_{z2} = \frac{1}{a_{21}} 2s(q+r) = \frac{a_{11}}{a_{21}} 2s \tag{11}$$

$$\lambda_{z1} - \lambda_{z2} = \frac{1}{a_{21}}((r+s)-(r-s)) = \frac{2s}{a_{21}}. \tag{12}$$

Din (11) și (12) se obține

$$\frac{\lambda_{a1}\lambda_{z1} - \lambda_{a2}\lambda_{z2}}{\lambda_{z1} - \lambda_{z2}} = a_{11} \tag{13}$$

Scanned with OKEN Scanner

Din

$$\lambda_{a1} - \lambda_{a2} = (q + s) - (q - s) = 2s$$

se obține

$$\frac{\lambda_{a1} - \lambda_{a2}}{\lambda_{z1} - \lambda_{z2}} = a_{21}, \tag{14}$$

se formează

$$\lambda_{z1}\lambda_{z2} = \frac{1}{a_{21}^2}(r + s)(r - s) = \frac{1}{a_{21}^2}(r^2 - s^2).$$

$$r^2 - s^2 = \frac{(a_{11} - a_{22})^2}{4} - \left(\frac{(a_{11} - a_{22})^2}{4} + a_{12}\,a_{21}\right).$$

Ca urmare

$$\lambda_{z1}\lambda_{z2} = -\,a_{12}a_{21}\,\frac{1}{a_{21}^2} = -\,\frac{a_{12}}{a_{21}} = |\,z\,| \tag{15}$$

$$\frac{\lambda_{z1}\lambda_{z2}}{\lambda_{z1} - \lambda_{z2}} = -\,\frac{a_{12}}{2s}\,; \quad -(\lambda_{a1} - \lambda_{a2}) = \frac{\lambda_{z1}\lambda_{z2}}{\lambda_{z1} - \lambda_{z2}} = a_{12}. \tag{16}$$

Se mai formează

$$\lambda_{a2}\lambda_{z1} = \frac{1}{a_{21}}(q - s)(r + s)$$

$$\lambda_{a1}\lambda_{z2} = \frac{1}{a_{21}}(q + s)(r - s)$$

$$\lambda_{a2}\lambda_{z1} - \lambda_{a1}\lambda_{z2} = \frac{1}{a_{21}}\,2s(q - r) = \frac{1}{a_{21}}\,2\,sa_{22}$$

astfel că

$$\frac{\lambda_{a2}\lambda_{z1} - \lambda_{a1}\lambda_{z2}}{\lambda_{z1} - \lambda_{z2}} = a_{22}. \tag{17}$$

În mod analog se obțin elementele mattricei **z** în funcție de λ_{a1}, λ_{a2}, λ_{z1}, λ_{z2} se obține

$$z_{11} = \frac{a_{11}}{a_{21}} = \frac{\lambda_{a1}\lambda_{z1} - \lambda_{a2}\lambda_{z2}}{\lambda_{a1} - \lambda_{a2}} \tag{18}$$

$$z_{12} = -\,\frac{|\,a\,|}{a_{21}} = -\,\lambda_{a1}\lambda_{a2}\,\frac{\lambda_{z1} - \lambda_{z2}}{\lambda_{a1} - \lambda_{a2}}\,; \quad z_{21} = \frac{1}{a_{21}} = \frac{\lambda_{z1} - \lambda_{z2}}{\lambda_{a1} - \lambda_{a2}}$$

$$z_{22} = -\,\frac{a_{22}}{a_{21}} = -\,\frac{\lambda_{a2}\lambda_{z1} - \lambda_{a1}\lambda_{z2}}{\lambda_{a1} - \lambda_{a2}} = \frac{\lambda_{a1}\lambda_{z2} - \lambda_{a2}\lambda_{z1}}{\lambda_{a1} - \lambda_{a2}}.$$

Scanned with OKEN Scanner

Relația dintre matricea **a** *și matricea* $\mathbf{d}_a$

Pentru stabilirea unei relații dintre matricele **a** și $\mathbf{d}_a$ se folosește o matrice ajutătoare **b** în felul urmtător

$$\mathbf{a} = \mathbf{b}\mathbf{d}_a\mathbf{b}^{-1}$$

astfel că

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_{a1} & 0 \\ 0 & \lambda_{a2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11}^* & b_{21}^* \\ b_{12}^* & b_{22}^* \end{bmatrix} \frac{1}{|b|}$$

în care

$$b_{11}^* = b_{22};\quad b_{12}^* = -b_{21};\quad b_{21}^* = -b_{12};\quad b_{22}^* = b_{11}$$

se înmulțește matricea **a** cu matricea **b**

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} \end{bmatrix} \tag{20}$$

și se obține

$$\mathbf{a}\mathbf{b} = \mathbf{b} \cdot \mathbf{d}_a$$

în care

$$\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_{a1} & 0 \\ 0 & \lambda_{a2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_{11}\lambda_{a1} & b_{12}\lambda_{a2} \\ b_{21}\lambda_{a1} & b_{22}\lambda_{a2} \end{bmatrix}. \tag{21}$$

Din egalitatea elementelor din (20) și (21) se obține

$$\begin{aligned} b_{11}(a_{11} - \lambda_{a1}) + a_{12}b_{21} &= 0 \\ b_{12}(a_{11} - \lambda_{a2}) + a_{12}b_{22} &= 0 \\ b_{21}(a_{22} - \lambda_{a1}) + a_{21}b_{11} &= 0 \\ b_{22}(a_{22} - \lambda_{a2}) + a_{21}b_{12} &= 0 \end{aligned} \tag{22}$$

din prima și a treia relație în care apare λ_{a1}, eliminîndu-se b_{21}, se obține

$$b_{11}\left[(a_{11} - \lambda_{a1}) - \frac{a_{12}a_{21}}{a_{22} - \lambda_{a1}}\right] = 0$$

astfel că

$$\lambda_{a1}^2 - \lambda_{a1}(a_{11} + a_{22}) + a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = 0. \tag{23}$$

Se știe că ecuația (23) ne conduce la determinarea valorilor proprii ale matricei **a** din (9).

Se remarcă că din cele patru elemente b_{11}, b_{12}, b_{21}, b_{22} două nu pot fi determinate.

Scanned with OKEN Scanner

În consecință se fixează arbitrar elementele b_{11}, b_{22} astfel că b_{12} și b_{21} devin cunoscute în formele

$$b_{12} = -\frac{b_{22}}{a_{21}}(a_{22} - \lambda_{a2})$$
$$b_{21} = -\frac{b_{11}}{a_{12}}(a_{11} - \lambda_{a1}). \tag{24}$$

Ținîndu-se seama de

$$\lambda_{a1},\ \lambda_{a2} = \frac{a_{11} + a_{22}}{2} \pm \sqrt{\frac{(a_{11} - a_{22})^2}{4} + a_{12}a_{21}}.$$

Rezultă

$$a_{11} - \lambda_{a1} = \frac{a_{11} - a_{22}}{2} - \sqrt{\frac{(a_{11} - a_{22})^2}{4} + a_{12}a_{21}}$$

$$a_{22} - \lambda_{a2} = -\frac{a_{11} - a_{22}}{2} + \sqrt{\frac{(a_{11} - a_{22})^2}{4} + a_{12}a_{21}}$$

astfel că

$$b_{12} = \frac{b_{22}}{a_{21}}\left(\frac{a_{11} - a_{22}}{2} - \sqrt{\frac{(a_{11} - a_{22})^2}{4} + a_{12}a_{21}}\right)$$

$$b_{21} = -\frac{b_{11}}{a_{12}}\left(\frac{a_{11} - a_{22}}{2} - \sqrt{\frac{(a_{11} - a_{22})^2}{4} + a_{12}a_{21}}\right)$$

se mai ține seama de relațiile

$$a_{11} - \lambda_{a1} = \frac{\lambda_{a1}\lambda_{z1} - \lambda_{a2}\lambda_{z2}}{\lambda_{z1} - \lambda_{z2}} - \lambda_{a1} = \frac{\lambda_{a1} - \lambda_{a2}}{\lambda_{z1} - \lambda_{z2}}\lambda_{z2} = a_{21}\lambda_{z2}$$

$$a_{22} - \lambda_{a2} = \frac{\lambda_{a2}\lambda_{z1} - \lambda_{a1}\lambda_{z2}}{\lambda_{z1} - \lambda_{z2}} - \lambda_{a2} = -\frac{\lambda_{a1} - \lambda_{a2}}{\lambda_{z1} - \lambda_{z2}}\lambda_{z2} = -a_{21}\lambda_{z2}$$

$$b_{12} = -\frac{b_{22}}{a_{21}}(a_{22} - \lambda_{a2}) = b_{22}\lambda_{z2}$$

$$b_{21} = -\frac{b_{11}}{a_{12}}(a_{11} - \lambda_{a1}) = -\frac{a_{21}}{a_{12}}b_{11}\lambda_{z2}.$$

Ținîndu-se seama de

$$\frac{a_{21}}{a_{12}} = -\frac{\lambda_{a1} - \lambda_{a2}}{\lambda_{z1} - \lambda_{z2}} \cdot \frac{\lambda_{z1} - \lambda_{z2}}{\lambda_{z1}\lambda_{z2}} \frac{1}{\lambda_{a1} - \lambda_{a2}} = -\frac{1}{\lambda_{z1}\lambda_{z2}},$$

rezultă

$$b_{21} = b_{11}\frac{1}{\lambda_{z1}}.$$

Ca urmare matricea $\mathbf{b}$ ia forma

$$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{22}\lambda_{z2} \\ b_{11}\dfrac{1}{\lambda_{z1}} & b_{22} \end{bmatrix}$$

ca valoare numerică $|\mathbf{b}| = b_{11}b_{22}\left(1 - \dfrac{\lambda_{z2}}{\lambda_{z1}}\right)$, matricea reciprocă $\mathbf{b}^{-1}$ devine

$$\mathbf{b}^{-1} = \frac{1}{b_{11}b_{22}\left(1 - \dfrac{\lambda_{z2}}{\lambda_{z1}}\right)} \begin{bmatrix} b_{22} & -b_{22}\lambda_{z2} \\ -b_{11}\dfrac{1}{\lambda_{z1}} & b_{11} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \dfrac{1}{b_{11}}\dfrac{\lambda_{z1}}{\lambda_{z1} - \lambda_{z2}} & -\dfrac{1}{b_{11}}\dfrac{\lambda_{z1}\lambda_{z2}}{\lambda_{z1} - \lambda_{z2}} \\ -\dfrac{1}{b_{22}}\dfrac{1}{\lambda_{z1} - \lambda_{z2}} & \dfrac{1}{b_{22}}\dfrac{\lambda_{z1}}{\lambda_{z1} - \lambda_{z2}} \end{bmatrix}.$$

Prin exprimarea lui b_{12} și b_{21} în funcție de b_{11} și b_{22} matricea $\mathbf{a}$ ia forma

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{22}\lambda_{z2} \\ \dfrac{b_{11}}{\lambda_{z1}} & b_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_{a1} & 0 \\ 0 & \lambda_{a2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dfrac{1}{b_{11}}\dfrac{\lambda_{z1}}{\lambda_{z1} - \lambda_{z2}} & -\dfrac{1}{b_{11}}\dfrac{\lambda_{z1}\lambda_{z2}}{\lambda_{z1} - \lambda_{z2}} \\ -\dfrac{1}{b_{22}}\dfrac{1}{\lambda_{z1} - \lambda_{z2}} & \dfrac{1}{b_{22}}\dfrac{\lambda_{z1}}{\lambda_{z1} - \lambda_{z2}} \end{bmatrix}.$$

Se constată că dacă se ia $b_{11} = b_{22}$ atunci b_{11} și b_{22} dispar în produsul de mai sus.

Matricea $\mathbf{a}$ devine

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} 1 & \lambda_{z2} \\ \dfrac{1}{\lambda_{z1}} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_{a1} & 0 \\ 0 & \lambda_{a2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -\lambda_{z2} \\ -\dfrac{1}{\lambda_{z1}} & 1 \end{bmatrix} \frac{\lambda_{z1}}{\lambda_{z1} - \lambda_{z2}}. \qquad (25)$$

Se remarcă că matricea

$$\begin{bmatrix} 1 & -\lambda_{z2} \\ -\dfrac{1}{\lambda_{z1}} & 1 \end{bmatrix} \frac{\lambda_{z1}}{\lambda_{z1} - \lambda_{z2}}$$

reprezintă matricea reciprocă a primei matrice.

Scanned with OKEN Scanner

Fie

$$\mathbf{p} = \begin{bmatrix} 1 & \lambda_{z2} \\ \frac{1}{\lambda_{z1}} & 1 \end{bmatrix}.$$

Ca urmare

$$\mathbf{p}^{-1} = \frac{1}{|p|} \begin{bmatrix} 1 & -\lambda_{z2} \\ -\frac{1}{\lambda_{z1}} & 1 \end{bmatrix}$$

în care

$$|p| = 1 - \frac{\lambda_{z2}}{\lambda_{z1}} = \frac{\lambda_{z1} - \lambda_{z2}}{\lambda_{z1}}.$$

Prin efectuarea produselor celor trei matrice din (25) se obține matricea **a** în forma

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}.$$

Înlocuind pe λ_{a1}, λ_{a2} prin e^{γ}, $e^{-\gamma}$ și pe λ_{z1}, λ_{z2} prin z_v și $-z_v$, matricea **a** ia forma

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} 1 & -z_U \\ \frac{1}{z_U} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{\gamma} & 0 \\ 0 & e^{-\gamma} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & z_U \\ -\frac{1}{z_U} & 1 \end{bmatrix} \frac{1}{2}. \tag{26}$$

Exprimarea matricei **a** în forma (26) prezintă importanța folosirii calculului matricial.

În (26) se urmărește ușor influența argumentului de undă și a impedanței de undă la cercetarea circuitului cuadripolar. În nici un alt mod de exprimare a mărimilor caracteristice unui circuit cuadripolar, nu se prezintă într-o formă mai explicită decît aceea din (26). În **a** apare în matricea de la mijloc, matricea diagonală a lui **a**, iar matricea din dreapta e matricea reciprocă a primei matrice.

La formarea unui lanț din două circuite cuadripolare cu matricea **a** se obține din

$$\mathbf{E}_0 = \mathbf{a}^2 \mathbf{E}_1$$

$$\mathbf{a}^2 = \begin{bmatrix} 1 & -z_U \\ z_U & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{2\gamma} & 0 \\ 0 & e^{-2\gamma} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & z_U \\ -\frac{1}{z_U} & 1 \end{bmatrix} \frac{1}{2}$$

Scanned with OKEN Scanner

deoarece produsul celor două matrice vecine ne dă

$$\begin{bmatrix} 1 & z_U \\ -\frac{1}{z_U} & 1 \end{bmatrix} \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & -z_U \\ \frac{1}{z_U} & 1 \end{bmatrix} = \varepsilon$$

în care ε reprezintă matricea unitară.

30.2. UN STUDIU CRITIC ASUPRA CONDIȚIILOR DE BAZĂ LA STABILIREA ECUAȚIEI MATRICIALE A UNEI REȚELE ELECTRICE

Pentru a se arăta în ce constă studiul critic cu privire la condițiile de bază pentru stabilirea ecuației matriciale, să luăm următorul exemplu: în figura 30.281 se reprezintă o rețea trifazată.

Fie

$$\begin{aligned} z_{g1} + z_{l1} + z_{u1} &= z_1 \\ z_{g2} + z_{l2} + z_{u2} &= z_2 \\ z_{g3} + z_{l3} + z_{u3} &= z_3. \end{aligned} \tag{1}$$

Prin formarea integralei $\int (\mathrm{d}l\ \mathfrak{E})$ se obțin ecuațiile

$$\begin{aligned} \mathcal{U}_{g1} - \mathcal{U}_{g3} &= z_1 \mathcal{I}_1 - z_3 \mathcal{I}_3 \\ \mathcal{U}_{g2} - \mathcal{U}_{g3} &= z_2 \mathcal{I}_2 - z_3 \mathcal{I}_3 \end{aligned} \tag{2}$$

care corespund legii a doua a lui Kirchhoff.

În baza legii întîia a lui Kirchhoff avem

$$\mathcal{I}_1 + \mathcal{I}_2 + \mathcal{I}_3 = 0. \tag{3}$$

Fie $\mathcal{I}_1$, $\mathcal{I}_2$ considerați curenți independenți între ei. Ca urmare sistemul de ecuații ia forma

$$\begin{aligned} \mathcal{U}_{g1} - \mathcal{U}_{g3} &= (z_1 + z_3)\, \mathcal{I}_1 + z_3\, \mathcal{I}_2 \\ \mathcal{U}_{g2} - \mathcal{U}_{g3} &= z_3 \mathcal{I}_1 + (z_2 + z_3)\ \mathcal{I}_2 \end{aligned} \tag{4}$$

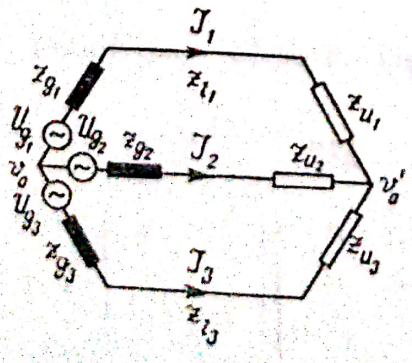


Fig. 30.281. Rețea trifazată.

de unde se deduce ecuația matricială

$$\begin{bmatrix} \mathcal{U}_{g1} - \mathcal{U}_{g3} \\ \mathcal{U}_{g2} - \mathcal{U}_{g3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_1 + z_3 & z_3 \\ z_3 & z_2 + z_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathcal{J}_1 \\ \mathcal{J}_2 \end{bmatrix} \tag{5}$$

care se exprimă și în forma

$$\mathbf{U}' - \mathbf{z}'\mathbf{I}'. \tag{6}$$

Ecuația matricială (5) a fost stabilită privind circuitul sub aspect fenomenologic.

La stabilirea sistemului de ecuații (4) cu curenții independenți între ei, se recomandă să se folosească în general *metoda circuitelor independente.*

În circuitul dat sînt p ramuri și q noduri. Avem $(q-1)$ ecuații independente între ele care corespund aplicării legii întîia a lui Kirchhoff.

Cum p, numărul de curenți electrici, e mai mare ca numărul de ecuații $(q-1)$, rezultă că apar $n = p - (q-1)$ *curenți electrici independenți între ei*, pentru care se formează n ecuații, aplicînd legea a doua a lui Kirchhoff.

În exemplul luat avem $p = 3$, $q = 2$, $n = 2$. Se obțin doi curenți independenți între ei, care corespund la cele două ochiuri din rețea.

Pentru $\mathcal{J}_1$ și $\mathcal{J}_2$ ca curenți independenți între ei, se fixează ochiurile în așa fel încît ramurile z_1 respectiv z_2 din cele două ochiuri să nu apară ca ramuri comune.

Se introduc pentru cele două ochiuri ecuațiile

$$\begin{aligned} z_{11}\mathcal{J}_1 + z_{12}\mathcal{J}_2 &= \mathcal{U}_{11} \\ z_{21}\mathcal{J}_1 + z_{22}\mathcal{J}_2 &= \mathcal{U}_{22} \end{aligned} \tag{7}$$

în care

$$\begin{aligned} \mathcal{U}_{11} = \mathcal{U}_{g1} - \mathcal{U}_{g3}; \quad \mathcal{U}_{22} = \mathcal{U}_{g2} - \mathcal{U}_{g3} \\ z_{11} = z_1 + z_3; \quad z_{12} = z_{21} = z_3; \quad z_{22} = z_2 + z_3. \end{aligned} \tag{8}$$

Deoarece se constată că la sensurile de parcurs ale ochiurilor, stabilite în raport cu sensurile curenților $\mathcal{J}_1$ și $\mathcal{J}_2$, ramura comună z_3 e parcursă în același sens, rezultă că z_{12} se exprimă prin $+ z_3$; în caz contrar ar fi apărut $-z_3$.

Se obține direct la parcursul ochiurilor

$$\begin{aligned} (z_1 + z_3)\mathcal{J}_1 + z_3\mathcal{J}_2 &= \mathcal{U}_{g1} - \mathcal{U}_{g3} \\ z_3\mathcal{J}_1 + (z_2 + z_3)\mathcal{J}_2 &= \mathcal{U}_{g2} - \mathcal{U}_{g3}. \end{aligned}$$

Deoarece în ecuația matricială (6) matricea $\mathbf{z}'$ posedă un determinant, rezultă posibilitatea determinării matricei $\mathbf{I}'$, atunci cînd se dă $\mathbf{U}'$. Se obține

$$(\mathbf{z}')^{-1}\mathbf{U}' = \mathbf{I}'. \tag{9}$$

Prin stabilirea sistemului de ecuații pe cale fenomenologică, rezolvarea lui se face direct, fără transpunerea acestui sistem în forma matricială.

Rolul calculului matricial constă, după cum se va vedea, în stabilirea ecuației matriciale, fără să se țină seama de caracterul circuitului, fără să se țină seama de repartiția în circuite a tensiunilor electromotoare și a impedanțelor.

În cele ce urmează se vor determina matricile $\mathbf{U}'$ și $\mathbf{z}'$ fără să se țină seama de caracterul circuitului.

Se prezintă mai întîi raționamentul cel nou folosit aci la determinarea matricilor $\mathbf{U}'$ și $\mathbf{z}'$, care se deosebește de raționamentul folosit în literatură, prezentat mai jos.

În acest scop se introduc următoarele trei matrici

$$\mathbf{I} = \begin{bmatrix} \mathcal{I}_1 \\ \mathcal{I}_2 \\ \mathcal{I}_3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{U} = \begin{bmatrix} \mathcal{U}_{g1} \\ \mathcal{U}_{g2} \\ \mathcal{U}_{g3} \end{bmatrix} \text{ și } \mathbf{z} = \begin{bmatrix} z_1 & & \\ & z_2 & \\ & & z_3 \end{bmatrix} \tag{10}$$

ca matrici fundamentale indiferent de felul cum sînt conectate tensiunile și impedanțele în circuit. În general matricile (10) nu prezintă o justificare fenomenologică în raport cu ecuația matricială a rețelei date.

Prin introducerea curenților independenți în forma

$$\mathcal{I}_1 = \mathcal{I}_p \qquad \mathcal{I}_2 = \mathcal{I}_q \tag{11}$$

se obțin relațiile

$$\begin{aligned} & \quad p \qquad q \\ \mathcal{I}_1 &= \mathcal{I}_p \\ \mathcal{I}_2 &= \qquad \mathcal{I}_q \\ \mathcal{I}_3 &= -\mathcal{I}_p - \mathcal{I}_q \end{aligned} \tag{12}$$

ceea ce ne conduce la următoarea relație între matricea $\mathbf{I}$ și matricea $\mathbf{I}'$ formată de curenții independenți între ei

$$\begin{bmatrix} \mathcal{I}_1 \\ \mathcal{I}_2 \\ \mathcal{I}_3 \end{bmatrix} = \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & \\ & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{matrix} p \\ q \end{matrix} \begin{bmatrix} \mathcal{I}_p \\ \mathcal{I}_q \end{bmatrix} \tag{13}$$

sau în forma

$$\mathbf{I} = \mathbf{C}\mathbf{I}' \tag{14}$$

în care $\mathbf{C}$ e denumită matricea de conexiune.

Se remarcă că matricea de conexiune e singulară, posedă determinantul egal cu zero. Ca urmare relaţia matricială (14) nu poate fi folosită la determinarea matricei $\mathbf{I}'$.

O astfel de relaţie matricială se formează numai cînd matricile $\mathbf{I}$ şi $\mathbf{I}'$ sînt date, de unde se obţine matricea de conexiune $\mathbf{C}$.

Se constată că la formarea produsului $\mathbf{CI}'$ se obţine matricea $\mathbf{I}$ cu trei linii şi o coloană. Numărul 3 e dat de numărul de linii de la primul factor al produsului, iar numărul de coloane 1 e dat de la numărul de coloane de la al doilea factor.

Dat fiindcă matricea $\mathbf{I}$ nu e justificată fenomenologic, zicem că s-a folosit *primul artificiu de calcul matricial* la determinarea matricei de conexiune $\mathbf{C}$.

Se determină apoi matricea $\mathbf{U}'$ cu ajutorul matricei $\mathbf{C}$ care corespunde circuitelor independente între ele.

Ţinîndu-se seama că $\mathbf{U}'$ posedă două linii, pentru că sînt doi curenţi independenţi între ei, legătura dintre $\mathbf{U}'$ şi $\mathbf{U}$ se stabileşte în felul următor:

$$\mathbf{U}' = \begin{matrix} p \\ q \end{matrix}\begin{bmatrix} \mathcal{U}_{g1} - \mathcal{U}_{g3} \\ \mathcal{U}_{g2} - \mathcal{U}_{g3} \end{bmatrix} = \begin{matrix} p \\ q \end{matrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}\begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix}\begin{bmatrix} \mathcal{U}_{g1} \\ \mathcal{U}_{g2} \\ \mathcal{U}_{g3} \end{bmatrix} \qquad (15)$$

adică

$$\mathbf{U}' = \mathbf{C}_t\mathbf{U}.$$

Prin produsul $\mathbf{C}_t\mathbf{U}$ se obţine $\mathbf{U}'$ cu două linii şi o coloană, deoarece matricea $\mathbf{C}_t$ are două linii şi matricea $\mathbf{U}$ o coloană.

Dat fiindcă matricea $\mathbf{U}$ nu are o justificare fenomenologică în raport cu circuitul dat, rezultă că matricea $\mathbf{U}'$ a fost obţinută printr-un *al doilea artificiu de calcul matricial.*

Mai rămîne să vedem cum se determină matricea $\mathbf{z}'$ care are două linii şi două coloane, cu ajutorul matricei $\mathbf{C}$.În acest scop, se iau ca factori extremi la formarea produsului, matricile $\mathbf{C}_t$ şi $\mathbf{C}$.

Se formează

$$\mathbf{z}' = \mathbf{C}_t\mathbf{z}\mathbf{C}. \qquad (16)$$

Matricea $\mathbf{z}'$ obţine două linii pentru că primul factor C_t posedă două linii şi obţine două coloane pentru că ultimul factor C posedă două coloane.

Matricea $\mathbf{z}$ introdusă între matricile $\mathbf{C}_t$ şi $\mathbf{C}$ trebuie să aibe un determinant diferit de zero, pentru ca matricea $\mathbf{z}'$ să aibă de asemeni un determinant diferit de zero. În acest scop se formează o matrice diagonală $\mathbf{z}$ cu toate impedanţele din circuitul dat.

Așa dar printr-un *al treilea artificiu de calcul matricial* se determină matricea z′ cu două linii și două coloane, în funcție de z. Calculul e următorul:

$$\mathbf{zC} = \begin{matrix} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix}\!\!\begin{matrix} \begin{matrix} 1 & 2 & 3 \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} z_1 & & \\ & z_2 & \\ & & z_3 \end{bmatrix} \end{matrix}\!\!\begin{matrix} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix}\!\!\begin{matrix} \begin{matrix} p & & q \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 1 & & \\ & & 1 \\ -1 & & -1 \end{bmatrix} \end{matrix} = \begin{matrix} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix}\!\!\begin{matrix} \begin{matrix} p & & q \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} z_1 & & \\ & & z_2 \\ -z_3 & & -z_3 \end{bmatrix} \end{matrix} \tag{17}$$

$$\mathbf{z'} = \mathbf{C}_t\,\mathbf{zC} = \begin{matrix} \\ p \\ q \end{matrix}\!\!\begin{matrix} \begin{matrix} 1 & 2 & 3 \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 1 & & -1 \\ & 1 & -1 \end{bmatrix} \end{matrix}\!\!\begin{matrix} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix}\!\!\begin{matrix} \begin{matrix} p & & q \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} z_1 & & \\ & & z_2 \\ -z_3 & & -z_3 \end{bmatrix} \end{matrix} = \begin{matrix} \\ p \\ q \end{matrix}\!\!\begin{matrix} \begin{matrix} p & q \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} z_1+z_3 & z_3 \\ z_3 & z_2+z_3 \end{bmatrix} \end{matrix}. \tag{18}$$

În concluzie, se constată că prin introducerea matricilor fundamentale **I**, **U**, **z** se obțin, cu ajutorul *a trei artificii de calcul matriciale*, matricile **C**, **U′** și **z′** fără să se țină seama de caracterul circuitului dat.

Trecem acum la raționamentul folosit în literatură[1] la determinarea matricilor **C**, **U′** și **z′**.

În acest scop se introduce relația matricială

$$\mathbf{U} = \mathbf{zI} \tag{19}$$

care principial corespunde la circuite individuale cu curenți independenți între ei, denumită rețea primitivă (v. fig. 30.282).

Deoarece matricile **U**, **I**, **z** au fost fixate arbitrar, e firesc să se constate că curenții din rețeaua primitivă nu coincid cu curenții din rețeaua dată. În exemplul luat în figura 30.281 avem

$$\mathcal{U} - \mathcal{U}_0' + \mathcal{U}_{g1} = \mathcal{I}_1 z_1$$

pe cînd în rețeaua primitivă rezultă

$$\mathcal{U}_{g1} = \mathcal{I}_1 z_1$$

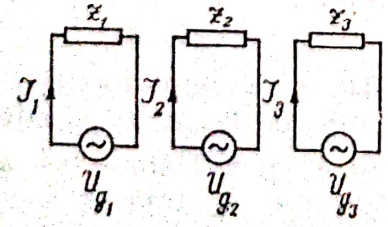


Fig. 30.282. Rețea primitivă.

[1] Manualul inginerului electrician I, Editura tehnică, 1953.

ceea ce ne arată că nu poate exista în ambele circuite același curent $\mathcal{I}_1$ cînd $\mathcal{V}_0 - \mathcal{V}_0'$ e diferit de zero.

Pe lîngă introducerea ecuației matriciale

$$\mathbf{U} = \mathbf{zI}$$

care corespunde rețelei primitive, se mai introduce egalitatea între puterile celor două circuite. Adică

$$\mathcal{U}_t\mathcal{I} = \mathcal{U}_t'\mathcal{I}' \tag{20}$$

La determinarea matricilor **C**, **U'** și **z'** se procedează de data aceasta în felul următor:

Se determină mai întîi matricea de conexiune ca la primul raționament. Din

$$\mathbf{I} = \mathbf{CI'}$$

se obține matricea **C**. Apoi din:

$$\mathbf{U}_t\mathbf{I} = \mathbf{U}_t\mathbf{CI'} = \mathbf{U}_t'\mathbf{I}$$

se deduce

$$\mathbf{U'} = \mathbf{C}_t\mathbf{U}$$

și în fine din

$$\mathbf{U'} = \mathbf{C}_t\mathbf{U} = \mathbf{C}_t\mathbf{zI} = \mathbf{C}\,\mathbf{zCI'}$$

rezultă

$$\mathbf{z'} = \mathbf{C}_t\mathbf{zC}.$$

Concluzia stabilită în literatură e următoarea: cu toate că folosirea rețelei primitive și a egalității puterilor nu corespunde realității, deoarece curenții electrici la aceleași tensiuni electromotoare și la aceleași impedanțe nu sînt aceiași în ambele circuite, rezultă totuși că matricile **U'** și **z'** sînt obținute într-o formă corectă.

De aci tragem concluzia: din momentul în care sînt folosite matricile fictive **U**, **I** și **z**, este imposibil să se creeze impresia că există o bază fenomenologică la determinarea matricilor **U'** și **z'**.

De aceea este iluzorie introducerea rețelei primitive și a egalității puterilor. Datorită acestui fapt se justifică de ce la utilizarea primului raționament nu s-a format ecuația matricială:

$$\mathbf{U} = \mathbf{zI}$$

ci s-a relevat faptul că cu ajutorul a trei matrici fundamentale și a trei artificii de calcul matricial, s-au determinat matricile **C**, **U'** și **z'**.

Scanned with OKEN Scanner

Se pune totuși întrebarea: cum se face că folosind rețeaua primitivă și egalitatea puterilor, care nu corespund realității în exemplul luat, a fost posibil să se obțină într-o formă corectă matricile $\mathbf{U}'$ și $\mathbf{z}'$?

Explicația de unde provine o astfel de nedumerire e următoarea:

Ținîndu-se seama de exemplul luat se stabilesc relațiile

$$\begin{aligned} \mathcal{V}_0 - \mathcal{V}_0' - \mathcal{U}_{g1} &= z_1 \mathcal{I}_1 \\ \mathcal{V}_0 - \mathcal{V}_0' + \mathcal{U}_{g2} &= z_2 \mathcal{I}_2 \\ \mathcal{V}_0 - \mathcal{V}_0' + \mathcal{U}_{g3} &= z_3 \mathcal{I}_3. \end{aligned} \tag{21}$$

Dacă se pun anumite condiții pentru tensiuni și impedanțe, spre exemplu

$$\mathcal{U}_{g1} + \mathcal{U}_{g2} + \mathcal{U}_{g3} = 0$$

$$z_1 = z_2 = z_3$$

se constată că rezultă $\mathcal{V}_0 - \mathcal{V}_0' = 0$ și în consecință pentru circuitul dat se obțin trei ecuații care ne conduc la relația matricială

$$\mathbf{U} = \mathbf{zI}.$$

Deoarece într-un astfel de caz apar două ecuații matriciale valabile pentru același circuit, rezultă că și puterea totală se poate exprima fie prin produsul $\mathbf{U}_t\mathbf{I}$ fie prin produsul $\mathbf{U}_t'\mathbf{I}'$.

Cînd ambele ecuații matriciale sînt valabile se constată ușor că trecerea de la o ecuație la cealaltă se poate face cu ajutorul matricei de conexiune, obținîndu-se relațiile

$$\mathbf{I} = \mathbf{CI}', \qquad \mathbf{U}' = \mathbf{C}_t\mathbf{U} \qquad \text{și} \qquad \mathbf{z}' = \mathbf{C}_t\mathbf{zC}.$$

De altfel numai datorită unui astfel de caz s-a ajuns la sugestia folosirii matricei de conexiune.

Deoarece matricile $\mathbf{U}$, $\mathbf{I}$, $\mathbf{z}$ au o formă fixă, independentă de felul circuitului și cum aceste matrici rămîn neschimbate, indiferent dacă tensiunile și impedanțele sînt sau nu sînt supuse la anumite condiții, rezultă că și legăturile stabilite între $\mathbf{U}'$ și $\mathbf{U}$ respectiv între $\mathbf{z}'$ și $\mathbf{z}$ prin intermediul matricei de conexiune, se mențin de asemenea într-o formă fixă.

Datorită acestui fapt se stabilesc legăturile dintre matricile $\mathbf{U}$, $\mathbf{I}$, $\mathbf{z}$ și matricile $\mathbf{U}'$, $\mathbf{I}'$, $\mathbf{z}'$ fără să fie necesar ca în prealabil să se stabilească condițiile în care relația matricială

$$\mathbf{U} = \mathbf{zI}$$

poate fi valabilă pentru circuitul dat.

Ca urmare matricile $\mathbf{U}$, $\mathbf{I}$, $\mathbf{z}$ pentru circuitul dat se pot prezenta fictive și în consecință, folosirea metodei celor trei artificii de calcul matricial o considerăm ca o metodă generală pentru determinarea matricilor $\mathbf{U}'$ și $\mathbf{z}'$.

Scanned with OKEN Scanner

Exemplu

În figura 30.283 se reprezintă o rețea electrică. Se cere să se determine ecuația matricială a curenților independenți.

Se determină relațiile între curenții dați și curenții independenți.

Ținîndu-se seama că în punctele de derivație numai cîte un curent poate fi necunoscut, se introduc $\mathcal{J}_2$, $\mathcal{J}_3$ și $\mathcal{J}_4$ ca curenți independenți între ei. De altfel din relația $n = p - (q - 1)$ se obțin trei curenți electrici independenți între ei.

Avem

$$\begin{array}{cccc} & p & q & r \\ \mathcal{J}_2 = & \mathcal{J}_p & & \\ \mathcal{J}_3 = & & \mathcal{J}_q & \\ \mathcal{J}_4 = & & & \mathcal{J}_r. \end{array} \tag{22}$$

Așa dar

$$\begin{aligned} \mathcal{J}_1 &= \mathcal{J}_p + \mathcal{J}_q \\ \mathcal{J}_5 &= \mathcal{J}_p + \mathcal{J}_r. \end{aligned} \tag{23}$$

Ca urmare

$$\begin{array}{cccc} & p & q & r \\ \mathcal{J}_1 = & \mathcal{J}_p & + \mathcal{J}_q & \\ \mathcal{J}_2 = & \mathcal{J}_p & & \\ \mathcal{J}_3 = & & \mathcal{J}_q & \\ \mathcal{J}_4 = & & & \mathcal{J}_r \\ \mathcal{J}_5 = & \mathcal{J}_p & + & \mathcal{J}_r \end{array} \qquad \mathbf{I} = \begin{vmatrix} \mathcal{J}_1 \\ \mathcal{J}_2 \\ \mathcal{J}_3 \\ \mathcal{J}_4 \\ \mathcal{J}_5 \end{vmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{matrix} - \begin{array}{ccc} p & q & r \\ \left|\begin{matrix} 1 & 1 & \\ 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \\ 1 & & 1 \end{matrix}\right| & \begin{matrix} p \\ q \\ r \end{matrix} & \left|\begin{matrix} \mathcal{J}_p \\ \mathcal{J}_q \\ \mathcal{J}_r \end{matrix}\right| \end{array} \tag{24}$$

Se obține

$$\mathbf{I} = \mathbf{CI}'.$$

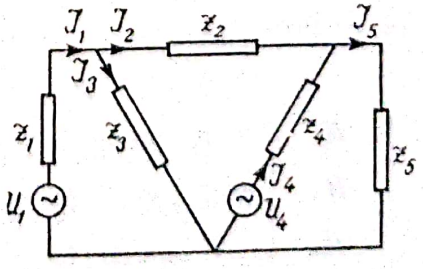


Fig. 30.283. O rețea cu sursele $\mathcal{U}_1$ și $\mathcal{U}_4$.

Scanned with OKEN Scanner

Cu ajutorul matricei de conexiune **C** se obţin

$$\mathbf{U}' = \mathbf{C}_t\mathbf{U} \qquad \mathbf{z}' = \mathbf{C}_t\mathbf{z}\mathbf{C}$$

astfel că ecuaţia matricială a circuitului devine

$$\mathbf{U}' = \mathbf{z}'\mathbf{I}'$$

în care apar curenţii independenţi între ei $\mathcal{I}_p$, $\mathcal{I}_q$ şi $\mathcal{I}_r$.

Avem

$$\mathbf{zC} = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{array}\!\!\begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{array} \\ \begin{bmatrix} \mathcal{Z}_1 & & & & \\ & \mathcal{Z}_2 & & & \\ & & \mathcal{Z}_3 & & \\ & & & \mathcal{Z}_4 & \\ & & & & \mathcal{Z}_5 \end{bmatrix} \end{array}\!\!\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} p & q & r \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 1 & \\ 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \\ 1 & & 1 \end{bmatrix} \end{array} = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{array}\!\!\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} p & q & r \end{array} \\ \begin{bmatrix} \mathcal{Z}_1 & \mathcal{Z}_1 & 0 \\ \mathcal{Z}_2 & 0 & 0 \\ 0 & \mathcal{Z}_3 & 0 \\ 0 & 0 & \mathcal{Z}_4 \\ \mathcal{Z}_5 & 0 & \mathcal{Z}_5 \end{bmatrix} \end{array}$$

$$\mathbf{z}' = \mathbf{C}_t\mathbf{z}\mathbf{C} = \begin{array}{c} \\ p \\ q \\ r \end{array}\!\!\begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 1 & & & 1 \\ 1 & & 1 & & \\ & & & 1 & 1 \end{bmatrix} \end{array}\!\!\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} p & q & r \end{array} \\ \begin{bmatrix} \mathcal{Z}_1 & \mathcal{Z}_1 & 0 \\ \mathcal{Z}_2 & 0 & 0 \\ 0 & \mathcal{Z}_3 & 0 \\ 0 & 0 & \mathcal{Z}_4 \\ \mathcal{Z}_5 & 0 & \mathcal{Z}_5 \end{bmatrix} \end{array} = \begin{array}{c} \\ p \\ q \\ r \end{array}\!\!\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} p & q & r \end{array} \\ \begin{bmatrix} \mathcal{Z}_1+\mathcal{Z}_2+\mathcal{Z}_5 & \mathcal{Z}_1 & \mathcal{Z}_5 \\ \mathcal{Z}_1 & \mathcal{Z}_1+\mathcal{Z}_3 & 0 \\ \mathcal{Z}_5 & 0 & \mathcal{Z}_4+\mathcal{Z}_5 \end{bmatrix} \end{array}$$

$$\mathbf{U}' = \mathbf{C}_t\mathbf{U} = \begin{array}{c} \\ p \\ q \\ r \end{array}\!\!\begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 1 & & & 1 \\ 1 & & 1 & & \\ & & & 1 & 1 \end{bmatrix} \end{array}\!\!\begin{array}{c} \\ \begin{bmatrix} \mathcal{U}_1 \\ 0 \\ 0 \\ \mathcal{U}_4 \\ 0 \end{bmatrix} \end{array} = \begin{bmatrix} \mathcal{U}_1 \\ \mathcal{U}_1 \\ \mathcal{U}_4 \end{bmatrix}$$

de unde se deduce

$$\begin{bmatrix} \mathcal{U}_1 \\ \mathcal{U}_1 \\ \mathcal{U}_4 \end{bmatrix} = \begin{array}{c} \\ p \\ q \\ r \end{array}\!\!\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} p & q & r \end{array} \\ \begin{bmatrix} \mathcal{Z}_1+\mathcal{Z}_2+\mathcal{Z}_5 & \mathcal{Z}_1 & \mathcal{Z}_5 \\ \mathcal{Z}_1 & \mathcal{Z}_1+\mathcal{Z}_3 & \\ \mathcal{Z}_5 & & \mathcal{Z}_4+\mathcal{Z}_5 \end{bmatrix} \end{array} \begin{bmatrix} \mathcal{I}_p \\ \mathcal{I}_q \\ \mathcal{I}_r \end{bmatrix}.$$

Folosind metoda obișnuită pentru rezolvarea circuitului, se obțin următoarele cinci ecuații pentru cei cinci curenți

$$\begin{aligned}
z_1\mathcal{J}_1 + z_3\mathcal{J}_3 &= \mathcal{U}_1\\
z_4\mathcal{J}_4 + z_5\mathcal{J}_5 &= \mathcal{U}_4\\
z_1\mathcal{J}_1 + z_2\mathcal{J}_2 + z_5\mathcal{J}_5 &= \mathcal{U}_1\\
\mathcal{J}_1 &= \mathcal{J}_2 + \mathcal{J}_3\\
\mathcal{J}_5 &= \mathcal{J}_2 + \mathcal{J}_4.
\end{aligned}$$

Înlocuind pe $\mathcal{J}_1$ și $\mathcal{J}_5$ prin curenții independenți $\mathcal{J}_2$, $\mathcal{J}_3$ și $\mathcal{J}_4$, rezultă

$$\begin{aligned}
z_1\mathcal{J}_2 + (z_1 + z_3)\mathcal{J}_3 + 0\cdot\mathcal{J}_4 &= \mathcal{U}_1\\
(z_1 + z_2 + z_5)\mathcal{J}_2 + z_1\mathcal{J}_3 + z_5\mathcal{J}_4 &= \mathcal{U}_1\\
z_5\mathcal{J}_2 + 0\cdot\mathcal{J}_3 + (z_4 + z_5)\mathcal{J}_4 &= \mathcal{U}_4
\end{aligned}$$

de unde se deduce aceeași ecuație matricială stabilită mai sus.

Aceleași ecuații rezultă și din aplicarea metodei circuitelor independente. În rețeaua din figura 30.283 avem: numărul de ramuri $p = 5$, numărul de noduri $q = 3$, deci numărul de curenți independenți între ei

$$n = p - (q - 1) = 3.$$

Acest număr corespunde și numărului de ochiuri din rețea.

Fixîndu-se curenții independenți între ei $\mathcal{J}_2$, $\mathcal{J}_3$ și $\mathcal{J}_4$ înseamnă că se formează trei ochiuri la care ramurile z_2, z_3 și z_4 nu apar comune la cîte două ochiuri diferite.

Ca urmare se formează următoarele trei ecuații

$$\begin{aligned}
z_{22}\mathcal{J}_2 + z_{23}\mathcal{J}_3 + z_{24}\mathcal{J}_4 &= \mathcal{U}_{22}\\
z_{32}\mathcal{J}_2 + z_{33}\mathcal{J}_3 + z_{34}\mathcal{J}_4 &= \mathcal{U}_{33}\\
z_{42}\mathcal{J}_2 + z_{43}\mathcal{J}_3 + z_{44}\mathcal{J}_4 &= \mathcal{U}_{44}
\end{aligned}$$

în care

$$\begin{aligned}
&\mathcal{U}_{22} = \mathcal{U}_1 && \mathcal{U}_{33} = \mathcal{U}_1 && \mathcal{U}_{44} = \mathcal{U}_4\\
&z_{22} = z_1 + z_2 + z_5 && z_{23} = z_{32} = z_1 && z_{24} = z_{42} = z_5\\
&z_{33} = z_1 + z_3 && z_{34} = z_{43} = 0 && z_{44} = z_4 + z_5.
\end{aligned}$$

Ecuațiile de mai sus devin

$$\begin{aligned}
(z_1 + z_2 + z_5)\mathcal{J}_2 + z_1\mathcal{J}_3 + z_5\mathcal{J}_4 &= \mathcal{U}_1\\
z_1\mathcal{J}_2 + (z_1 + z_3)\mathcal{J}_3 + 0\cdot\mathcal{J}_4 &= \mathcal{U}_1\\
z_5\mathcal{J}_2 + 0\cdot\mathcal{J}_3 + (z_4 + z_5)\mathcal{J}_4 &= \mathcal{U}_4.
\end{aligned}$$

Scanned with OKEN Scanner

30.3. REȚEAUA GENERALIZATĂ

Apariția rețelei generalizate se datorește aplicării *metodei tensiunilor echivalente* la determinarea curenților electrici dintr-un circuit electric.

Revenim la rețeaua electrică din figura 30.284.

Pentru fiecare ramură a rețelei date, se poate stabili un generator echivalent cu tensiunea $\mathcal{U}_{gi}$ și impedanța z_{gi} în așa fel încît conectat la impedanța z a ramurei respective, să apară curentul electric $\mathcal{I}$ din acea ramură.

Metoda determinării tensiunii $\mathcal{U}_{gi}$ și a impedanței interioare a generatorului z_{gi} poartă denumirea de metoda tensiunii echivalente, aplicată în paragraful 19.3.

În exemplul luat se obțin

$$\mathcal{U}_{gi1} = \frac{(\mathcal{U}_{g1} - \mathcal{U}_{g2})\, z_3 - (\mathcal{U}_{g3} - \mathcal{U}_{g1})\, z_2}{z_2 + z_3} \qquad z_{ig1} = \frac{z_2 z_3}{z_2 + z_3}$$

$$\mathcal{U}_{gi2} = \frac{(\mathcal{U}_{g2} - \mathcal{U}_{g3})\, z_1 - (\mathcal{U}_{g1} - \mathcal{U}_{g2})\, z_3}{z_1 + z_3} \qquad z_{ig2} = \frac{z_3 z_1}{z_1 + z_3}$$

$$\mathcal{U}_{gi3} = \frac{(\mathcal{U}_{g3} - \mathcal{U}_{g1})\, z_2 - (\mathcal{U}_{g2} - \mathcal{U}_{g3})\, z_1}{z_1 + z_2} \qquad z_{ig3} = \frac{z_1 z_2}{z_1 + z_2}.$$

Rețeaua generalizată din figura 30.284 se poate stabili numai după ce se cunosc tensiunile și impedanțele din rețeaua dată.

Nu trebuie să se confunde rețeaua generalizată, care corespunde rețelei date, cu rețeaua primitivă.

31. EFECTUL PELICULAR

Figura 31.285 reprezintă un conductor din Cu cu secțiunea un cerc, străbătut de un curent electric i.

Din figură se văd liniile de cîmp pentru densitatea de curent j și inducția magnetică $\mathfrak{B}$.

La curent electric alternativ atît j cît și $\mathfrak{B}$ apar ca funcțiuni de r. Sensurile pozitive pentru j și $\mathfrak{B}$ sînt legate prin regula burghiului.

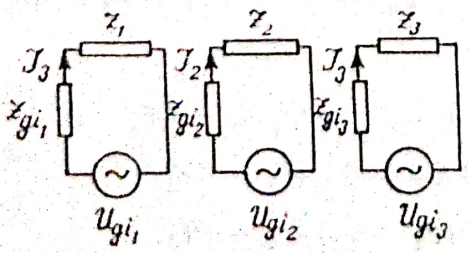


Fig. 30.284. Rețea generalizată.

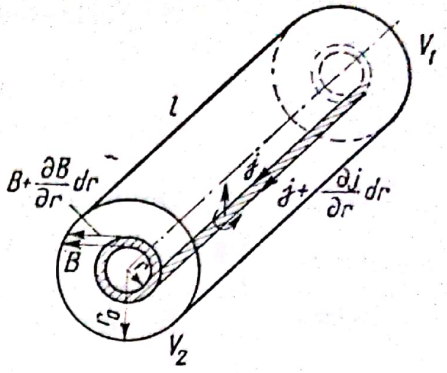


Fig. 31.285. Un conductor de Cu cu secțiunea un cerc străbătut de un curent electric i.

Legăturile dintre aceste cîmpuri sînt date de legile lui Maxwell.

Ne folosim de sistemul de măsuri electromagnetic, în care constanta universală „c" e înglobată în mărimile electrice.

Avem

$$\text{rot } \mathcal{H} = 4\pi j$$
$$\text{rot } \mathcal{E} = -\frac{\partial \mathcal{B}}{\partial t} \tag{1}$$

în care

$$j = \lambda \mathcal{E} \qquad \mathcal{B} = \mu_0 \mathcal{H}. \tag{2}$$

Se formează pentru suprafețele haşurate din figura 31.285, cu ajutorul ecuațiilor lui Maxwell din (1), transformări de integrale. Se transformă o integrală de suprafață într-o integrală de linie.

Se formează integrala de linie $\oint(\mathrm{d}l\mathcal{H})$ pentru o linie periferică care limitează suprafața haşurată între două cercuri cu razele r și $r + \mathrm{d}r$ ca în figura 31.286.

Se introduce elementul de linie $\mathrm{d}r$, care e parcurs odată în jos și a doua oară în sus, astfel că pentru $\mathrm{d}r$ se obține

$$H\,\mathrm{d}r - H\,\mathrm{d}r = 0$$

De altfel $\mathcal{H}$ e perpendicular pe $\mathrm{d}r$.

Se obține

$$\oint(\mathrm{d}l\mathcal{H}) = \left\{H + \frac{\partial H}{\partial r}\,\mathrm{d}r\right\} 2\pi(r + \mathrm{d}r) - H \cdot 2\pi r =$$
$$= H \cdot 2\pi \mathrm{d}r + \frac{\partial H}{\partial r}\,\mathrm{d}r \cdot 2\pi r = 4\pi\lambda E \cdot 2\pi r \mathrm{d}r \tag{3}$$

de unde se deduce

$$\frac{H}{r} + \frac{\partial H}{\partial r} = 4\pi\lambda E. \tag{4}$$

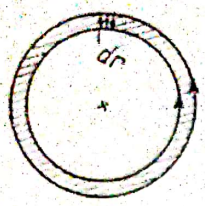


Fig. 31.286. Introducerea lui *dr* pentru a efectua suprafața haşurată de o linie închisă.

Se formează

$$\frac{1}{r}\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}(rH) = \frac{H}{r} + \frac{\partial H}{\partial r} = 4\pi J = 4\pi\lambda E. \tag{5}$$

Dacă se ia în considerare numai suprafața haşurată din figura 31.287, se formează integrala de linie $\oint(\mathrm{d}/\mathcal{K})$ pentru linia periferică a suprafeței haşurate.

Se obține

$$\left(H + \frac{\partial H}{\partial r}\,\mathrm{d}r\right)\Delta l - H\Delta l = 4\pi\lambda E\Delta l\mathrm{d}r \tag{6}$$

de unde se deduce

$$\frac{\partial H}{\partial r} = 4\pi\lambda E \tag{7}$$

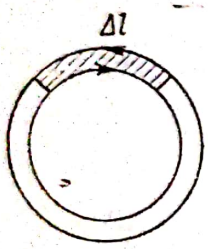


Fig. 31.287. Suprafața haşurată cu un arc de cerc de lungime Δl.

în care s-a neglijat $2H\mathrm{d}r$, pentru elementul de linie $\mathrm{d}r$, $\mathcal{K}$ fiind perpendicular pe $\mathrm{d}r$.

Cînd J e constant în raport cu timpul, atunci şi H e constant în raport cu timpul.

În cazul curentului electric continuu, J este constant în secțiunea conductorului. Se obține

$$2\pi r_i H_i = 4\pi J \cdot 2\pi\,\frac{r_i^2}{2}$$

sau

$$H_i = 2\pi J r_i \tag{8}$$

H_i crește proporțional cu r_i.

În exteriorul conductorului se obține

$$2\pi r_e H_e = 4\pi J \cdot 2\pi\,\frac{r_0^2}{2}$$

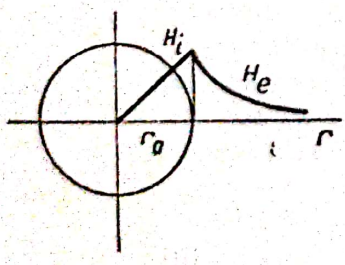


Fig. 31.288. Variația lui H_i în interiorul secțiunii conductorului şi a lui H_e în exteriorul conductorului, în funcție de r pentru $J = \text{const}$.

de unde se deduce

$$r_e H_e = 2i \tag{9}$$

în care

$$i = J\pi r_0^2.$$

În exteriorul conductorului H_e variază în funcție de r_e după o hiperbolă echilaterală (v. fig. 31.288).

Ecuația diferențială (4) e satisfăcută atît pentru $H_i = 2\pi J r_i$ cît și pentru $H_e = 2i/r_e$.

Pentru $H_i = 2\pi J r_i$ se obține

$$\frac{H_i}{r_i} + \frac{\partial H_i}{\partial r_i} = 2\pi J + 2\pi J = 4\pi J$$

iar pentru $H_e = 2i/r_e$ avem

$$\frac{2i}{r_e^2} - \frac{2i}{r_e^2} = 0.$$

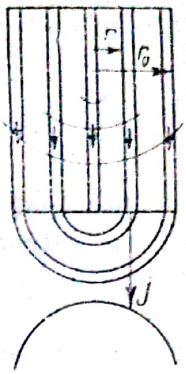


Fig. 31.289. Cilindrul de Cu, descompus în tuburi cilindrice.

Într-adevăr, în exteriorul conductorului avem $J = 0$.

Ecuația diferențială (7) e mai puțin exactă, ea nu satisface condițiile de mai sus.

Conductorul cilindric de Cu e descompus în figura 31.289 într-un fir de Cu pe axul cilindrului și o infinitate de cilindri cu pereți de grosime dr. Liniile cîmpului inducției $\mathfrak{B}$, care sînt cercuri, înlănțuie tuburile de Cu ca în figură.

Se constată că firul de Cu e înlănțuit de toate liniile de cîmp. Tuburile de Cu, pe măsură ce își măresc raza, devin înlănțuite de mai puține linii de cîmp.

Trecem la a doua lege a lui Maxwell

$$\text{rot } \mathfrak{E} = -\frac{\partial \mathfrak{B}}{\partial t}.$$

Din

$$\int (\mathrm{d}_\perp \text{rot } \mathfrak{E}) = \oint (\mathrm{d}l \mathfrak{E}) = -\frac{\partial}{\partial t}\int (\mathrm{d}_\perp \mathfrak{B})$$

se obține pentru suprafața hașurată de-a lungul liniei l din figura 31.285.

$$El - \left(E + \frac{\partial E}{\partial r}\,\mathrm{d}r\right) l = -\mu_0 \frac{\partial H}{\partial t} l\,\mathrm{d}r \tag{10}$$

de unde se obține

$$\frac{1}{\mu_0}\,\frac{\partial E}{\partial r} = \frac{\partial H}{\partial t}. \tag{11}$$

Ecuația diferențială (11) ne arată că atunci cînd densitatea de curent J este constantă în timp, deci și H constant în timp, E respectiv J nu poate să apară în funcție de r. Numai în cazul cînd curentul electric apare ca o funcție de timp, apare E ca funcție de r.

Să considerăm mai întîi cazul cînd ne folosim numai de ecuațiile diferențiale (7) și (11). Avem

$$\begin{aligned} \frac{\partial H}{\partial r} &= 4\pi\lambda E \\ \frac{\partial H}{\partial t} &= \frac{1}{\mu_0}\,\frac{\partial E}{\partial r} \end{aligned} \tag{12}$$

ceea ce ne conduce la o ecuaţie diferenţială numai în E în forma

$$\frac{1}{\mu_0}\frac{\partial^2 E}{\partial r^2} = 4\pi\lambda\frac{\partial E}{\partial t}. \tag{13}$$

S-a luat pentru $\partial H/\partial r$ ecuaţia diferenţială (7), care e mai puţin exactă. Se introduce E în forma complexă

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_c e^{\gamma^* r} e^{j\omega t} \tag{14}$$

Să nu se confunde simbolul $\mathcal{E}$ cu $\mathfrak{E}$ care exprimă un vector. Ecuaţia diferenţială (13) în forma complexă ia forma

$$\frac{\partial^2 \mathcal{E}}{\partial r^2} = 4\pi\lambda\mu_0\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial t}. \tag{15}$$

În mod analog se introduce

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_c e^{\gamma^* r} e^{j\omega t} \tag{16}$$

în care

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t} = \frac{1}{\mu_0}\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial r}$$

astfel că

$$\mathcal{H}\,\mathrm{j}\,\omega = \frac{1}{\mu_0}\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial r}$$

sau

$$\mathcal{H} = \frac{1}{\mu_0 \mathrm{j}\omega}\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial r}. \tag{17}$$

Se determină mai întîi $\mathcal{E}$.
Din (15) se obţine

$$\frac{\partial^2 \mathcal{E}}{\partial r^2} = \gamma^{*2}\mathcal{E} = 4\pi\lambda\mu_0\,\mathrm{j}\,\omega\mathcal{E} \tag{18}$$

în care

$$\gamma^{*2} = (\beta^* + \mathrm{j}\,\alpha^*)^2 = \beta^{*2} - \alpha^{*2} + 2\,\mathrm{j}\,\alpha^*\beta^* = 4\pi\lambda\mu_0\,\mathrm{j}\,\omega$$

de unde se deduc

$$\beta^{*2} = \alpha^{*2} \qquad \beta^* = \alpha^*$$

$$2\,\mathrm{j}\,\alpha^*\beta^* = 2\,\mathrm{j}\,\alpha^{*2} = 4\pi\lambda\mu_0\,\mathrm{j}\,\omega$$

astfel că

$$\alpha^* = 2\pi\sqrt{\lambda\mu_0 f}. \tag{19}$$

Avem

$$\lambda_{Cu}^{Sm/cm} = \frac{1}{\rho_{Cu} \cdot 10^{-4}} = 57 \cdot 10^4$$

$\lambda_{Al} = 35 \cdot 10^4$, la temperatura de 0°C.

$$L^H = 4\pi \cdot 10^{-9} \frac{W^2}{R_m} = 4\pi \cdot 10^{-9} \frac{W^2}{l} \mu_0 S$$

în care $\mu_0 \cdot 10^{-9}$ H/cm.

Pentru $f = 50$ Hz și $\lambda = 57 \cdot 10^4$ se obține

$$\alpha^* = 2\pi \sqrt{57 \cdot 10^4 \cdot 10^{-9} \cdot 50} = 1{,}06.$$

Pentru $f = 10\,000$ Hz apare $\alpha^* = 15$. Ca urmare γ^* devine

$$\gamma^* = \alpha^*(1 + j) = \sqrt{2}\,\alpha^* e^{j\frac{\pi}{4}}. \tag{20}$$

Deoarece din figura 31.289 se obține pentru $r = 0$ $\mathscr{E}_{minim}$, se introduc

$$\mathscr{E} = (\mathscr{E}_{c1} e^{\gamma^* r} + \mathscr{E}_{c2} e^{-\gamma^* r}) e^{j\omega t} \tag{21}$$

$$\left(\frac{\partial \mathscr{E}}{\partial r}\right)_{r=0} = 0 = (\mathscr{E}_{c1} - \mathscr{E}_{c2})\, e^{j\omega t} \tag{22}$$

astfel că

$$\mathscr{E}_{c1} = \mathscr{E}_{c2}$$

$$\mathscr{E} = \mathscr{E}_c (e^{\gamma^* r} + e^{-\gamma^* r})\, e^{j\omega t}$$

sau

$$\mathscr{E} = \mathscr{E}_c\, 2 \operatorname{ch} \gamma^* r\, e^{j\omega t}. \tag{23}$$

Din figura 31.289 se vede că pe măsură ce tuburile sînt înlănțuite de mai puține linii ale inducției magnetice, tensiunea electromagnetică indusă devine mai mică. De aci rezultă că densitatea curentului electric j e mai mare către extremitatea conductorului, de unde vine denumirea de efect pelicular.

Determinarea constantei $\mathscr{E}_c$.

Prin aplicarea legii circuitului magnetic pentru linia periferică a conductorului se obține

$$2\pi r_0 H_0 = 4\pi I_{elm} \sqrt{2} \sin \omega t \tag{24}$$

H_0 în forma complexă ia forma

$$\mathscr{H}_0 = \frac{2 I_{elm} \sqrt{2}\, e^{j\omega t}}{r_0}. \tag{25}$$

Din

$$\frac{\partial \mathcal{X}_0}{\partial t} = \frac{2I_{elm}\sqrt{2}\,j\omega\,e^{j\omega t}}{r_0} = \frac{1}{\mu_0}\left(\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial r}\right)_{r=0}$$

se obține

$$\frac{2I_{elm}\sqrt{2}\,j\omega e^{j\omega t}}{r_0} = \frac{1}{\mu_0}\,\mathcal{E}_c\gamma^*(e^{\gamma^* r_0} - e^{-\gamma^* r_0})\,e^{j\omega t}$$

de unde se deduce $\mathcal{E}_c$

$$\mathcal{E}_c = \frac{2I_{elm}\sqrt{2}\,j\omega\mu_0}{r_0\gamma^* 2\,\mathrm{sh}\,\gamma^* r_0} = \frac{I_{elm}\omega\mu_0\,e^{j\frac{\pi}{4}}}{r_0\alpha^*\,\mathrm{sh}\,\gamma^* r_0} \tag{26}$$

astfel că

$$\mathcal{E} = \frac{2I_{elm}\omega\mu_0\,e^{j\frac{\pi}{4}}}{r_0\alpha^*\,\mathrm{sh}\,\gamma^* r_0}\,\mathrm{ch}\,\gamma^* r\,e^{j\omega t}. \tag{27}$$

Din

$$\frac{\partial \mathcal{X}}{\partial t} = \mathcal{X}\,j\omega = \frac{1}{\mu_0}\,\mathcal{E}_c\gamma^*\,2\,\mathrm{sh}\,\gamma^* r e^{j\omega t}$$

se obține

$$\mathcal{X} = \frac{I_{elm}\sqrt{2}\,2\,\mathrm{sh}\,\gamma^* r}{r_0\,\mathrm{sh}\,\gamma^* r_0}\,e^{j\omega t}. \tag{28}$$

Pentru a exprima valoarea momentană a intensității cîmpului electric E în forma obișnuită, se formează

$$\mathrm{ch}\,\gamma^* r = \sqrt{\frac{1}{2}(\mathrm{ch}\,2\beta^* r + \cos 2\alpha^* r)}\,e^{j\theta_c};\quad \mathrm{tg}\,\theta_c = \frac{\sin\alpha^* r\,\mathrm{sh}\,\beta^* r}{\cos\alpha^* r\,\mathrm{ch}\,\beta^* r}$$

$$\mathrm{sh}\,\gamma^* r_0 = \sqrt{\frac{1}{2}(\mathrm{ch}\,2\beta^* r_0 - \cos 2\alpha^* r_0)}\,e^{j\theta_s};\quad \mathrm{tg}\,\theta_s = \frac{\sin\alpha^* r_0\,\mathrm{ch}\,\beta^* r_0}{\cos\alpha^* r_0\,\mathrm{sh}\,\beta^* r_0}.$$

Avem

$$E = \frac{2I_{elm}\omega\mu_0\sqrt{\frac{1}{2}(\mathrm{ch}\,2\beta^* r + \cos 2\alpha^* r)}}{r_0\,\alpha^*\sqrt{\frac{1}{2}(\mathrm{ch}\,2\beta^* r_0 - \cos 2\alpha^* r_0)}}\sin\left(\omega t + \frac{\pi}{4} + \theta_c - \theta_s\right) =$$

$$= E_{max}(r)\sin\left(\omega t + \frac{\pi}{4} + \theta_c - \theta_s\right). \tag{29}$$

Scanned with OKEN Scanner

Efectul Joule-Lenz P_c.

Se determină efectul Joule-Lenz mijlociu în raport cu o perioadă

$$P_c = \frac{1}{T}\int_0^T \mathrm{d}t \int_0^{r_0} (\lambda E\, 2\pi r\, \mathrm{d}r)^2 \frac{l}{\lambda\, 2\pi r\, \mathrm{d}r} = \frac{1}{T}\int_0^T \mathrm{d}t \int_0^{r_0} \lambda E^2\, 2\pi r\, \mathrm{d}r l.$$

Dat fiindcă E apare ca o funcţie sinusoidală de timp, se obţine

$$\frac{1}{T}\int_0^T \mathrm{d}t E^2 = \frac{E_{max}^2}{2}.$$

Ca urmare P_c devine

$$P_c = I^2 R_a = \int_0^{r_0} \frac{E_{max}^2}{2} \lambda\, 2\pi r\, \mathrm{d}r l \tag{30}$$

în care R_a reprezintă rezistenţa conductorului la curent alternativ.

În cazul curentului electric continuu se obţine

$$P_c = \lambda E^2\, 2\pi \frac{r_0^2}{2} l = \lambda^2 E^2 S^2 \frac{l}{\lambda S} = I^2 R_c.$$

Cînd valoarea efectivă a curentului alternativ e egală cu valoarea efectivă a curentului electric continuu, se obţine $R_a > R_c$.

În figura 31.290 se ia ca exemplu cazul cînd densitatea curentului J variază liniar cu r.

Avem

$$J = J' + \frac{J'' - J'}{r_0} r$$

ca valori efective.

Fie J_c valoarea mijlocie

$$J_c = \frac{J' + J''}{2}.$$

Se cere să se determine efectul Joule-Lenz P_c

$$P_c = \int_0^{r_0} J^2\, 2\pi r\, \mathrm{d}r \rho l.$$

Se formează

$$J^2 = J'^2 + \left(\frac{r}{r_0}\right)^2 (J''^2 + J'^2 - 2J'J'') + 2\frac{r}{r_0} J'(J'' - J')$$

sau

$$J^2 = J'^2\left(1 + \left(\frac{r}{r_0}\right)^2 - \frac{2r}{r_0}\right) + J''^2\left(\frac{r}{r_0}\right)^2 + 2J'J''\left(\frac{r}{r_0} - \left(\frac{r}{r_0}\right)^2\right).$$

Din

$$J'^2 + J''^2 + 2J'J'' = 4J_c^2$$

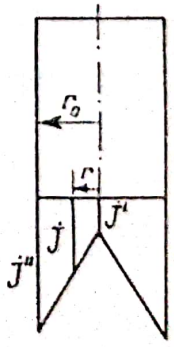


Fig. 31.290. Densitatea J creşte linear.

se obține

$$2J'J'' = 4J_c^2 - J'^2 - J''^2$$

Ca urmare

$$J^2 = J'^2\left(1 + 2\left(\frac{r}{r_0}\right)^2 - 3\frac{r}{r_0}\right) + J''^2\left(2\left(\frac{r}{r_0}\right)^2 - \frac{r}{r_0}\right) + J_c^2\left(4\frac{r}{r_0} - 4\left(\frac{r}{r_0}\right)^2\right)$$

Efectul Joule-Lenz P_c ia forma

$$P_c = \int_0^{r_0} J^2 2\pi r\, dr\, \rho l = 2\pi\rho l\left\{J'^2\left(\frac{r_0^2}{2} + \frac{r_0^2}{2} - r_0^2\right) + J''^2\left(\frac{r_0^2}{2} - \frac{r_0^2}{3}\right) + \right.$$

$$\left. + J_c^2\left(4\frac{r_0^2}{3} - r_0^2\right)\right\} = \left(J''^2\frac{1}{3} + J_c^2\frac{2}{3}\right)\frac{\rho l}{S}S^2 = \left(\nu^2\frac{1}{3} + \frac{2}{3}\right)I^2R_c = I^2R_a$$

în care

$$J'' = \nu J_c, \qquad J_cS = I.$$

Se obține

$$\left(\nu^2\frac{1}{3} + \frac{2}{3}\right)R_c = kR_c = R_a$$

Pentru $\nu = 1$ se obține $J'' = J_c = J'$, de unde rezultă $k = 1$ deci $R_c = R_a$.
Spre exemplu pentru $\nu > 1$, $\nu = 1{,}1$, se obține: $k = 1{,}07$.
În realitate densitatea variază după $\mathrm{ch}\,\gamma^* r$, care mărește factorul k.
Se trece la determinarea lui E cînd se ia în considerare ecuația diferențială exactă (4).
Ne folosim de ecuațiile diferențiale

$$\frac{H}{r} + \frac{\partial H}{\partial r} = 4\pi\lambda E$$

$$\frac{\partial H}{\partial t} = \frac{1}{\mu_0}\frac{\partial E}{\partial r}.$$

Se formează

$$4\pi\lambda\frac{\partial E}{\partial t} - \frac{1}{r}\frac{\partial H}{\partial t} = \frac{\partial^2 H}{\partial r\partial t} = \frac{1}{\mu_0}\frac{\partial^2 E}{\partial r^2}$$

astfel că

$$\frac{\partial^2 E}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial E}{\partial r} - 4\pi\lambda\mu_0\frac{\partial E}{\partial t} = 0. \qquad (31)$$

Ecuația diferențială (31) e cunoscută în literatură sub denumirea de ecuația diferențială a lui Bessel (vezi Adausul matematic partea II-a).

Scanned with OKEN Scanner

După cum se vede ecuația diferențială (31) diferă de ecuația diferențială (13) prin apariția termenului

$$\frac{1}{r}\frac{\partial E}{\partial r}.$$

Ecuația diferențială a lui Bessel de categoria întîia și de ordinul zero apare în forma

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}\xi^2} J_0(\xi) + \frac{1}{\xi}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\xi} J_0(\xi) + J_0(\xi) = 0.$$

Se introduce $\xi = kr_{cm}$ în care k are dimensiunea de 1/cm. Ca urmare ecuația diferențială a lui Bessel de categoria întîi și de ordinul zero ia forma

$$\frac{\mathrm{d}^2}{k^2\,\mathrm{d}r^2} J_0(kr) + \frac{1}{rk^2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r} J_0(kr) + J_0(kr) = 0$$

sau

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}r^2} J_0(kr) + \frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r} J_0(kr) + k^2 J_0(kr) = 0. \tag{32}$$

Deoarece E ca funcție de timp apare ca o funcție sinusoidală, se recomandă să introducem pe E în forma complexă

$$\mathscr{E} = \mathscr{E}_c J_0(kr)\, \mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}$$

astfel că

$$4\pi\lambda\mu_0 \frac{\partial \mathscr{E}}{\partial t} = \mathrm{j}\,\omega 4\pi\lambda\mu_0 \mathscr{E}_c J_0(kr)\, \mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}$$

în care se introduce

$$k^2 = -4\pi\lambda\mu_0\,\mathrm{j}\,\omega. \tag{33}$$

Ca urmare ecuația diferențială (31) în forma complexă devine

$$\frac{\partial^2 \mathscr{E}}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial \mathscr{E}}{\partial r} + k^2 \mathscr{E} = 0. \tag{34}$$

Se vede că ecuația diferențială (34) reprezintă o ecuație diferențială a lui Bessel ca aceea din (32).

Din

$$\mu_0 \frac{\partial H}{\partial t} = \frac{\partial E}{\partial r}$$

sau în forma complexă

$$\mu_0 \frac{\partial \mathscr{H}}{\partial t} = \frac{\partial \mathscr{E}}{\partial r} \tag{35}$$

pentru

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_c J_0(kr)\ e^{j\omega t}$$

se obține

$$\frac{\partial \mathcal{E}}{k\partial r} = \mathcal{E}_c \frac{\partial}{k\partial r} J_0(kr)\ e^{j\omega t}. \tag{36}$$

Deoarece funcția Bessel de speța I (categoria I-a) și de ordinul 1 se reprezintă în forma

$$J_1(\xi) = -\frac{d}{d\xi} J_0(\xi) \tag{37}$$

sau

$$J_1(kr) = -\frac{d}{kdr} J_0(kr)$$

rezultă

$$\frac{\partial \mathcal{E}}{k\partial r} = -\mathcal{E}_c J_1(kr)\ e^{j\omega t}$$

astfel că

$$\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial r} = -\mathcal{E}_c k J_1(kr)\ e^{j\omega t}. \tag{38}$$

Ca urmare din (34) rezultă

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_c J_1(kr)\ e^{j\omega t}$$

$$\mu_0 \mathcal{H}_c\, j\,\omega J_1(kr)\ e^{j\omega t} = -\mathcal{E}_c k J_1(kr)\ e^{j\omega t} \tag{39}$$

de unde se deduce

$$\mathcal{H}_c = -\mathcal{E}_c \frac{k}{j\,\omega\mu_0}. \tag{40}$$

Pe de altă parte din (33) rezultă

$$-\frac{k}{\mu_0\, j\,\omega} = \frac{4\pi\lambda}{k}$$

astfel că

$$\mathcal{H}_c = -\frac{\mathcal{E}_c k}{\mu_0\, j\,\omega} = \frac{\mathcal{E}_c 4\pi\lambda}{k}. \tag{41}$$

Intensitatea cîmpului magnetic în forma complexă $\mathcal{H}$ devine

$$\mathcal{H} = \frac{\mathcal{E}_c 4\pi\lambda}{k} J_1(kr)\ e^{j\omega t}. \tag{42}$$

Scanned with OKEN Scanner

Determinarea constantei $\mathscr{E}_c$.

Din

$$2\pi r_0 \mathscr{H}_0 = 4\pi I \sqrt{2}\, e^{j\omega t}$$

se obține

$$2\pi r_0 \frac{\mathscr{E}_c 4\pi\lambda}{k} J_0(kr_0)\, e^{j\omega t} = 4\pi I \sqrt{2}\, e^{j\omega t}$$

astfel că

$$\mathscr{E}_c = \frac{k}{4\pi\lambda} \frac{2I\sqrt{2}}{r_0 J_1(kr_0)}. \tag{43}$$

Intensitatea cîmpului electric $\mathscr{E}$ în forma complexă ia forma:

$$\mathscr{E} = \frac{k}{4\pi\lambda} \frac{2I\sqrt{2}}{r_0 J_1(kr_0)} J_0(kr)\, e^{j\omega t}. \tag{44}$$

Formînd integrala $\int (dl\ \mathscr{E})$ în conductorul din figura 31.285 se obține

$$\int (dl\mathscr{E}) = V_1 - V_2 - Li\frac{di}{dt} = iR$$

iar pentru o linie la exteriorul conductorului avem $\int (dl\ \mathscr{E}) = V_1 - V_2$.

Ca urmare, efectuînd integrala $\int (dl\,\mathscr{E})$ cu $\mathscr{E}$ în forma complexă, se obține

$$\mathscr{E}_0 l = \frac{kl}{4\pi\lambda} \frac{2I\sqrt{2}}{r_0 J_1(kr_0)} J_0(kr_0)\, e^{j\omega t} = I\sqrt{2}(j\omega l + R)\, e^{j\omega t} \tag{45}$$

de unde rezultă

$$\frac{kl}{4\pi\lambda} \frac{2J_0(kr_0)}{r_0 J_1(kr_0)} = j\omega l + R. \tag{46}$$

Avem

$$\frac{J_0(kr_0)}{J_1(kr_0)} = \frac{1 - \frac{k^2 r_0^2}{4} + \frac{1}{4}\frac{k^4 r_0^4}{2^4}}{\frac{1}{2}kr_0 - \frac{k^3 r_0^3}{2^4} + \frac{1}{6}\frac{k^5 r_0^5}{2^6}} = \frac{1}{\frac{1}{2}kr_0} \frac{1 - \frac{k^2 r_0^2}{4} + \frac{1}{4}\frac{k^4 r_0^4}{2^4}}{1 - \frac{k^2 r_0^2}{2^3} + \frac{1}{6}\frac{k^4 r_0^4}{2^5}}$$

astfel că

$$j\omega L_i + R = \frac{l}{\lambda\pi r_0^2} \frac{1 - \frac{k^2 r_0^2}{4} + \frac{1}{4}\frac{k^2 r_0^4}{2^4}}{1 - \frac{k^2 r_0^2}{2^3} + \frac{1}{6}\frac{k^4 r_0^4}{2^5}} \tag{47}$$

în care

$$\frac{l}{\lambda \pi r_0^2} = R_c.$$

R_c reprezintă rezistența electrică în cazul curentului continuu.

În (47) apare factorul care e înmulțit cu R_c în forma

$$\frac{1 - \frac{k^2 r_0^2}{4} + \frac{1}{4}\frac{k^4 r_0^4}{2^4}}{1 - \frac{k^2 r_0^2}{2^3} + \frac{1}{6}\frac{k^4 r_0^4}{2^5}} = \frac{1 - \frac{1}{4}\frac{a^2 r_0^4}{2^4} + \frac{a r_0^2}{4}\,\mathrm{j}}{1 - \frac{1}{6}\frac{a^2 r_0^4}{2^5} + \frac{a r_0^2}{2^3}\,\mathrm{j}} \tag{48}$$

în care

$$a = 4\pi\mu_0\lambda\omega$$

$$k^2 = -a\,\mathrm{j}$$

$$k^4 = -a^2.$$

Ținîndu-se seama de un raport în forma

$$\frac{\alpha_1 + \mathrm{j}\,\beta_1}{\alpha_2 + \mathrm{j}\,\beta_2} = \frac{(\alpha_1\alpha_2 + \beta_1\beta_2) + \mathrm{j}(\beta_1\alpha_2 - \alpha_1\beta_2)}{\alpha_2^2 + \beta_2^2}$$

la care numitorul a devenit un număr real, raportul (48) ia forma

$$\frac{\left(1 - \frac{1}{4}\frac{a^2 r_0^4}{2^4}\right)\left(1 - \frac{1}{6}\frac{a^2 r_0^4}{2^5}\right) + \frac{a^2 r_0^4}{2^5}}{\left(1 - \frac{1}{6}\frac{a^2 r_0^4}{2^5}\right)^2 + \frac{a^2 r_0^4}{2^6}} + \mathrm{j}\,\frac{\left(1 - \frac{1}{6}\frac{a^2 r_0^4}{2^5}\right)\frac{a r_0^2}{4} - \left(1 - \frac{1}{4}\frac{a^2 r_0^4}{2^4}\right)\frac{a r_0^2}{2^3}}{\left(1 - \frac{1}{6}\frac{a^2 r_0^4}{2^5}\right)^2 + \frac{a^2 r_0^4}{2^6}}. \tag{49}$$

Cînd se neglijează termeni de forma

$$\Delta^6 = \frac{1}{4}\frac{a^3 r_0^6}{2^7}$$

față de 1, atunci suma exprimată în (49) ne dă

$$\frac{1 + \frac{2}{3}\Delta^4}{1 + \frac{1}{3}\Delta^4} + \mathrm{j}\,\frac{\Delta^2}{1 + \frac{1}{3}\Delta^4}$$

în care

$$\Delta = \frac{\sqrt{a}\, r_0}{\sqrt{8}} = \frac{1}{\sqrt{8}} \sqrt{4\pi\mu_0\lambda\omega}\; r_0.$$

Ca urmare rezistența pentru curent alternativ, față de rezistența la curent continuu, devine

$$R = R_c \frac{1 + \frac{2}{3}\Delta^4}{1 + \frac{1}{3}\Delta^4} = R_c\left(1 + \frac{2}{3}\Delta^4\right)\left(1 + \frac{1}{3}\Delta^4\right)^{-1} \cong R_c\left(1 + \frac{2}{3}\Delta^4\right)\left(1 - \frac{1}{3}\Delta^4\right) =$$

$$= R_c\left(1 + \frac{1}{3}\Delta^4\right)$$

iar

$$\omega L_i = R_c \frac{\Delta^2}{1 + \frac{1}{3}\Delta^4} \cong R_c\Delta^2\left(1 - \frac{1}{3}\Delta^4\right).$$

Cînd termenul $\Delta^6 = \frac{1}{4}\frac{a^3 r_0^5}{2^7}$ nu e neglijabil față de 1, se obține

$$R = R_c \frac{1 + \frac{2}{3}\Delta^4 + \frac{1}{3}\Delta^8}{1 + \frac{1}{3}\Delta^4 - \frac{1}{3^2}\Delta^8} \qquad \omega L_i = R_c \frac{\Delta^2 + \frac{\Delta^6}{3}}{1 + \frac{1}{3}\Delta^4 + \frac{1}{3^2}\Delta^8}.$$

Prin L_i se înțelege selfinducția datorită numai cîmpului inducției magnetice din spațiul ocupat de metal.

Figura 31.291 reprezintă pe R/R_c și $\omega L_i/R_c$ în funcție de Δ.

Se vede că pentru $\Delta = 1$, $R/R_c \cong 1{,}5$, iar pentru $\Delta = 2$, $R/R_c = 2{,}3$.

În cazul cînd s-a considerat intensitatea cîmpului electric $\mathcal{E}$ ca o funcție exponențială, s-a obținut

$$\beta^* = \alpha^* = \sqrt{2\pi\mu_0\lambda\omega}.$$

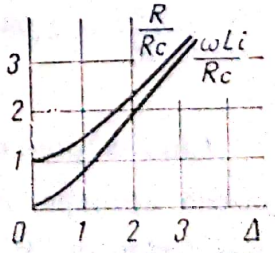
În comparație cu Δ se obține

$$\Delta = \frac{r_0}{2}\alpha^*$$

În exemplul luat, cu mărimile specifice

$$\rho^{\Omega mm^2/m} = 0{,}0175 \quad \mu_0 \cdot 10^{-9} = 10^{-9} \quad f = 50 \text{ Hz}$$

s-a obținut $\alpha^* = 1{,}06$.



31.291. $\frac{R}{R_c}$ și $\frac{\omega L_i}{R_c}$ în funcție de Δ.

În acest caz avem

$$\Delta = \frac{r_0}{2} 1{,}06.$$

În literatură se mai întîlnește μ_0 raționalizat în forma

$$\mu_0' = 4\pi\mu_0.$$

În cazul acesta Δ devine

$$\Delta = \frac{r_0}{\sqrt{8}} \sqrt{\mu_0'\lambda\omega}.$$

Exemplu:
Fie

$$\lambda = 57 \cdot 10^{4\,S/cm}; \quad \mu_0 = 10^{-9\,H/cm}; \quad r_0 = 0{,}2 \text{ cm}; \; l = 1 \text{ km};$$

$$f = 40\,000 \text{ Hz}.$$

Se obține

$$R_c^{\Omega} = \frac{l}{4\pi r_0^2} = \frac{10^5}{57 \cdot 10^4 \cdot \pi \cdot 0{,}2^2} = 1{,}4\ \Omega$$

$$\Delta = \frac{1{,}2}{\sqrt{8}} \sqrt{4 \cdot \pi \cdot 57 \cdot 10^4 \cdot 10^{-9} \cdot 2\pi \cdot 40\,000} = 0{,}2 \cdot \pi \cdot 4{,}77 = 3$$

$$\frac{R}{R_c} = 3{,}27; \quad R = 1{,}4 \cdot 3{,}27 = 4{,}57\ \Omega$$

$$\frac{\omega L_i}{R_c} = 2{,}984; \; \omega L_i = 4{,}18\Omega; \; L_i = \frac{4{,}18}{6{,}28 \cdot 40\,000} = 1{,}66 \cdot 10^{-5} \text{ H}.$$

Cînd k posedă valori mari (frecvențe mari) se constată că $\frac{\partial^2}{\partial r^2} J_0(kr)$ posedă aproape aceeași valoare ca $-k^2 J_0(kr)$, ceea ce ne îndreptățește să considerăm în (31) pe $\frac{1}{r} \frac{\partial E}{\partial r}$ neglijabil. Ca urmare ecuația diferențială care corespunde funcției lui Bessel se reduce la ecuația diferențială (13) care ne-a condus la $\mathcal{E}$ în forma exponențială.

31.1. EFECTUL PELICULAR LA CONDUCTORII DIN CRESTĂTURA UNEI MAȘINI ELECTRICE

În figura 31.292 se reprezintă două conductoare alăturate în crestătura unei mașini electrice, conectate în paralel.

Rîndul de jos ($p = 1$) cu rîndul de sus ($p = 2$) sînt conectate în serie.

La stabilirea ecuațiilor diferențiale pentru J_x și H_x, ne folosim de legile lui Maxwell, cu ajutorul cărora se obțin transformări de integrale pentru suprafețele haşurate; din integrale de suprafață în integrale de linie.

Prin aplicarea legii circuitului magnetic pentru linia periferică a suprafeței haşurate din figură, se obține

$$\left\{\left(H_x + \frac{\partial H_x}{\partial x}\,\mathrm{d}x\right) - H_x\right\} a = 4\pi J_x \mathrm{d}x b$$

de unde se deduce

$$\frac{\mathrm{d}H_x}{\mathrm{d}x} = 4\pi \frac{b}{a} J_x. \tag{1}$$

Din aplicarea legii inducției se obține

$$\left\{-\left(E_x + \frac{\partial E_x}{\partial x}\,\mathrm{d}x\right) + E_x\right\} l = -\mu_0 \frac{\partial}{\partial t} H_x l \mathrm{d}x$$

de unde se deduce

$$\frac{\partial E_x}{\partial x} = \rho \frac{\partial J_x}{\partial x} = \mu_0 \frac{\partial H_x}{\partial t}$$

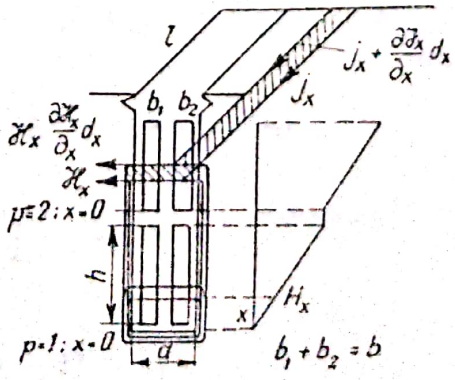


Fig. 31.292. Conductoarele în crestătura unei mașini electrice.

sau

$$\frac{\partial H_x}{\partial t} = \frac{\rho}{\mu_0} \frac{\partial J_x}{\partial x}. \tag{2}$$

Din ecuațiile diferențiale cu derivate parțiale (1) și (2) se obține

$$\frac{\partial^2 J_x}{\partial x^2} = 4\pi \frac{b}{a} \frac{\mu_0}{\rho} \frac{\partial J_x}{\partial t}. \tag{3}$$

Ecuația diferențială (3) ne conduce la exprimarea densității de curent J_x în forma complexă. Avem

$$\mathcal{J}_x = \mathcal{J}_c e^{\gamma^* x} e^{j\omega t} \tag{4}$$

iar ecuația diferențială (3) ia forma

$$\frac{\partial^2 \mathcal{J}_x}{\partial x^2} = 4\pi \frac{b}{a} \frac{\mu_0}{\rho} \frac{\partial \mathcal{J}_x}{\partial t}. \tag{5}$$

În mod analog se introduce

$$\mathcal{H}_x = \mathcal{H}_c e^{\gamma^* x} e^{j\omega t}$$

$$\frac{\partial^2 \mathcal{H}_x}{\partial x^2} = 4\pi \frac{b}{a} \frac{\mu_0}{\rho} \frac{\partial \mathcal{H}_x}{\partial t}. \tag{6}$$

Determinarea lui γ^*.

Din ecuația diferențială (5) se obține

$$\gamma^{*2} = 4\pi \frac{b}{a} \frac{\mu_0}{\rho} j\omega \tag{7}$$

de unde se deduce

$$(\beta^* + j\alpha^*)^2 = \beta^{*2} - \alpha^{*2} + 2\beta^*\alpha^* j = 4\pi \frac{b}{a} \frac{\mu_0}{\rho} j\omega$$

astfel că

$$\beta^{*2} - \alpha^{*2} = 0 \quad \beta^* = \alpha^* \quad 2\alpha^* = 4\pi \frac{b}{a} \frac{\mu_0}{\rho} \omega$$

$$\alpha^* = \pm 2\pi \sqrt{\frac{b}{a} \frac{\mu_0}{\rho} f} \tag{8}$$

$$\gamma^* = (1 + j)\alpha^* = \sqrt{2}\alpha^* e^{j\frac{\pi}{4}}. \tag{9}$$

Scanned with OKEN Scanner

Exemplu

Fie $a = 1{,}3$ cm, $b = 0{,}8$ cm, $\rho\Omega\,\text{cm} = 0{,}02 \cdot 10^{-4}\,\Omega$ cm, $\mu_0 = 10^{-9}$ H/cm. Se obține $\alpha^* = 0{,}78$. Pentru $h = 2{,}5$ cm avem $\alpha^* h = 0{,}78 \cdot 2{,}5 = 1{,}95$. Deoarece s-a obținut $\pm\gamma^*$ rezultă

$$\mathcal{J}_x = (\mathcal{J}_{c1}\, e^{(1+j)\alpha^* x} + \mathcal{J}_{c2}\, e^{-(1+j)\alpha^* x})\, e^{j\omega t}$$

Detdrminarea constantelor $\mathcal{J}_{c1}$ și $\mathcal{J}_{c2}$.

Fie

$$i = i_m \sin \omega t \qquad \mathcal{J} = i_m\, e^{j\omega t}$$

$$i_m = J_{\text{mijl. max}} b \cdot h$$

($J_{mijl.\,max}$ mijlociu în raport cu secțiunea și maximal în timp).

Se formează $\int (d\mathcal{H})$ pentru $x = 0$ rîndul p. Se obține în general pentru $x = 0$ rîndul p:

$$\mathcal{H}_0 a = 4\pi\,(p-1)\, i_m\, e^{j\omega t} \tag{10}$$

Din ecuația diferențială

$$\left(\frac{\partial \mathcal{H}_x}{\partial t}\right)_{x=0} = \frac{\rho}{\mu_0}\left(\frac{\partial \mathcal{J}_x}{\partial x}\right)_{x=0}$$

se obține

$$\frac{\partial \mathcal{H}_0}{\partial t} = j\,\omega\,\frac{4\pi}{a}\,(p-1)\, i_m\, e^{j\omega t} = j\,\omega\,\frac{4\pi}{a}\,(p-1)\, J_{\text{mijl. max}} b \cdot h\, e^{j\omega t} =$$

$$= \frac{\rho}{\mu_0}\sqrt{2}\alpha^*\, e^{j\frac{\pi}{4}} (\mathcal{J}_{c1}\, e^{(1+j)\alpha^* x} \mathcal{J}_{c2}\, e^{-(1+j)\alpha^* x})_{x=0}\, e^{j\omega t} =$$

$$= j\,\omega\,\frac{4\pi}{a}\,(p-1) J_{\text{mijl. max}}\, b \cdot h = \frac{\rho}{\mu_0}\sqrt{2}\alpha^*\, e^{j\frac{\pi}{4}} (\mathcal{J}_{c1} - \mathcal{J}_{c2}) \tag{11}$$

de unde se deduce

$$\mathcal{J}_{c1} - \mathcal{J}_{c2} = 4\pi\,\frac{\mu_0}{\rho}\,\frac{bh}{a}\,\omega\,(p-1)\,\frac{1}{\sqrt{2}\alpha^*}\, e^{j\frac{\pi}{4}} J_{\text{mijl.max}}$$

în care apare

$$\alpha^{*2} = (2\pi)^2\,\frac{b}{a}\,\frac{\mu_0}{\rho} f$$

astfel că

$$\mathcal{Z}_{c_1} - \mathcal{Z}_{c_2} = \sqrt{2}\,\alpha^* h(p-1)\; J_{\text{mijl.max}}\; e^{j\frac{\pi}{4}}. \tag{12}$$

Pe de altă parte se formează

$$b\int_0^h \mathcal{Z}_x\,dx = i_m\,e^{j\omega t} = \frac{b}{(1+j)\,\alpha^*}\,e^{j\omega t}(\mathcal{Z}_{c_1}\,e^{(1+j)\,\alpha^* h} - \mathcal{Z}_{c_2}\,e^{-(1+j)\,\alpha^* h} - \mathcal{Z}_{c_1} + \mathcal{Z}_{c_2})$$

de unde se deduce

$$\mathcal{Z}_{c_1}\,e^{(1+j\,\alpha^* h} - \mathcal{Z}_{c_2}\,e^{-(1+j)\,\alpha^* h} - \mathcal{Z}_{c_1} + \mathcal{Z}_{c_2} = J_{\text{mijl.max}}\,\sqrt{2}\alpha^* h\;e^{j\frac{\pi}{4}}. \tag{13}$$

Din (12) și (13) se obține

$$\mathcal{Z}_{c_1}\,e^{(1+j)\,\alpha^* h} - \mathcal{Z}_{c_1}\,e^{-(1+j)\,\alpha^* h} = J_{\text{mijl.max}}\,\sqrt{2}p\alpha^* h\;e^{j\frac{\pi}{4}}. \tag{14}$$

Pentru a elimina pe $\mathcal{Z}_{c_2}$ se înmulțește relația (12) cu $-\,e^{-(1+j)\,\alpha^* h}$ și se adună cu relația (14). Se obține

$$\mathcal{Z}_{c_1}(e^{(1+j)\,\alpha^* h} - e^{-(1+j)\,\alpha^* h}) = J_{\text{mijl.max}}\,\sqrt{2}\alpha^* h\;e^{j\frac{\pi}{4}}(p - (p-1)\;e^{-(1+j)\,\alpha^* h})$$

de unde se deduce

$$\mathcal{Z}_{c_1} = \frac{J_{\text{mijl.max}}\,\sqrt{2}\alpha^* h\,e^{j\frac{\pi}{4}}(p-(p-1)\,e^{-(1+j)\,\alpha^* h})}{e^{(1+j)\,\alpha^* h} - e^{-(1+j)\,\alpha^* h}}. \tag{15}$$

În mod analog se obține

$$\mathcal{Z}_{c_2} = \frac{J_{\text{mijl.max}}\,\sqrt{2}\alpha^* h\,e^{j\frac{\pi}{4}}(p-(p-1)\,e^{(1+j)\,\alpha^* h})}{e^{(1+j)\,\alpha^* h} - e^{-(1+j)\,\alpha^* h}}.$$

Pentru $p = 1$ se obține

$$\mathcal{Z}_{c_1} = \mathcal{Z}_{c_2}.$$

Pentru $p \neq 1$ rezultă

$$\mathcal{Z}_x = \frac{J_{\text{mijl.max}}\,\sqrt{2}\alpha^* h\,e^{j\frac{\pi}{4}}}{e^{(1+j)\,\alpha^* h} - e^{-(1+j)\,\alpha^* h}}\{p(e^{(1+j)\,\alpha^* x} + e^{-(1+j)\,\alpha^* x}) -$$

$$-(p-1)\,(e^{(1+j)\,\alpha^*(h-x)} + e^{-(j+j)\,\alpha^*(h-x)})\}\;e^{j\omega t}.$$

Scanned with OKEN Scanner

Ţinindu-se seama de relaţia

$$(e^{\alpha^* x} + e^{-\alpha^* x})(e^{j\alpha^* x} + e^{-j\alpha^* x}) + (e^{\alpha^* x} - e^{-\alpha^* x})(e^{j\alpha^* x} - e^{-j\alpha^* x}) = 2(e^{\alpha^* x} e^{j\alpha^* x} + e^{-\alpha^* x} e^{-j\alpha^* x})$$

rezultă

$$p(e^{(1+j)\alpha^* x} + e^{-(1+j)\alpha^* x}) - (p-1)(e^{(1+j)\alpha^*(h-x)} + e^{-(1+j)\alpha^*(h-x)}) = p(e^{\alpha^* x} + e^{-\alpha^* x}) \cos \alpha^* x - (p-1)(e^{\alpha^*(h-x)} + e^{-\alpha^*(h-x)}) \cos \alpha^*(h-x) + j\{p(e^{\alpha^* x} - e^{-\alpha^* x}) \sin \alpha^* x - (p-1)(e^{\alpha^*(h-x)} - e^{-\alpha^*(h-x)}) \sin \alpha^*(h-x)\} = A_x e^{j\theta_x}. \quad (16)$$

Pe de altă parte mai avem

$$e^{(1+j)\alpha^* h} - e^{-(1+j)\alpha^* h} = \sqrt{2(\operatorname{ch} 2\beta^* h - \cos 2\alpha^* h)}\, e^{j\theta_s} \quad (17)$$

$$\operatorname{tg} \theta_s = \frac{\sin \alpha^* h \operatorname{ch} \beta^* h}{\cos \alpha^* h \operatorname{sh} \beta^* h}$$

în care

$$\alpha^* = \beta^*.$$

Ca urmare

$$\mathcal{J}_x = \frac{J_{\text{mijl.max}} \sqrt{2}\alpha^* h A_x}{\sqrt{2(\operatorname{ch} 2\beta^* h - \cos 2\alpha^* h)}}\, e^{j\left(\omega t + \frac{\pi}{4} + \theta_x - \theta_s\right)}. \quad (18)$$

Pentru $p = 1$ se obţine

$$\mathcal{J}_x = \frac{J_{\text{mijl.max}} \sqrt{2}\alpha^* h\, e^{j\frac{\pi}{4}} (e^{(1+j)\alpha^* x} + e^{-(1+j)\alpha^* x}) e^{j\omega t}}{e^{(1+j)\alpha^* h} - e^{-(1+j)\alpha^* h}}.$$

Din figura 31.293 se vede cum variază J_x şi $\left(\frac{\pi}{4} + \theta_x - \theta_s\right)$ în funcţie de x pentru cazul cînd $p = 1$.

În cazul cînd $\alpha^* h \gg 1{,}6$ se consideră

$$e^{-(1+j)\alpha^* h} \cong 0$$

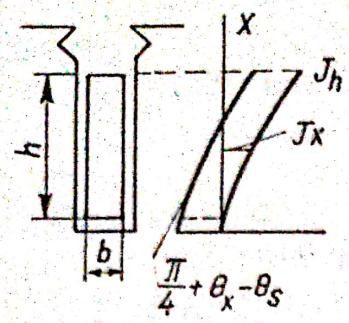
astfel că

$$\mathcal{J}_h = J_{\text{mijl.max}} \sqrt{2}\alpha^* h\, e^{j\left(\omega t + \frac{\pi}{4}\right)}.$$

Determinarea rezistenţei R_a

Studiul efectului pelicular prezintă un deosebit interes datorită faptului că variaţia densităţii de curent electric pe secţiunea conductorului fiind

Scanned with OKEN Scanner



31.293. Un singur conductor în crestătură.

variabilă, crește efectul Joule-Lenz și în consecință cresc pierderile în Cu, fără ca conductorul să fie bine utilizat.

Ca urmare studiul micșorării pierderilor în Cu la mașinile electrice se sprijină pe studiul efectului pelicular.

Pentru cele două conductoare în paralel din figura 31.292 efectul Joule-Lenz momentan p_c ia forma

$$p_c^W = \int_0^h (J_x b\ \mathrm{d}x)^2\ \rho \frac{l}{b\ \mathrm{d}x} = \int_0^h J_x^2 b\rho\ l x = b\rho\ l \int_0^h J_x^2\ \mathrm{d}x.$$

Ne interesează efectul Joule-Lenz mijlociu în raport cu o perioadă P_c

$$P_c^W = \frac{1}{T}\int_0^T p_c\ \mathrm{d}t = \frac{1}{T}\int_0^T \mathrm{d}t\ b\rho l \int_0^h J_x^2\ \mathrm{d}x =$$

$$= b\rho\ l \int_0^h \left(\frac{1}{T}\int_0^T J_x^2\ \mathrm{d}t\right) \mathrm{d}x = b\rho\ l \int_0^h \frac{J_{x\max}^2}{2}\ \mathrm{d}x \qquad (19)$$

deoarece J_x e considerată ca o funcție sinusoidală de timp.

Să luăm ca exemplu conductorul din crestătura din figura 31.293.

Pentru $p = 1$ avem

$$J_{x\,\max} = \frac{J_{\text{mijl.max}}\ \sqrt{2}\,\alpha^* h\ \sqrt{2(\operatorname{ch}\ 2\alpha^* x + \cos\ 2\alpha^* x)}}{\sqrt{2(\operatorname{ch}\ 2\alpha^* h - \cos\ 2\alpha^* h)}}.$$

$$J_{x\,\max}^2 = \frac{J_{\text{mijl.max}}^2\ 2\alpha^{*2} h^2 (\operatorname{ch} 2\alpha^* x + \cos\ 2\alpha^* x)}{\operatorname{ch}\ 2\alpha^* h - \cos\ 2\alpha^* h}. \qquad (20)$$

Ca urmare:

$$P_c = b\rho\ l \int_0^h \frac{J_{x\,\max}^2}{2}\ \mathrm{d}x = b\rho\ l\ \frac{J_{\text{mijl.max}}^2\ 2\alpha^{*2} h^2}{2 \cdot 2\alpha^*}\ \frac{\operatorname{sh}\ 2\alpha^* h + \sin\ 2\alpha^* h}{\operatorname{ch}\ 2\alpha^* h - \cos\ 2\alpha^* h}$$

$$P_c = b\rho\ l\ \frac{J_{\text{mijl.max}}^2 \alpha^* h^2 \cdot bh}{2bh}\ \frac{\operatorname{sh}\ 2\alpha^* h + \sin\ 2\alpha^* h}{\operatorname{ch}\ 2\alpha^* h - \cos\ 2\alpha^* h} = I^2 \rho\ \frac{l}{bh}\ \alpha^* h \times$$

$$\times\ \frac{\operatorname{sh}\ 2\alpha^* h + \sin\ 2\alpha^* h}{\operatorname{ch}\ 2\alpha^* h - \cos\ 2\alpha^* h}$$

în care

$$\frac{J_{\text{mijl.max}}^2}{2} = J_{\text{mijl.ef}}^2;\quad R_c = \rho\ \frac{l}{bh};\quad \alpha^* h = \xi$$

astfel că

$$P_c = I^2 R_c \xi\ \frac{\operatorname{sh}\ 2\alpha^* h + \sin\ 2\alpha^* h}{\operatorname{ch}\ 2\alpha^* h - \cos\ 2\alpha^* h} = I^2 R_c \varphi(\xi) \qquad (21)$$

Scanned with OKEN Scanner

cu

$$\varphi(\xi) = \xi \frac{\operatorname{sh} 2\alpha^* h + \sin 2\alpha^* h}{\operatorname{ch} 2\alpha^* h - \cos 2\alpha^* h}. \tag{22}$$

Din (21) rezultă

$$R_a = R_c \ \varphi(\xi). \tag{23}$$

Cînd $p > 1$ se obţine: $R_{ap}/R_c = k_p$, pentru stratul p, în care

$$k_p = \frac{\alpha^* h[4(p^2 - p)(\operatorname{ch} \alpha^* h - \cos \alpha^* h)(\operatorname{sh} \alpha^* h - \sin \alpha^* h) + (\operatorname{sh} 2\alpha^* h + \sin 2\alpha^* h)}{\operatorname{ch} 2\alpha^* h - \cos 2\alpha^* h}$$

în care

$$\varphi(\xi) = \alpha^* h \frac{\operatorname{sh} 2\alpha^* h + \sin 2\alpha^* h}{\operatorname{ch} 2\alpha^* h - \cos 2\alpha^* h}$$

$$\psi(\xi) = 4\alpha^* h \frac{(\operatorname{ch} \alpha^* h - \cos \alpha^* h)(\operatorname{sh} \alpha^* h - \sin \alpha^* h)}{\operatorname{ch} 2\alpha^* h - \cos 2\alpha^* h}.$$

Deoarece avem

$$\operatorname{ch} 2\alpha^* h - \cos 2\alpha^* h = 2(\operatorname{ch} \alpha^* h + \cos \alpha^* h)(\operatorname{ch} \alpha^* h - \cos \alpha^* h)$$

rezultă

$$\psi(\xi) = 2\alpha^* h \frac{\operatorname{sh} \alpha^* h - \sin \alpha^* h}{\operatorname{ch} \alpha^* h + \cos \alpha^* h}.$$

Ca urmare k_p devine

$$k_p = \varphi(\xi)) + (p^2 - p)\,\psi(\xi) \quad \text{cu} \quad \xi = \alpha^* h.$$

Seriile pentru $\operatorname{ch}\xi$, $\operatorname{sh}\xi$, $\cos\xi$, $\sin\xi$ pentru valori mici ale lui ξ, pînă la 0,75, dau

$$\varphi(\xi) = 1, \ \psi(\xi) = \frac{\xi^4}{3}.$$

astfel că

$$k_p = 1 + (p^2 - p)\frac{\xi^4}{3}.$$

Expresia efectului Joule-Lenz pentru toate conductoarele în cele p rînduri din crestătură ia forma

$$P_c^w = I^2 R_c[k_1 + k_2 + k_3 + \ldots + k_p] = I^2 R_c k$$

în care

$$k = \frac{1}{p}\sum_{p=1}^{p=p} k_p = \varphi(\xi) + \frac{1}{p}\psi(\xi)\sum_{p=1}^{p} p(p-1)$$

$$k = \varphi(\xi) + \frac{p^2 - 1}{3}\psi(\xi).$$

Tabela 31.1

p	ξ	$\varphi(\xi)$	$\psi(\xi)$	K
1	8	8	16	8
2	4	4	8.5	12.5
3	2.66	3	5.0	16.3
4	2	1.9	3.2	17.9
5	1.6	1.4	2.0	17.4

Pentru $\xi \leqslant 0{,}75$ se obține

$$k \cong 1 + \frac{p^2 - 1}{9} \xi^4.$$

În tabela 31.1 se cunosc $\varphi(\xi)$, $\psi(\xi)$ și k pentru diferite valori ale lui p, iar în $\xi = \alpha^* h$ se consideră $\alpha^* = 1$.

Pentru ξ mic avem

$$\frac{1}{\xi}\varphi(\xi) \cong \frac{1}{\xi}$$

$$\frac{1}{\xi}\psi(\xi) = \frac{\xi^3}{3}.$$

Ca urmare

$$R_a = \rho \frac{l\alpha^*}{b} p \left(\frac{1}{\xi} + \frac{p^2 - 1}{3} \frac{\xi^3}{3}\right).$$

Se cere să se stabilească valoarea înălțimii conductorului h_0 pentru $R_{a\,\min}$. Se formează

$$\frac{\partial R_a}{\partial h} = \frac{\partial R_a}{\partial \xi} \frac{\mathrm{d}\xi}{\mathrm{d}h} = 0.$$

Se obține

$$\xi_0^4 = \frac{3}{p^2 - 1} \qquad \xi_0 = \frac{1{,}3}{\sqrt[4]{p^2 - 1}}$$

astfel că

$$h_0 = \frac{1{,}3}{\alpha^* \sqrt[4]{p^2 - 1}}$$

în care

$$\alpha^* = 2\pi \sqrt{\frac{b}{a} \frac{\mu_0}{\rho} f}.$$

Pentru p mare avem

$$h_0 = \frac{1{,}3}{\alpha^* \sqrt{p}} \text{ sau } \xi_0 = h_0 \alpha^* = \frac{1{,}3}{\sqrt{p}}.$$

Pentru

$$p = 1 \qquad \xi_0 = 1{,}3$$
$$= 2 \qquad = 0{,}92$$
$$= 3 \qquad = 0{,}755$$
$$= 4 \qquad = 0{,}05$$

Scanned with OKEN Scanner

Factorul k_0 devine

$$k_0 = \frac{R_a}{pR_c} = \varphi\left(\frac{1,3}{\sqrt{p}}\right) + \frac{p^2-1}{3}\psi\left(\frac{1,3}{\sqrt{p}}\right)$$

de unde se obține

pentru $p = 1$ $\quad k_0 = 1,13$

$= 2$ $\quad = 1,32$

> 2 $\quad = 1,33 = \text{const.}$

Se trage concluzia că factorul k_0, care exprimă raportul dintre rezistența pentru curent alternativ și rezistența pentru curent continuu, nu poate deveni mai mic de 1,33 cînd înălțimea conductorului devine h_0.

32. CURENȚII ELECTRICI TURBIONARI ÎN TOLA DE FIER

Figura 32.294 reprezintă o tolă de fier cu 2% siliciu folosită la mașinile electrice.

Avem

$$\rho = 0,4\ \Omega\ \text{mm}^2/\text{m} = 0,4 \cdot 10^{-4}\ \Omega\ \text{cm}$$

$$\lambda = 2,5 \cdot 10^4\ \text{S/cm} \qquad \mu = 100 \cdot 10^{-9}\ \text{H/cm}.$$

Pentru determinarea cîmpurilor $\mathfrak{B}$ și $\mathfrak{E}$ ne folosim de legile lui Maxwell, mai întîi în forma diferențială, apoi la prezentarea lor în forma integrală prin efectuarea de transformări de integrale de suprafață în integrale de linie.

Avem

$$\text{rot}\ \mathfrak{H} = 4\pi\, j_{elm} = 4\pi\lambda\mathfrak{E}$$

$$\text{rot}\ \mathfrak{E} = -\mu\frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial t}$$

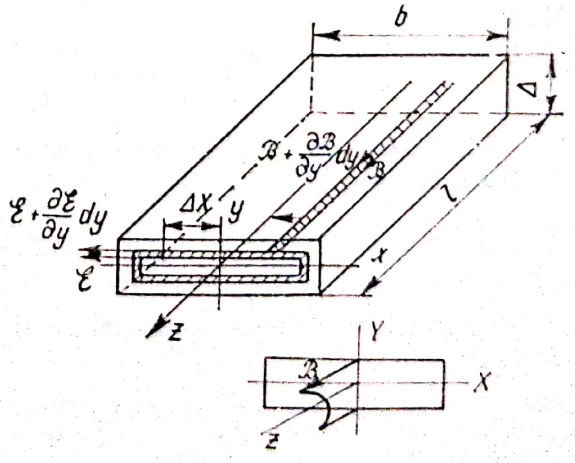


Fig. 32.294. Tola de fier cu cîmpurile $\mathfrak{B}$ și $\mathfrak{E}$.

Pentru suprafețele haşurate din figură se obține

$$\left(E + \frac{\partial E}{\partial y}\,dy\right)\Delta x - E\Delta x = -\mu\frac{\partial}{\partial t}H\Delta x\,dy$$

de unde se deduce

$$-\frac{\partial H}{\partial t} = \frac{1}{\mu}\frac{\partial E}{\partial y} \qquad E = E_x. \tag{1}$$

Apoi

$$Hl - \left(H + \frac{\partial H}{\partial y}\,dy\right)l = 4\pi\lambda El\,dy$$

de unde rezultă

$$-\frac{\partial H}{\partial y} = 4\pi\lambda E \qquad H = H_z. \tag{2}$$

De altfel se remarcă, că exprimînd rot $\mathcal{H}$ şi rot $\mathcal{E}$ în formă de determinant, se obține.

$$\text{rot}\ \mathcal{H} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & 0 & H_z \end{vmatrix} = i\frac{\partial H_z}{\partial y}$$

$$\text{rot}\ \mathcal{E} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ E_x & 0 & 0 \end{vmatrix} = -k\frac{\partial E_x}{\partial y}$$

ceea ce ne arată că $J = \lambda E$ cade în sens opus vectorului unitar i şi H se găseşte în sensul lui k.

Din (1) şi (2) se obţine cîte o ecuaţie diferenţială în E respectiv în H de forma

$$\frac{\partial^2 E}{\partial y^2} = 4\pi\lambda\mu\frac{\partial E}{\partial t} \qquad \frac{\partial^2 H}{\partial y^2} = 4\pi\lambda\mu\frac{\partial H}{\partial t} \tag{3}$$

S-a văzut că E şi H se reprezintă în forma unei unde funcţie sinusoidală cu variabila în forma

$$\omega\left(t - \frac{y}{V_0}\right) = \omega t - \alpha^* y.$$

Ca urmare valorile momentane E şi H se pot exprima în forma complexă. Avem

$$\frac{\partial^2 \mathcal{E}}{\partial y^2} = 4\pi\lambda\mu\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial t} \qquad \frac{\partial^2 \mathcal{X}}{\partial y^2} = 4\pi\lambda\mu\frac{\partial \mathcal{X}}{\partial t} \tag{4}$$

Scanned with OKEN Scanner

cu

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_c\, e^{\gamma^* y} e^{j\omega t} \qquad \mathcal{X} = \mathcal{X}_c\, e^{\gamma^* y} e^{j\omega t}. \tag{5}$$

Din (4) și (5) se obține imediat $\gamma^* = \beta^* + j\alpha^*$. Avem

$$\gamma^{*2} = 4\pi\lambda\mu\, j\omega \qquad \beta^{*2} - \alpha^{*2} + j\, 2\alpha^*\beta^* = 4\pi\lambda\mu\omega$$

$$\beta^* = \alpha^* \qquad \alpha^* = 2\pi \sqrt{\lambda\mu f}. \tag{6}$$

Pentru $f = 50$ Hz se obține $\alpha^* = 2{,}22$.
Pentru că apare $\pm\gamma^*$, avem

$$\mathcal{E} = (\mathcal{E}_{c1}\, e^{\gamma^* y} + \mathcal{E}_{c2}\, e^{-\gamma^* y})\, e^{j\omega t}$$

$$\mathcal{X} = (\mathcal{X}_{c1}\, e^{\gamma^* y} + \mathcal{X}_{c2}\, e^{-\gamma^* y})\, e^{j\omega t}. \tag{7}$$

Folosindu-ne de ecuația diferențială

$$-\frac{\partial \mathcal{X}}{\partial t} = \frac{1}{\mu}\,\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial y}$$

$\mathcal{X}_{c1}$ și $\mathcal{X}_{c2}$ se vor exprima în funcție de $\mathcal{E}_{c1}$ și $\mathcal{E}_{c2}$. Se obține

$$-j\omega\,\mathcal{X} = \frac{\gamma^*}{\mu}\,(\mathcal{E}_{c1}\, e^{\gamma^* y} - \mathcal{E}_{c2}\, e^{-\gamma^* y})\, e^{j\omega t}$$

$$\mathcal{X} = -\frac{\gamma^*}{\mu\, j\,\omega}\,(\mathcal{E}_{c1}\, e^{\gamma^* y} - \mathcal{E}_{c2}\, e^{-\gamma^* y})\, e^{j\omega t}. \tag{8}$$

Ținîndu-se seama de faptul că în figura 32.294 $\mathfrak{B}$ e considerat simetric față de axa z, se formează

$$\frac{\partial \mathcal{X}}{\partial y} = -\frac{\gamma^{*2}}{\mu j\omega}\,(\mathcal{E}_{c1}\, e^{\gamma^* y} + \mathcal{E}_{c2}\, e^{-\gamma^* y})\, e^{j\omega t} \tag{9}$$

astfel că pentru $y = 0$ avem

$$\left(\frac{\partial \mathcal{X}}{\partial y}\right)_{y=0} = 0. \tag{10}$$

Din (10) se deduce

$$\mathcal{E}_{c1} + \mathcal{E}_{c2} = 0$$

astfel că

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_c(e^{\gamma^* y} - e^{-\gamma^* y})\, e^{j\omega t}$$

$$\mathcal{X} = -\frac{\gamma^*}{\mu\, j\,\omega}\,\mathcal{E}_c(e^{\gamma^* y} + e^{-\gamma^* y})\, e^{j\omega t}. \tag{11}$$

Determinarea constantei $\mathcal{E}_c$.

Fie pentru $y = \frac{\Delta}{2}$:

$$\mathcal{X}_a = H_{a\,\max}\, e^{j\omega t} \tag{12}$$

în care $\mathcal{X}_a$ nu e încă cunoscut.

Se obţine

$$\mathcal{H}_a = H_{a\max}\, e^{j\omega t} = -\frac{\gamma^*}{\mu\, j\omega}\mathcal{E}_c\left(e^{\gamma^*\frac{\Delta}{2}} + e^{-\gamma^*\frac{\Delta}{2}}\right) e^{j\omega t}$$

de unde se obţine

$$\mathcal{E}_c = -\frac{H_{a\max}\,\mu\, j\omega}{\gamma^*\, 2\,\mathrm{ch}\,\gamma^*\frac{\Delta}{2}} \tag{13}$$

$$\mathcal{E} = -\frac{H_{a\max}\,\mu\, j\omega}{\gamma^*\, 2\,\mathrm{ch}\,\gamma^*\frac{\Delta}{2}}\left(e^{\gamma^* y} - e^{-\gamma^* y}\right) e^{j\omega t}$$

$$\mathcal{H} = H_{a\max}\frac{1}{2\,\mathrm{ch}\,\gamma^*\frac{\Delta}{2}}\left(e^{\gamma^* y} + e^{-\gamma^* y}\right) e^{j\omega t}$$

sau

$$\mathcal{E} = -\frac{H_{a\max}\,\mu\, j\omega}{\alpha^*\sqrt{2}\, e^{j\frac{\pi}{4}}\,\mathrm{ch}\,\gamma^*\frac{\Delta}{2}}\,\mathrm{sh}\,\gamma^* y\, e^{j\omega t}$$

$$\mathcal{H} = H_{a\max}\frac{\mathrm{ch}\,\gamma^* y}{\mathrm{ch}\,\gamma^*\frac{\Delta}{2}}\, e^{j\omega t} \tag{14}$$

în care

$$\gamma^* = \sqrt{2}\,\alpha^*\, e^{j\frac{\pi}{4}}.$$

Determinarea fluxului magnetic Φ.

Din

$$\mathcal{B} = \mu\mathcal{H} = \mu H_{a\max}\frac{\mathrm{ch}\,\gamma^* y}{\mathrm{ch}\,\gamma^*\frac{\Delta}{2}}\, e^{j\omega t}$$

se obţine

$$\Phi = \int_{-\frac{\Delta}{2}}^{+\frac{\Delta}{2}} \mathcal{B} b\, dy = \mu\, H_{a\max}\, b \cdot 2\,\frac{1}{\gamma^*}\,\frac{\mathrm{sh}\,\gamma^*\frac{\Delta}{2}}{\mathrm{ch}\,\gamma^*\frac{\Delta}{2}}\, e^{j\omega t}.$$

Fluxul maxim în timp ia forma

$$\Phi_{max} = \frac{\mu H_{a\,max}\; b \cdot 2}{\alpha^* \sqrt{2}} \sqrt{\frac{\operatorname{ch}\beta^*\Delta - \cos\alpha^*\Delta}{\operatorname{ch}\beta^*\Delta + \cos\alpha^*\Delta}} = B_{mijl.max} \cdot \Delta b \qquad (15)$$

în care $B_{mijl.max}$ reprezintă inducția mijlocie în raport cu secțiunea și maximală în timp.

Din (15) se obține $H_{a\,max}$ în forma

$$H_{a\,max} = \frac{B_{mijl.max}\; \Delta b\, \alpha^* \sqrt{2}}{\mu b\, 2} \sqrt{\frac{\operatorname{ch}\beta^*\Delta + \cos\alpha^*\Delta}{\operatorname{ch}\beta^*\Delta - \cos\alpha^*\Delta}} \qquad (16)$$

în care $B_{mijl.max}$ se determină experimental din măsurarea fluxului Φ_{max}. Ca urmare $H_{a\,max}$ devine cunoscut.

Determinarea densității de curent $\mathcal{J}$.

Din

$$\mathcal{J} = \lambda \mathcal{E} = -\frac{H_{a\,max}\, \lambda\mu\, j\omega}{\alpha^* \sqrt{2}\; e^{j\frac{\pi}{4}}\; \operatorname{ch}\gamma^* \frac{\Delta}{2}} \operatorname{sh}\gamma^* y\, e^{j\omega t}$$

se deduce J_{max} în forma

$$J_{max} = \frac{B_{mijl.max}\, \lambda\omega\Delta \sqrt{\operatorname{ch}\, 2\beta^* y - \cos\, 2\alpha^* y}}{2\sqrt{\operatorname{ch}\beta^*\Delta - \cos\alpha^*\Delta}}. \qquad (17)$$

Pierderile în fier datorită curenților turbionari

Avem

$$(j\, \mathcal{E}) = \frac{j^2}{\lambda}\ \mathrm{erg/cm^3 s}$$

$$\frac{1}{T}\int_0^T \frac{j^2}{\lambda}\, dt = \frac{J_{max}^2}{2\lambda} \qquad (18)$$

$$\frac{1}{2\lambda}\,\frac{1}{\Delta}\int_{-\frac{\Delta}{2}}^{+\frac{\Delta}{2}} J_{max}^2\, dy = \frac{1}{2\lambda} J_{mijl.max}^2 = \frac{1}{\lambda} J_{mijl.ef.}^2 .$$

Ca urmare

$$\frac{1}{\lambda} J_{mijl.ef.}^2 = \frac{1}{2\lambda}\,\frac{1}{\Delta}\,\frac{B_{mijl.max}^2 \lambda^2\omega^2\Delta^2}{4}\,\frac{1}{2\alpha^*}\,\frac{2(\operatorname{sh}\beta^*\Delta - \sin\alpha^*\Delta)}{(\operatorname{ch}\beta^*\Delta - \cos\alpha^*\Delta)} =$$

$$= \frac{B_{mijl.max}^2\, \omega^2\Delta^2}{8\alpha^*\Delta\,\frac{3}{3}\,\rho}\,\frac{\operatorname{sh}\beta^*\Delta - \sin\alpha^*\Delta}{\operatorname{ch}\beta^*\Delta - \cos\alpha^*\Delta}. \qquad (19)$$

Pentru $\alpha^*\Delta$ cu valori mici avem

$$\frac{\operatorname{sh}\beta^*\Delta - \sin\alpha^*\Delta}{\operatorname{ch}\beta^*\Delta - \cos\alpha^*\Delta} \cong \frac{\alpha^*\Delta + \frac{(\alpha^*\Delta)^3}{3!} - \left(\alpha^*\Delta - \frac{(\alpha^*\Delta)^3}{3!}\right)}{1 + \frac{(\alpha^*\Delta)^2}{2!} - \left(1 - \frac{(\alpha^*\Delta)^2}{2!}\right)} = \frac{\alpha^*\Delta}{3}$$

Ca urmare $\frac{1}{\lambda} J^2_{\text{mijl.ef}}$ din (19) devine

$$\left(\frac{1}{\lambda} J^2_{\text{mijl. cf.}}\right)^{\text{W/cm}^3} = \frac{B^2_{\text{mijl.max}}\, 10^{-16}\pi^2 f^2 \Delta^2}{6\rho^{\Omega\text{cm}}} \cdot F(\alpha^*\Delta) \qquad (20)$$

în care

$$F(\alpha^*\Delta) = \frac{3}{\alpha^*\Delta} \cdot \frac{\operatorname{sh}\beta^*\Delta - \sin\alpha^*\Delta}{\operatorname{ch}\beta^*\Delta - \cos\alpha^*\Delta}. \qquad (21)$$

Figura 32.295 reprezintă pe $F(\alpha^*\Delta)$ în funcție de $\alpha^*\Delta$.

A doua metodă de determinare a pierderilor specifice $P_e^{\text{W/cm}^3}$ *în fier*

Se formează un tub haşurat ca în figura 32.296, în care circulă curentul electric i.

Se introduce pentru tub

$$\frac{y}{x} = \frac{\Delta}{b}$$

astfel că

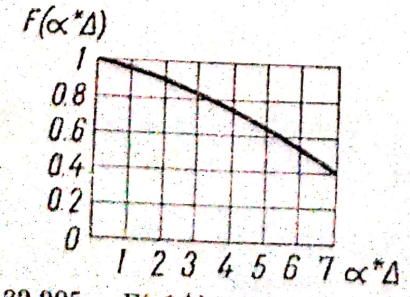
$$y = x\frac{\Delta}{b} \quad dy = dx\frac{\Delta}{b}.$$

Se introduce inducţia mijlocie în raport cu secţiunea $b\Delta$, notată prin B, ca valoare momentană în raport cu timpul. Fie

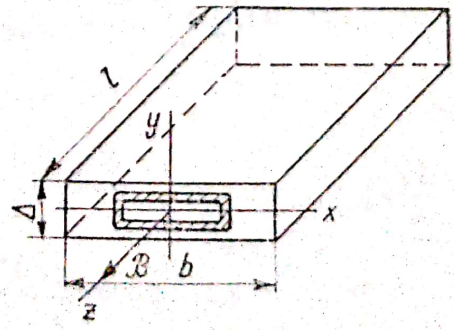
$$B = B_{\max} \cos \omega t.$$

Ca urmare

$$\Phi_{xy} = 4xy\, B_{\max} \cos \omega t = (\Phi_{xy})_{\max} \cos \omega t$$



32.295. $F(\alpha^*\Delta)$ în funcţie de $\alpha^*\Delta$.



32.296. Tola de fier în cîmpul inducţiei magnetice B.

În tubul haşurat din figură apare tensiunea electromotoare în forma

$$\Phi(\mathrm{d}/\mathrm{S}) = u_{xy}^{\mathrm{V}} = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\,\Phi_{xy}\,10^{-8} = \omega\,\Phi_{xy\,\max}\sin\omega t\cdot 10^{-8}$$

în care

$$2\pi f\;\Phi_{xy\,\max}\,10^{-8} = u_{xy\,\max}.$$

Se stabileşte $u_{xy\,\text{mijl}}^{\mathrm{V}}$ în raport cu o jumătate de perioadă

$$u_{xy\,\text{mijl}}^{\mathrm{V}} = \frac{2}{\pi}\,u_{xy\,\max} = 4f\cdot\Phi_{xy\,\max}\cdot 10^{-8}.$$

Se introduce factorul de formă k_f.
Avem în regim sinusoidal

$$\frac{U_{xy}}{u_{xy\,\text{mijl.}}} = k_f = \frac{u_{xy\,\max}\,\frac{1}{\sqrt{2}}}{\frac{2}{\pi}\,u_{xy\,\max}}\,\frac{\pi}{2\sqrt{2}} = 1{,}11 \qquad k_f^2 = \frac{\pi^2}{8}\,.$$

Ca urmare valoarea efectivă a tensiunii electromotoare este

$$U_{xy}^{\mathrm{V}} = 4k_f\cdot f\cdot\Phi_{xy\,\max}\cdot 10^{-8}$$

$$U_{xy}^{\mathrm{V}} = 4k_f\cdot f\cdot 4x^2\,\frac{\Delta}{b}\,B_{\max}\cdot 10^{-8}. \tag{22}$$

Determinarea efectului Joule-Lenz P_{fw}.

Pentru circuitul haşurat din figură se determină rezistenţa electrică r_{xy}

$$r_{xy} = \frac{4\rho}{l}\left(\frac{y}{\mathrm{d}x}+\frac{x}{\mathrm{d}y}\right) = \frac{4\rho}{l}\,\frac{y\,\mathrm{d}y + x\,\mathrm{d}x}{\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y} = \frac{4\rho}{l}\,\frac{x\,\mathrm{d}x}{\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}\left(1+\frac{y\,\mathrm{d}y}{x\,\mathrm{d}x}\right) =$$

$$= \frac{4\rho\,x}{l\,\mathrm{d}x}\,\frac{b}{\Delta}\left(1+\left(\frac{\Delta}{b}\right)^2\right)$$

În general avem $(\Delta/b)^2$ neglijabil faţă de 1, astfel că

$$r_{xy} = \frac{4\rho}{l}\,\frac{xb}{\Delta\mathrm{d}x}\,.$$

Efectul Joule-Lenz pentru tubul din figură ia forma

$$dp_{fw} = u_{xy}i_{xy} = \frac{u_{xy}^2}{r_{xy}} = u_{xy}^2\,\frac{l}{4\rho}\,\frac{\Delta\mathrm{d}x}{xb}\,.$$

Pentru toate tuburile din cîmp, efectul Joule-Lenz momentan e

$$p_{fw} = \int_0^{b/2} u_{xy}^2\,\frac{l}{4\rho}\,\frac{\Delta\mathrm{d}x}{xb}\,. \tag{23}$$

Efectul Joule-Lenz mijlociu în raport cu o perioadă devine

$$P_{fw} = \frac{1}{T}\int_0^T \mathrm{d}t \int_0^{b/2} u_{xy}^2 \frac{l}{4\rho}\frac{\Delta \mathrm{d}x}{xb} = \int_0^{b/2} U_{xy}^2 \frac{l}{4\rho}\frac{\Delta \mathrm{d}x}{xb}$$

astfel că

$$P_{fw}^{W} = \int_0^{b/2} 16k_f^2 \cdot f^2 \cdot 16x^4 \frac{\Delta^2}{b^2} B_{\max}^2 \ 10^{-16} \frac{l}{4\rho}\frac{\Delta \mathrm{d}x}{xb} =$$

$$= k_f^2 \cdot f^2 \cdot b\Delta^3 \ B_{\max}^2 \ 10^{-16} \frac{l}{\rho} = k_f^2 f^2 B_{\max}^2 \ 10^{-16} \ \Delta^2 \frac{l\Delta b}{\rho}$$

$$\frac{P_{fw}^{W/cm^3}}{l\Delta b} = k_f^2 \cdot f^2 \cdot B_{\max}^2 \cdot 10^{-16} \frac{\Delta^2}{\rho}. \qquad (24)$$

Comparînd pierderile specifice din (24) cu cele din (20), se obţine

$$F(\alpha^*\Delta) = \frac{3}{4}$$

cînd ambele pierderi specifice devin egale.

Pierderile P_{fw}^{W} iau forma

$$P_{fw}^{W} = \frac{k_f^2}{\rho \frac{\Omega mm^2}{m} \cdot 10^{-4}} \cdot f^2 \cdot B_{\max}^2 \, 10^{-16} \, \Delta_{mm}^2 \, 10^{-2} \cdot \mathrm{vol}_{dm^3} \cdot 10^3 \frac{\gamma^{kg/dm^3}}{\gamma^{kg/dm^3}} =$$

$$= \frac{k_f^2}{\rho \frac{\Omega mm^2}{m}} \cdot 10^{-11} \cdot \frac{1}{\gamma^{kg/dm^3}} f^2 B_{\max}^2 \Delta_{mm}^2 G_f^{kg}$$

iar pierderile specifice datorită curenţilor turbionari

$$\left(\frac{P_{fw}^{W}}{G_f^{kg}}\right)^{W/kg} = \frac{k_f^2}{\rho \frac{\Omega mm^2}{m}} \cdot 10^{-11} \cdot \frac{1}{\gamma^{kg/dm^3}} \cdot f^2 \cdot B_{\max}^2 \Delta_{mm}^2$$

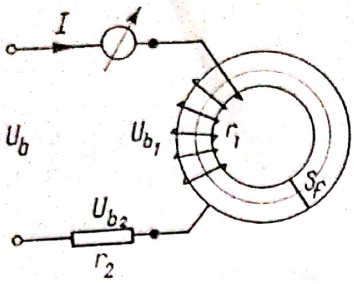
la care se adaugă pierderile specifice datorită fenomenului histerezei în forma

$$\left(\frac{P_{fh}}{G_f}\right)^{W/kg} = \frac{\eta}{\gamma} \cdot 10^{-4} \cdot B^{1,6} \cdot f.$$

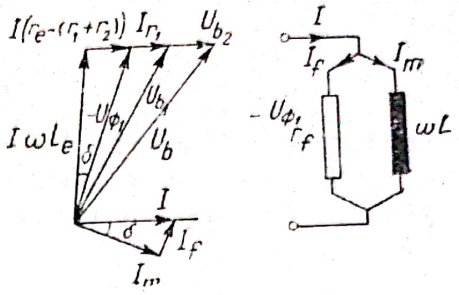
32.1. DETERMINAREA EXPERIMENTALĂ A PIERDERILOR ÎN FIER

În figura 32.297 se reprezintă un miez de fier în formă de tor, cu o bobină cu W_1 spire. Bobina e conectată în serie cu o rezistenţă r_2.

Admitem cazul cînd tensiunea de borne u_b reprezintă o funcţie sinusoidală de timp.



32.297. Determinarea pierderilor în fier fără wattmetru.



32.298. Diagrama tensiunilor și curentul bobinei.

Se caută ca tensiunea indusă u_{Φ_1} în bobină să apară ca o funcție sinusoidală de timp. În acest scop se consideră suma rezistențelor $(r_1 + r_2)$ neglijabilă față de reactanța inductivă ωL a bobinei. În felul acesta u_b devine practic egală cu $(-u_{\Phi_1})$. Se relevă că în cazul cînd r_2 ar fi făcută așa de mare, încît tensiunea u_{b1} devine neglijabilă față de u_{b2}, atunci curentul i apare ca o funcție sinusoidală de timp, iar tensiunea u_{b1} nu mai e sinusoidală.

În exemplul de mai sus u_{Φ_1} apare sinusoidală, iar curentul electric i nu mai e sinusoidal.

În figura 32.298 se reprezintă diagrama valorilor efective ale tensiunilor și curenților.

Circuitul se găsește în regim nesinusoidal; deoarece circuitul r_2 e format numai dintr-o rezistență electrică, înseamnă că valorile efective ale tensiunilor U_{b1}, U_{b2} și valoarea efectivă a curentului I se găsesc în același plan. Se scade din U_{b1} căderea ohmică Ir_1 și se obține componenta tensiunii de borne U_{b1} în forma: $-U_{\Phi_1}$.

Circuitul bobinei se consideră ca circuitul primar al unui transformator, iar miezul de fier ca circuitul secundar, datorită apariției curenților electrici turbionari și fenomenului histerezei.

Se descompune curentul I în două componente: una perpendiculară pe $-U_{\Phi_1}$, care reprezintă curentul de magnetizare I_m și cealaltă în fază cu $-U_{\Phi_1}$, care reprezintă curentul I_f corespunzător pierderilor în fier. Se obține

$$-U_{\Phi_1} = I_m\ \omega L \tag{1}$$

$$-U_{\Phi_1} = I_f r_f$$

astfel că

$$P_f = -U_{\Phi_1} I_f = I_f^2 r_f = \frac{(-U_{\Phi_1})^2}{r_f}\,. \tag{2}$$

În figura 32.298 în dreapta se reprezintă bobina cu miez de fier exprimată prin cele două circuite în paralel cu r_f și ωL.

Se obține

$$I_f r_f = I_m\ \omega L \tag{3}$$

astfel că

$$\frac{I_f}{I_m} = \frac{\omega L}{r_f} = \operatorname{tg} \delta. \tag{4}$$

Cele două circuite în paralel din figură reprezintă într-un regim sinusoidal echivalent, cu aceleași valori efective pentru tensiuni și curenți, o impedanță exprimată complex în forma.

$$\underline{z} = \frac{\mathrm{j}\,\omega L r_f}{\mathrm{j}\,\omega L + r_f} = \frac{\mathrm{j}\,\omega L}{\mathrm{j}\operatorname{tg}\delta + 1} = \mathrm{j}\,\omega L \cos\delta\, \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\delta} \tag{5}$$

în care

$$\operatorname{tg}\delta = \frac{\omega L}{r_f} \qquad \mathrm{j}\operatorname{tg}\delta + 1 = \frac{1}{\cos\delta}\, \mathrm{e}^{\mathrm{j}\delta}. \tag{6}$$

Ca urmare $\underline{z}$ ia forma

$$\underline{z} = \mathrm{j}\,\omega L \cos\delta(\cos\delta - \mathrm{j}\sin\delta) = \omega L \cos\delta \sin\delta + \mathrm{j}\,\omega L \cos^2\delta.$$

Se obține un circuit echivalent cu o rezistență și reactanță în serie.
Avem

$$\omega L \cos\delta \sin\delta = \frac{-U_{\Phi_1}}{I_m} \frac{I\omega L_e}{-U_{\Phi_1}} \frac{I_f}{I} = \frac{\omega L_e}{I_m} I_f = \omega L_e \operatorname{tg}\delta = \tag{7}$$

$$= r_e - (r_1 + r_2)$$

$$\omega L \cos^2\delta = \frac{-U_{\Phi_1}}{I_m} \frac{I\omega L_e}{-U_{\Phi_1}} \frac{I_m}{I} = \omega L_e \tag{8}$$

în care în figura 32.298 se descompune $(-U_{\Phi_1})$ în două componente $I\omega L_e$ și $I(r_e - (r_1 + r_2))$, în care L_e reprezintă o inductivitate echivalentă.

Se constată că P_f ia forma

$$P_f = -\dot{U}_{\Phi_1} I_f = -U_{\Phi_1} I \sin\delta = I_1^2(r_e - (r_1 + r_2)) \tag{9}$$

în care

$$-U_{\Phi_1} I_1 \sin\delta \cong -U_{\Phi_1} I_1 \operatorname{tg}\delta$$

valabilă cînd δ este mic.

Datorită acestui fapt δ e denumit unghiul de pierdere.

Cu ajutorul celor trei tensiuni ca valori efective măsurate U_{b1}, U_{b2} și U_b se formează triunghiul din figură.

Valoarea efectivă a curentului se găsește în direcția lui U_{b2}.

Se construiește căderea ohmică Ir_1 și se obține $-U_{\Phi_1}$. Se construiește perpendicular pe $-U_{\Phi_1}$ curentul I_m și se deduce din triunghiul curenților I_f.

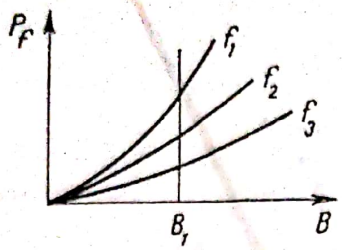
În felul acesta $P_f = -U_{\Phi_1} I_f$ devine cunoscut.

Din

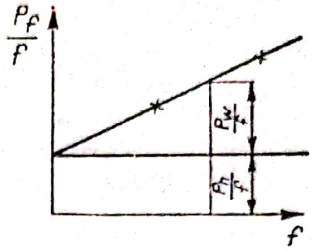
$$-U_{\Phi_1} = k_f\, 4(k\Phi)_{\max} \cdot W \cdot 10^{-8} \tag{10}$$

și admițind că u_{b1} e sinusoidal, avem factorul de formă: $k_f = 1{,}11$.

Scanned with OKEN Scanner



32.299. Pierderile în fier în funcție de B.



32.300. $\frac{Pf}{f}$ în funcție de f pentru B constant.

Ca urmare se obține $P_f = f(B)$ din

$$(k\Phi)_{max} = BS_f. \tag{11}$$

În diagrama din figura 32.299 se obțin pierderile în fier P_f în funcție de B, înțelegînd prin B valoarea maximă a inducției la diferite frecvențe f.

O astfel de caracteristică se poate obține de la un generator sincron cu tensiune sinusoidală care poate avea diferite turații.

Se cere să se descompună pierderile în fier în cele două componente: pierderile datorită histerezei și datorită curenților turbionari.

Avem

$$P_f = P_h + P_w \tag{12}$$

în care

$$P_h = C_h \cdot B^\zeta \cdot f \cdot G_f \qquad P_w = C_w \cdot B^2 \cdot f^2 \cdot G_f. \tag{13}$$

Din (12) și (13) rezultă

$$\frac{P_f}{f} = C_h B^\zeta G_f + C_w B^2 f G_f. \tag{14}$$

Spre exemplu pentru $B = B_1$ se obțin din figura 32.299 pierderile în fier la frecvențele f_1, f_2 și f_3.

Împărțind aceste pierderi prin frecvența corespunzătoare, se obține P_f/f în funcție de f în diagrama din figura 32.300. Prelungind dreapta din figură pînă la intersecția ei cu ordonata se obțin cele două componente din (14). Avem

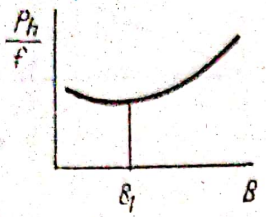
$$\frac{P_h}{f} = C_h \cdot B^\zeta \cdot G_f \qquad \frac{P_w}{f} = C_w \cdot B^2 \cdot f \cdot G_f. \tag{15}$$

În literatură se obține formula lui Steinmetz pentru pierderile prin histereză în forma

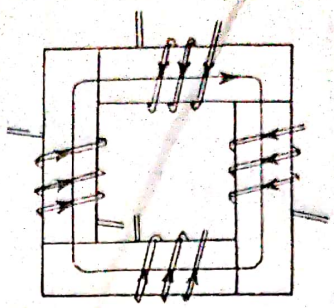
$$W_h = C_h \cdot f \cdot B^{1,6} \cdot G_f$$

care e valabilă pentru

$$10\,000 > B^G_{max} > 1\,000$$



32.301. $\frac{P_h}{f}$ în funcție de B.



32.302. Aparatul Epstein.

iar pentru

$$16\,000 > B^{G}_{max} > 100\,000$$

se va folosi

$$W_h = C'_h \cdot f \cdot B^2 \cdot G_f.$$

Ca urmare se poate forma o diagramă ca în figura 32.301 din care reiese P_h/f ca funcție de B, în care

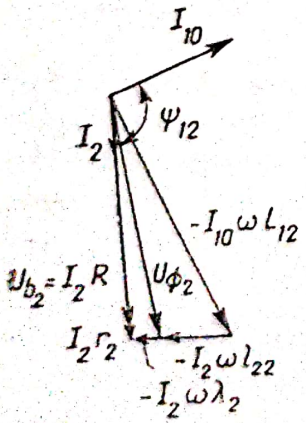
$$\frac{P_h}{f} = C_h B^{\zeta} G_f.$$

Se obține modalitatea de a se determina exact ζ.

Pentru măsurarea cu wattmetrul a pierderilor în fier ne servim de aparatul Epstein din figura 32.302.

Aparatul conține patru pachete de tablă de fier de 0,3—0,5 mm grosime pentru cercetare. Fiecare pachet are o greutate de 2,5 kg, lățimea 30 cm și lungimea 50 cm. Tolele sînt izolate între ele.

Bobinele sînt cu fir dublu pentru circuitele primare și secundare și posedă în total 150 spire.



32.303. Diagrama tensiunilor și a curentului în secundarul transformatorului în mersul în gol.

În figura 32.303 se prezintă diagrama tensiunilor și a curentului electric în secundarul transformatorului.

La mersul în gol se consideră conectat în circuitul secundar numai circuitul de tensiune al wattmetrului cu rezistența electrică R, cu care se măsoară pierderile în fier.

Se măsoară cu voltmetrul și tensiunea de borne secundară U_{b2}. Însă în momentul cînd se măsoară cu wattmetrul pierderile în fier, voltmetrul se deconectează, pentru a nu fi măsurat efectul Joule-Lenz din voltmetru.

În bobina de curent a wattmetrului circulă curentul primar care conține îndeosebi armonica de ordinul 3.

Din diagramă se vede că tensiunea

$$U_{b2} + I_2 r_2 = U_{b2}\left(1 + \frac{r_2}{R}\right) \cong U_{\Phi_2} \tag{16}$$

e practic egală cu tensiunea indusă în secundar.

Față de curentul I_1 trebuie să se ia în considerare U_{Φ_1}, în care

$$\frac{U_{\Phi_1}}{U_{\Phi_2}} = \frac{W_1}{W_2}. \tag{17}$$

Ca urmare puterea măsurată cu wattmetrul se înmulțește cu $\left(1 + \frac{r_2}{R}\right)\frac{W_1}{W_2}$ pentru a exprima pierderile în fier.

Se obține

$$P_f = U_{b2}\left(1 + \frac{r_2}{R}\right)\frac{W_1}{W_2} I_1 \Delta. \tag{18}$$

Din (18) se obțin pierderile în fier măsurate cu wattmetrul.

Se remarcă că tensiunea U_{b2} fiind sinusoidală, prin măsurarea puterii P_f se poate obține și valoarea efectivă a armonicii de bază a curentului i_1.

În cazul apariției pierderilor în fier cu tensiunea de borne u_{b1} sinusoidală, în care se neglijează rezistența electrică a bobinei primare, avem

$$u_b = u_{1m} \sin \omega t$$

$$i = i_{1m} \sin (\omega t - \varphi_1) + \ldots + i_{\nu m} \sin (\nu \omega t + \alpha_\nu)$$

$$u_b^* = u_{1m} \sin \left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right).$$

Se obțin

Puterea activă

$$P = P_f = U_b I_{1,1} \cos \varphi_1 = U_b I_1 \Delta; \qquad I_{1,1} = \delta I_1.$$

Puterea reactivă

$$P_r = U_b^* I_{1,1} \sin \varphi_1 = U_b^* I_1 \Delta^*; \qquad \Delta = \delta \cos \varphi_1; \qquad \Delta^* = \delta \sin \varphi_1.$$

Puterea deformantă

$$P_d^2 = U_b^2\{I_0^2 + \ldots + I_\nu^2 + \ldots\} = U_b^2(I^2 - I_1^2) = P_a^2 - (P^2 + P_r^2)$$

în care $I_{1,1}$ reprezintă valoarea efectivă a armonicii de bază a curentului electric i_1 (v. fig. 32.304).

Din păcate însă, nu se poate măsura exact puterea reactivă pentru a se putea determina Δ^*.

Dacă Δ^* ar fi exact determinat, atunci din

$$I_1^2(\Delta^2 + \Delta^{*2}) = I_{1,1}^2$$

s-ar fi obținut valoarea efectivă a armonicii de bază

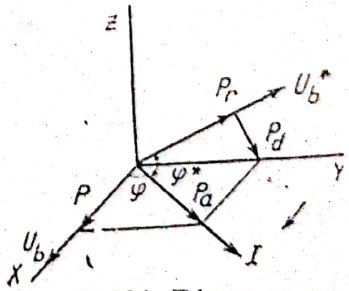


Fig. 32.304. Diagrama puterilor.

a curentului i_1. În felul acesta s-ar fi putut determina caracteristica de magnetizare în forma $(k\Phi)_{max} = f(I_{1,1})$ din paragraful 26.7.

33. PĂTRUNDEREA CÎMPULUI ELECTROMAGNETIC ÎN METALE

În figura 33.305 se prezintă o placă de Cu. Vectorul Umov-Poynting $\mathfrak{S}$ este perpendicular în placa metalică. Avem

$$\mathfrak{S}_{erg/cm^2s} = \frac{„c“}{4\pi}[\mathfrak{E}\mathfrak{H}].$$

În sistemul de măsuri electromagnetic constanta universală „c“ e introdusă în mărimile electrice.

Fie

$$\mathfrak{S}_{erg/cm^2s} = \frac{1}{4\pi}[\mathfrak{E}_{elm}\mathfrak{H}_{elm}]$$

în care

$$\mathfrak{H} = \mathfrak{H}_{elm}.$$

Pentru determinarea cîmpurilor $\mathfrak{E}$ și $\mathfrak{H}$ care apar în placa de Cu, ne folosim de legile lui Maxwell în forma diferențială.

$$\text{rot}\ \mathfrak{H} = 4\pi\lambda\mathfrak{E}$$

$$\text{rot}\ \mathfrak{E} = -\mu_0\frac{\partial\mathfrak{H}}{\partial t}.$$

Pentru exprimarea legilor lui Maxwell în forma integrală ne folosim de suprafețele haşurate din figură.

Se obțin următoarele transformări de integrale

$$-\left(H + \frac{\partial H}{\partial y}\,dy\right)\Delta x + H\Delta x = 4\pi\lambda E\Delta x\,dy$$

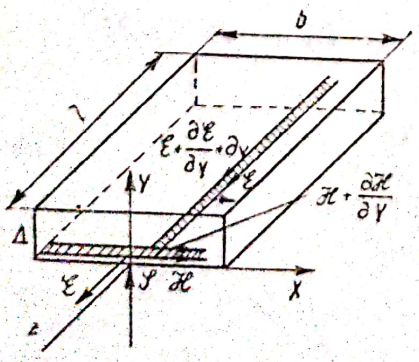


Fig. 33.305 Pătrunderea curentului electromagnetic în metal.

de unde se deduce

$$-\frac{\partial H}{\partial y} = 4\pi\lambda E. \qquad (1)$$

Apoi din

$$\left(E + \frac{\partial E}{\partial y}\,dy\right)l - El = -\mu_0\frac{\partial H}{\partial t}l\,dy$$

rezultă

$$-\frac{\partial H}{\partial t} = \frac{1}{\mu_0}\frac{\partial E}{\partial y}. \qquad (2)$$

Din (1) și (2) se obțin ecuațiile diferențiale

$$\frac{\partial^2 E}{\partial y^2} = 4\pi\lambda\mu_0 \frac{\partial E}{\partial t} \qquad \frac{\partial^2 H}{\partial y^2} = 4\pi\lambda\mu_0 \frac{\partial H}{\partial t}. \tag{3}$$

Din (3) se constată că E și H apar în formă de unde mobile cu variabila $\left(t - \frac{r}{v_U}\right)$, ceea ce înseamnă că apar funcții sinusoidale mobile. Ca urmare valorile momentane pot fi exprimate în forma complexă. Avem

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2} = 4\pi\lambda\mu_0 \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial t} \text{ cu } \mathcal{E} = \mathcal{E}_c\, e^{\gamma^* y} e^{j\omega t}$$

în care

$$\alpha^* = \beta^* = 2\pi\sqrt{\lambda\mu_0 f} \qquad \gamma^* = \alpha^* \sqrt{2}\, e^{j\frac{\pi}{4}}.$$

Deoarece avem $\pm\gamma^*$, soluția ia forma

$$\mathcal{E} = (\mathcal{E}_{c1} e^{\gamma^* y} + \mathcal{E}_{c2} e^{-\gamma^* y}) e^{j\omega t}.$$

Dat fiindcă $\mathcal{E}$ descrește cînd y crește, se ia $\mathcal{E}_{c1} = 0$, astfel că

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_c e^{-\gamma^* y} e^{j\omega t}. \tag{4}$$

Ținîndu-se seama de ecuația diferențială

$$-\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t} = \frac{1}{\mu_0} \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial y}$$

în care

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_c\, e^{\gamma^* y} e^{j\omega t}$$

se obține

$$-j\omega \mathcal{H} = -\frac{1}{\mu_0} \gamma^* \mathcal{E}_c e^{-\gamma^* y} e^{j\omega t}$$

de unde se obține $\mathcal{H}$ în forma

$$\mathcal{H} = \frac{\gamma^*}{\mu_0 j\omega} \mathcal{E}_c e^{-\gamma^* y} e^{j\omega t}. \tag{5}$$

Determinarea constantei $\mathcal{E}_c$

Pentru $y = 0$ avem

$$\mathcal{H}_0 = \frac{\gamma^*}{\mu_0 j\omega} \mathcal{E}_c e^{j\omega t} \tag{6}$$

Pe de altă parte legea circuitului magnetic ne dă

$$H_0 l_p = 4\pi I \sqrt{2} \sin \omega t$$

sau

$$\mathscr{H}_0 = \frac{4\pi I\sqrt{2}}{l_p} e^{j\omega t} \tag{7}$$

în care

$$l_p = 2\Delta + 2b. \tag{8}$$

Ca urmare din (6) și (7) rezultă

$$\frac{\gamma^*}{\mu_0 j\omega}\mathscr{E}_c = \frac{4\pi I\sqrt{2}}{l_p}$$

astfel că

$$\mathscr{E}_c = \frac{4\pi I\sqrt{2}\,\mu_0 j\omega}{\gamma^* l_p}. \tag{9}$$

$\mathscr{E}$ și $\mathscr{H}$ iau formele

$$\mathscr{E} = \frac{4\pi I\sqrt{2}}{l_p}\,\frac{\mu_0 j\omega}{\gamma^*} e^{-\gamma^* y} e^{j\omega t}$$

$$\mathscr{H} = \frac{4\pi I\sqrt{2}}{l_p} e^{-\gamma^* y} e^{j\omega t}.$$

Se introduc

$$\gamma^* = \alpha^*\sqrt{2}\, e^{j\frac{\pi}{4}}; \qquad j = e^{j\frac{\pi}{2}}; \qquad \gamma^* = \alpha^*(1+j); \qquad \alpha^* = \beta^*$$

astfel că

$$\mathscr{E} = \frac{4\pi I}{l_p}\,\frac{\mu_0\omega}{\alpha^*}\, e^{j\frac{\pi}{4}} e^{-\alpha^*(1+j)\,y}\, e^{j\omega t}$$

de unde se deduce $E_{max}(y)$ în forma

$$E_{max}(y) = \frac{4\pi I}{l_p}\,\frac{\mu_0\omega}{\alpha^*} e^{-\alpha^* y}$$

iar E momentan devine

$$E = E_{max}(y)\sin\left(\omega t + \frac{\pi}{4} - \alpha^* y\right). \tag{10}$$

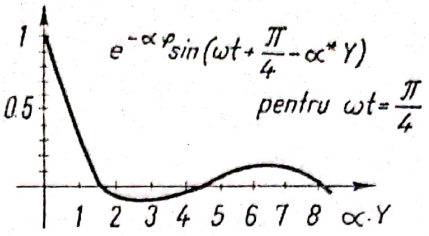
În diagrama din figura 33.306 se reprezintă

$$e^{-\alpha^* y}\sin\left(\omega t + \frac{\pi}{4} - \alpha^* y\right)$$

în funcție de $\alpha^* y$ pentru cazul $\omega t = \pi/4$.

Scanned with OKEN Scanner

33.306. $e^{-\alpha^* y} \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{4} - \alpha^* y\right)$ în funcție de $\alpha^* y$.



Pentru $\alpha^* y_1 = \frac{\pi}{2} = 1{,}57$ se obține

$$e^{-\alpha^* y_1} \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{4} - \alpha^* y_1\right) = 0.$$

De asemenea pentru $\alpha^* y_2 = 3\frac{\pi}{2} = 4{,}71$ se obține din nou

$$e^{-\alpha^* y_2} \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{4} - \alpha^* y_2\right) = 0.$$

De la $\alpha^* y$ egal cu zero pînă la $\alpha^* y = \alpha^* y_1$, E e dirijat în sens pozitiv și descrește.

Între $\alpha^* y_1$ și $\alpha^* y_2$, E e negativ; deci e dirijat în sens opus sensului pozitiv fixat.

Cu cît α^* e mai mare, cu atît E descrește mai repede cu creșterea lui y.

Determinarea căderii ohmice și inductive

Căderea de tensiune la suprafață $\mathcal{E}_0 l$ rămîne neschimbată pentru liniile de cîmp din interior. Avem

$$\mathcal{E}_0 l = I\sqrt{2}\, e^{j\omega t}(r + j\omega L)$$

în care

$$\mathcal{E}_0 = \frac{4\pi I}{l_p}\frac{\mu_0 \omega}{\alpha^*} e^{j\frac{\pi}{4}} e^{j\omega t} = \frac{4\pi I}{l_p}\frac{\mu_0 \omega}{\alpha^*}\frac{1+j}{\sqrt{2}} e^{j\omega t}$$

în care

$$1 + j = \sqrt{2}\, e^{j\frac{\pi}{4}}.$$

Ca urmare

$$\mathcal{E}_0 l = \frac{4\pi I}{l_p} l \frac{\mu_0 2\pi f}{\alpha^*}\frac{1+j}{\sqrt{2}} = I\sqrt{2}(r + j\omega L)$$

de unde se obține

$$r = \frac{2\pi l}{l_p}\sqrt{\frac{\mu_0 f}{\lambda}}; \quad L = \frac{l}{l_p}\sqrt{\frac{\mu_0}{\lambda f}}.$$

Din cele prezentate aci, se relevă cum se prezintă un circuit electric în care circulă un curent electric, în urma pătrunderii energiei electromagnetice în metal. Trecerea unui regim electromagnetic staționar de la o stare staționară la o altă stare staționară are loc, după cum s-a văzut, prin intermediul unui regim electromagnetic tranzitoriu, în care apare pătrunderea energiei electromagnetice în circuitul metalic. Prin exprimarea lui $\mathcal{E}$ în forma complexă, se obține într-o formă simplă căderea ohmică și inductivă din conductor.

Determinarea efectului Joule-Lenz

Efectul Joule-Lenz momentan p_c ia forma

$$p_c = \int_{y=0}^{\Delta} (E\lambda b\, \mathrm{d}y)^2 \frac{l}{\lambda b\, \mathrm{d}y} = \int_{y=0}^{\Delta} E^2 \lambda b l\, \mathrm{d}y.$$

Efectul Joule-Lenz mijlociu în raport cu o perioadă devine

$$P_c = \frac{1}{T}\int_0^T p_c\, \mathrm{d}t = \lambda b l \int_{y=0}^{\Delta} \mathrm{d}y \left(\frac{1}{T}\int_0^T E^2\, \mathrm{d}t\right) = \lambda b l \int_0^{\Delta} \frac{E_{\max}^2}{2}\, \mathrm{d}y$$

în care

$$E_{\max} = \frac{4\pi I}{l_p} \frac{\mu_0 \omega}{\alpha^*} \mathrm{e}^{-\alpha^* y}.$$

Se obține

$$P_c = \frac{\lambda b l}{2} \frac{(4\pi I)^2}{l_p^2} \left(\frac{\mu_0 \omega}{\alpha^*}\right)^2 \left(-\frac{1}{2\alpha^*} \mathrm{e}^{-2\alpha^* \Delta}\right)_0^{\Delta} =$$

$$= \frac{\lambda b l}{2} \frac{(4\pi I)^2}{l_p^2} \frac{(\mu_0 \omega)^2}{2\alpha^{*3}} (1 - \mathrm{e}^{-2\alpha^* \Delta}).$$

34. CALCULUL OPERAȚIONAL

Ca să ne dăm seama de rostul calculului operațional, ne punem problema: aplicarea calculului operațional la rezolvarea ecuațiilor diferențiale lineare de ordinul n cu coeficienți constanți folosite în cercetarea circuitelor electrice.

În figura 34.307 se prezintă un circuit electric cu un singur circuit în paralel.

Se cunosc parametrii r_0, L_0, r_1, L_1 și C precum și tensiunea de borne u_0. Se cere să se determine curenții electrici i_1, i_c și i_0.

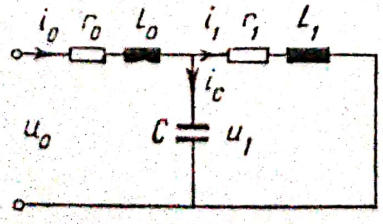


Fig. 34.307. Circuit electric.

În acest scop se formează mai întîi ecuația diferențială:

$$u_1 = L_1 \frac{di_1}{dt} + r_1 i_1. \tag{1}$$

Cu ajutorul ecuației diferențiale (1) se stabilește ecuația diferențială pentru i_c. Se obține

$$i_c = C \frac{du_1}{dt} = CL_1 \frac{d^2 i_1}{dt^2} + Cr_1 \frac{di_1}{dt} \tag{2}$$

care reprezintă o ecuație de gradul 2.

Se formează

$$i_0 = i_1 + i_c = i_1 + CL_1 \frac{d^2 i_1}{dt^2} + Cr_1 \frac{di_1}{dt} \tag{3}$$

În fine se obține tensiunea de borne u_0.

$$u_0 = L_0 \frac{di_0}{dt} + r_0 i_0 + u_1 = L_0 \frac{di_1}{dt} + CL_0 L_1 \frac{d^3 i_1}{dt^3} + CL_0 r_1 \frac{d^2 i_1}{dt^2} +$$

$$+ r_0 i_1 + Cr_0 L_1 \frac{d^2 i_1}{dt^2} + Cr_0 r_1 \frac{di_1}{dt} + L_1 \frac{di_1}{dt} + r_1 i_1 =$$

$$= CL_0 L_1 \frac{d^3 i_1}{dt^3} + (CL_0 r_1 + Cr_0 L_1) \frac{d^2 i_1}{dt^2} +$$

$$+ (L_0 + L_1 + Cr_0 r_1) \frac{di_1}{dt} + (r_0 + r_1)\, i_1. \tag{4}$$

Ca urmare pentru determinarea celor trei curenți electrici i_1, i_c și i_0 apar trei ecuații diferențiale în formele

$$a_3 \frac{d^3 i_1}{dt^3} + a_2 \frac{d^2 i_1}{dt^2} + a_1 \frac{di_1}{dt} + a_0 i_1 = u_0$$

$$i_c = b_2 \frac{d^2 i_1}{dt^2} + b_1 \frac{di_1}{dt} \tag{5}$$

$$i_0 = i_1 + i_c$$

în care coeficienții $a_3 \ldots a_0$ respectiv b_2, b_1 sînt cunoscuți.

Din exemplul de mai sus se desprinde următoarea remarcă:

Obținîndu-se pentru i_1 o ecuație diferențială de ordinul 3 cu coeficienți constanți, cu membrul al doilea diferit de zero, rezultă că și pentru ceilalți doi curenți i_c și i_0 se vor obține cîte o ecuație diferențială de același ordin sau de ordine diferite față de prima ecuație diferențială.

În figura 34.308 se prezintă un lanț din două circuite cuadripolare. Pentru legătura dintre tensiunea u_0 și tensiunea u_2 se obține o ecuație diferențială liniară de ordinul 4, ceea ce înseamnă că pentru ζ circuite cuadripolare în lanț, se va obține o ecuație diferențială liniară de ordinul 2ζ.

Scanned with OKEN Scanner

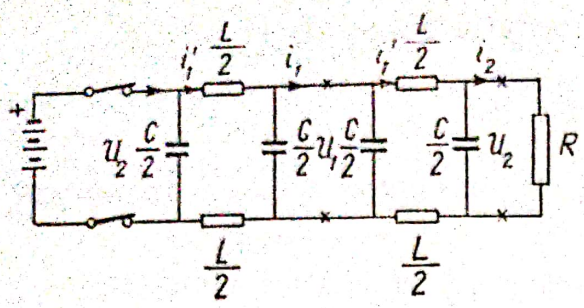


Fig. 34.308. Lanț din două circuite cuadripolare.

Avem

$$u_1 = u_2 + L\frac{\mathrm{d}i_2'}{\mathrm{d}t}$$

$$i_2' = i_2 + \frac{C}{2}\frac{\mathrm{d}u_2}{\mathrm{d}t} = \frac{u_2}{R} + \frac{C}{2}\frac{\mathrm{d}u_2}{\mathrm{d}t}$$

astfel că

$$u_1 = u_2 + \frac{L}{R}\frac{\mathrm{d}u_2}{\mathrm{d}t} + \frac{LC}{2}\frac{\mathrm{d}^2u_2}{\mathrm{d}t^2}.$$

Pentru legătura dintre u_1 și u_2 se obține o ecuație diferențială liniară de ordinul 2 în u_2.

Trecem la tensiunea u_0

$$u_0 = u_1 + L\frac{\mathrm{d}i_1'}{\mathrm{d}t}$$

$$i_1' = i_1 + \frac{C}{2}\frac{\mathrm{d}u_1}{\mathrm{d}t}$$

$$i_1 = i_2' + \frac{C}{2}\frac{\mathrm{d}u_1}{\mathrm{d}t}$$

astfel că

$$i_1' = C\frac{\mathrm{d}u_1}{\mathrm{d}t} + \frac{u_2}{R} + \frac{C}{2}\frac{\mathrm{d}u_2}{\mathrm{d}t}$$

sau

$$i_1' = \frac{LC^2}{2}\frac{d^3u_2}{\mathrm{d}t^3} + \frac{LC}{R}\frac{\mathrm{d}^2u_2}{\mathrm{d}t^2} + \frac{3C}{2}\frac{\mathrm{d}u_2}{\mathrm{d}t} + \frac{u_2}{R}.$$

Tensiunea u_0 la începutul lanțului devine

$$u_0 = \frac{(LC)^2}{2}\frac{d^4u_2}{\mathrm{d}t^4} + \frac{L^2C}{R}\frac{d^3u_2}{\mathrm{d}t^3} + 2LC\frac{d^2u_2}{\mathrm{d}t^2} + 2\frac{L}{R}\frac{\mathrm{d}u_2}{\mathrm{d}t} + u_2.$$

Pentru rezolvarea acestei ecuații diferențiale lineare de ordinul 4, este necesar să se rezolve o ecuație caracteristică de gradul 4.

Rezolvarea primei ecuații diferențiale.

Deosebim două cazuri, după cum tensiunea de borne u_0 este constantă sau reprezintă o funcție sinusoidală de timp.

Scanned with OKEN Scanner

Să considerăm mai întîi cazul cînd u_0 reprezintă o tensiune constantă în timp.

Curentul electric i_1 posedă două componente: una staționară, i_{1st} și cealaltă tranzitorie, i_{1tr}. Avem

$$i_1 = i_{1st} + i_{1tr} \tag{6}$$

în care

$$i_{1st} = \frac{u_0}{a_0}. \tag{7}$$

Curentul electric tranzitoriu e de forma

$$i_{1tr} = Ie^{pt} \tag{8}$$

și reprezintă soluția aceleiași ecuații diferențiale cu membrul al doilea egal cu zero.

Introducîndu-se i_{1tr} în ecuația diferențială se obține

$$a_3 \frac{d^3 i_{1tr}}{dt^3} + a_2 \frac{d^2 i_{1tr}}{dt^2} + a_1 \frac{di_{1tr}}{dt} + a_0 i_{1tr} = 0. \tag{9}$$

Se introduce în (9) i_{1tr} din (8) și se obține

$$F(p)\, I\, e^{pt} = 0 \tag{10}$$

în care

$$F(p) = a_3 p^3 + a_2 p^2 + a_1 p + a_0. \tag{11}$$

$F(p)$ e denumită funcția caracteristică.

Ecuația în forma (10) e satisfăcută cînd

$$F(p) = 0 \tag{12}$$

denumită ecuație caracteristică.

Fie p_1, p_2, p_3, soluțiile ecuației caracteristice. Ca urmare ecuația (10) ia forma

$$0.\{I_1 e^{p_1 t} + I_2 e^{p_2 t} + I_3 e^{p_3 t}\} = 0 \tag{13}$$

ceea ce ne arată că curentul electric tranzitoriu devine

$$i_{1tr} = I_1 e^{p_1 t} + I_2 e^{p_2 t} + I_3 e^{p_3 t}. \tag{14}$$

Curentul electric total i_1 se obține în forma

$$i_1 = i_{1st} + i_{1tr} = \frac{u_0}{a_0} + I_1 e^{p_1 t} + I_2 e^{p_2 t} + I_3 e^{p_3 t} =$$

$$= u_0 \left(\frac{1}{a_0} + A_1 e^{p_1 t} + A_2 e^{p_2 t} + A_3 e^{p_3 t} \right). \tag{15}$$

i_1 devine cunoscut cînd constantele I_1, I_2 și I_3 devin cunoscute. Pentru determinarea constantelor I_1, I_2 și I_3 ne folosim de condițiile inițiale ale circuitului electric și prin ele se vor forma trei ecuații pentru determinarea lor.

Exprimăm în acest scop curenții i_1, i_c și i_0. Avem

$$i_1 = I_1 e^{p_1 t} + I_2 e^{p_2 t} + I_3 e^{p_3 t} + \frac{u_0}{r_0 + r_1}$$

i_c se obține din (5) în forma

$$i_c = I_1(b_2p_1^2 + b_1p_1)e^{p_1t} + I_2(b_2p_2^2 + b_1p_2)e^{p_2t} + I_3(b_2p_3^2 + b_1p_3)e^{p_3t}.$$

În fine

$$i_0 = I_1(1 + \alpha_1)e^{p_1t} + I_2(1 + \alpha_2)e^{p_2t} + I_3(1 + \alpha_3)e^{p_3t} + \frac{u_0}{r_0 + r_1}$$

sau

$$i_0 = I_1\beta_1e^{p_1t} + I_2\beta_2e^{p_2t} + I_3\beta_3e^{p_3t} + \frac{u_0}{r_0 + r_1}.$$

La stabilirea condițiilor inițiale, se ia spre exemplu momentul conectării $t = 0$ în care avem $i_1 = 0$, deoarece circuitul posedă inductivitate; curentul i_c în momentul conectării e nul, deoarece avem $u_1 = 0$. Ca urmare pentru $t = 0$ avem și $i_0 = 0$.

Ca urmare determinarea constantelor I_1, I_2, I_3 se obține din rezolvarea următoarelor trei ecuații

$$\begin{aligned} 0 &= I_1 + I_2 + I_3 + \frac{u_0}{r_0 + r_1} \\ 0 &= I_1\alpha_1 + I_2\alpha_2 + I_3\alpha_3 \\ 0 &= I_1\beta_1 + I_2\beta_2 + I_3\beta_3 + \frac{u_0}{r_0 + r_1}. \end{aligned} \tag{16}$$

Aici intervine avantajul calculului operațional, în sensul că determinarea constantelor se obține pe o cale mai simplă.

34.1. PRIMA METODĂ DE DETERMINARE A CONSTANTELOR CU AJUTORUL CALCULULUI OPERAȚIONAL

Admitem că se cunoaște ecuația diferențială liniară de ordinul n cu coeficienți constanți și cu membrul al doilea diferit de zero.

Avem

$$a_n\frac{d^ni}{dt^n} + \ldots + a_1\frac{di}{dt} + a_0i = u \tag{1}$$

Se consideră cazul u = constant.

Curentul i apare în forma

$$i = i_{st} + i_{tr} \tag{2}$$

în care

$$i_{st} = \frac{u}{a_0} \qquad i_{tr} = I_1e^{p_1t} + \ldots + I_ne^{p_nt} \tag{3}$$

$p_1 \ldots p_n$ reprezintă soluțiile ecuației caracteristice

$$F(p) = a_np^n + \ldots + a_1p + a_0 = 0. \tag{4}$$

Scanned with OKEN Scanner

Pentru determinarea constantelor se reprezintă ecuația diferențială (1) în forma simbolică, introducîndu-se operatorii

$$p = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \qquad \frac{1}{p} = \int_0^t \mathrm{d}t \tag{5}$$

(vezi adausul matematic 5.1).

Forma simbolică a ecuației diferențiale (1) este

$$F(p)\, i(p) = u \tag{6}$$

în care $F(p)$ reprezintă de data aceasta un operator în forma

$$F(p) = a_n p^n + \ldots + a_1 p + a_0 \tag{7}$$

care nu trebuie confundat cu funcția caracteristică din (4).

Din ecuația diferențială în forma simbolică (6) cu operatorul $F(p)$ se obține

$$i(p) = \frac{u}{F(p)}. \tag{8}$$

Raportul $\frac{1}{F(p)}$ se descompune în fracții simple (vezi adaus 4.1.).

Ținîndu-se seama că i trebuie să exprime o sumă de doi curenți electrici: curentul staționar și curentul tranzitoriu, e necesar să se descompună în fracții simple raportul

$$\frac{1}{pF(p)} = \frac{A_0}{p} + \frac{A_1}{p - p_1} + \ldots + \frac{A_k}{p - p_k} + \ldots + \frac{A_n}{p - p_n} \tag{9}$$

în care

$$F(p) = (p - p_1) \ldots (p - p_k) \ldots (p - p_n). \tag{10}$$

Din

$$\frac{1}{F(p)} = A_0 + p\left[\frac{A_1}{p - p_1} + \ldots + \frac{A_k}{p - p_k} + \ldots + \frac{A_n}{p - p_n}\right] \tag{11}$$

se obține pentru $p = 0$

$$\frac{1}{F(0)} = A_0 = \frac{1}{a_0} \tag{12}$$

iar din

$$\frac{\frac{1}{pF(p)}}{p - p_k} = A_k + (p - p_k)\left[\frac{A_0}{p} + \ldots + \frac{A_n}{p - p_n}\right] \tag{13}$$

se obține pentru cazul cînd p tinde către p_k

$$\frac{1}{p_k F'(p_k)} = A_k. \tag{14}$$

S-a considerat cazul cînd $p = 0$ nu formează o soluție a ecuației $F(p) = 0$ și nu există rădăcini multiple.

Ca urmare din ecuaţia diferenţială în forma simbolică (8) se obţine $i(p)$ în forma

$$i(p) = u\left(A_0 + A_1\frac{p}{p-p_1} + \ldots + A_k\frac{p}{p-p_k} + \ldots + A_n\frac{p_n}{p-p_n}\right). \quad (15)$$

Se constată că operatorul $\frac{p}{p-1}$ care operează asupra lui 1 ne dă

$$\frac{p}{p-1}\cdot 1 = \left(1-\frac{p_1}{p}\right)^{-1}\cdot 1 = \left\{1+\frac{p_1}{p}+\left(\frac{p_1}{p}\right)^2+\ldots+\left(\frac{p_1}{p}\right)^m\ldots\right\}\cdot 1 = e^{p_1 t} \quad (16)$$

deoarece se obţine

$$\frac{1}{p} = \int_0^t dt = \frac{t}{1} \qquad \frac{1}{p^2} = \int_0^t dt\int_0^t dt = \frac{t^2}{1.2}\ \text{etc.} \quad (17)$$

astfel că

$$\frac{p}{p-1}\cdot 1 = 1+\frac{tp_1}{1!}+\frac{(tp_1)^2}{2!}+\ldots+\frac{(tp_1)^m}{m!}+\ldots = e^{p_1 t}. \quad (18)$$

Ca urmare, prin efectuarea operaţiei $\frac{p}{p-p_k}\cdot 1$ se obţine

$$\frac{p}{p-p_k}\cdot 1 = e^{p_k t}. \quad (19)$$

Ca urmare $i(p)$ din (15) devine

$$i(t) = u(A_0 + A_1 e^{p_1 t} + \ldots + A_k e^{p_k t} + \ldots + A_n e^{p_n t}) \quad (20)$$

în care

$$uA_0 = \frac{u}{a_0} = i_{st} \qquad uA_1 = I_1 \ldots \qquad uA_n = I_n.$$

Ca urmare ecuaţia diferenţială (1) posedă ca soluţie

$$i(t) = u\left[\frac{1}{F(0)} + \sum_{k=1}^{n}\frac{e^{p_k t}}{p_k F'(p_k)}\right] \quad (21)$$

în care apare $F(p)$ din (4).

Relaţia (21) e cunoscută în literatură sub denumirea de formula lui *Heaviside* (sau teorema dezvoltării) pentru u = constant.

Formula (21) este valabilă cînd $p = 0$ nu exprimă o rădăcină a ecuaţiei $F(p) = 0$ şi ecuaţia (4) nu posedă rădăcini multiple.

Se remarcă avantajul aplicării calculului operaţional la rezolvarea unei ecuaţii diferenţiale de ordinul n cu coeficienţi constanţi.

În cazul cînd $F(p)$ apare în forma

$$F(p) = \frac{f_1(p)}{f_2(p)} \quad (22)$$

Scanned with OKEN Scanner

se formează

$$\frac{1}{pF(p)} = \frac{f_2(p)}{pf_1(p)} = \frac{A_0}{p} + A_1\frac{1}{p-p_1} + A_k\frac{1}{p-p_k} + \ldots + A_n\frac{1}{p-p_n} \qquad (23)$$

cu condiția ca $f_2(p)$ să fie un polinom de grad mai mic ca $f_1(p)$.

Pentru constantele de mai sus se obțin expresiile

$$A_0 = \frac{f_2(0)}{f_1(0)} \qquad A_k = \frac{f_2(p_k)}{p_k f_1'(p_k)}. \qquad (24)$$

Ca urmare

$$i(p) = u\left(A_0 + A_1\frac{p}{p-p_1} + \ldots + A_k\frac{p}{p-p_k} + \ldots + A_n\frac{p}{p-p_n}\right) \qquad (25)$$

$$i(t) = u(A_0 + A_1 e^{p_1 t} + \ldots + A_k e^{p_k t} + \ldots + A_n e^{p_n t}. \qquad (26)$$

Cu toate că A_0 are dimensiunea $1/\Omega$, acest fapt nu ne îndreptățește să-i atribuim lui $F(p)$ denumirea de rezistență sau de impedanță, deoarece impedanța reprezintă raportul dintre amplitudinile diferenței de potențial și a curentului electric, în regim sinusoidal.

Luăm ca exemplu ecuația diferențială

$$L\frac{di}{dt} + ri = u$$

cu parametrii L, r ca mărimi constante.

Tensiunea de borne o considerăm constantă.

Se rezolvă mai întîi ecuația diferențială pe calea obișnuită.

Avem

$$i = i_{st} + i_{tr}$$

$$i_{st} = \frac{u}{r} \qquad i_{tr} = Ie^{pt}$$

i_{tr} formează soluția ecuației diferențiale

$$L\frac{di_{tr}}{dt} + ri_{tr} = 0$$

care devine

$$F(p)\, i_{tr} = 0$$

în care

$$F(p) = Lp + r = 0$$

astfel că

$$p_1 = -\frac{r}{L}$$

$$i = \frac{u}{r} + I_1 e^{-\frac{r}{L}t}.$$

Ţinîndu-se seama de condiţia iniţială în momentul conectării $t = 0$ avem $i = 0$ şi rezultă

$$I_1 = -\frac{u}{r}.$$

$$i = \frac{u}{r}\left((1 - e^{-\frac{r}{L}t}\right).$$

Trecem la aplicarea calculului operaţional la rezolvarea ecuaţiei diferenţiale.

Se exprimă ecuaţia diferenţială în forma simbolică

$$(Lp + r)\, i(p) = F(p)\, i(p) = u$$

de unde rezultă

$$i(p) = \frac{u}{F(p)}.$$

Dat fiindcă i posedă două componente, se dezvoltă în fracţii simple raportul

$$\frac{1}{pF(p)} = \frac{A_0}{p} + \frac{A_1}{p - p_1}.$$

Ca urmare

$$\frac{1}{F(p)} = A_0 + A_1 \frac{p}{p - p_1}$$

în care

$$A_0 = \frac{1}{F(0)} \qquad A_1 = \frac{1}{p_1 F'(p_1)} \qquad p_1 = -\frac{r}{L}.$$

Avem

$$A_0 = \frac{1}{r} \qquad F'(p) = L \qquad p_1 F'(p_1) = -r.$$

Operatorul $\frac{p}{p-1} \cdot 1$ ne dă $\frac{p}{p-1} \cdot 1 = e^{p_1 t}$.

Ca urmare din ecuaţia diferenţială în forma simbolică se obţine

$$i(t) = \frac{u}{r}\left(1 - e^{-\frac{r}{L}t}\right).$$

Dat fiindcă formula lui Heaviside nu are o aplicabilitate generală, ne folosim de o nouă metodă pentru determinarea curentului electric, care constă din folosirea integralei Fourier-Mellin.

În Adaus la partea a doua, paragraful 4.7, se arată cum se foloseşte integrala Fourier în cadrul funcţiilor de variabilă complexă şi cum se defineşte o astfel de integrală.

34.2. INTEGRALA FOURIER-MELLIN PENTRU u = CONSTANT

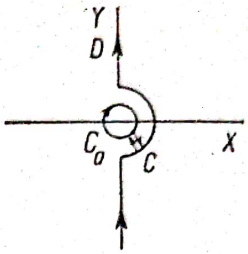


Fig. 34.309. Integrala Fourier.

Integrala Fourier pentru u = constant are forma

$$\frac{1}{2\pi j}\int_{-j\infty}^{+j\infty}\frac{u\,e^{pt}}{p}\,dp = u \qquad (1)$$

în care e^{pt}/p este o funcție olomorfă (uniform continuă și analitică în domeniul D de partea stîngă a ordonatei și între curbele C și C_0 din fig. 34.309).

Curba C_0 este un cerc cu o rază foarte mică și cu centrul în originea sistemului de coordonate care exprimă un pol al funcției e^{pt}/p.

Conform teoremei lui Cauchy se obține

$$\int_{-j\infty}^{+j\infty}\frac{e^{pt}}{p}\,dp + \int_{C_0}\frac{e^{pt}}{p}\,dp = 0 \qquad (2)$$

în care integrala efectuată pentru C_0 e efectuată pentru α negativ.

Datorită acestui fapt ea este negativă față de prima integrală și au valori numerice egale luate absolut.

În baza formulei lui Cauchy se obține, în sensul negativ al lui α

$$\frac{1}{2\pi j}\int_{C_0}\frac{e^{pt}}{p}\,dp = -1 \qquad \text{pentru } t>0$$

valabilă cînd raza cercului tinde către zero.

Ca urmare

$$\frac{1}{2\pi j}\int_{-j\infty}^{+j\infty}\frac{e^{pt}}{p}\,dp = 1 \text{ valabilă pentru } t>0.$$

Pentru $t<0$ avem

$$\frac{1}{2\pi j}\int_{-j\infty}^{+j\infty}\frac{e^{pt}}{p}\,dp = 0.$$

Ca urmare integrala Fourier în forma (1) prezintă o deosebită importanță pentru studiul fenomenelor tranzitorii, deoarece cu ajutorul ei se exprimă tensiunea de borne u ca funcție de timp înainte cît și după conectarea circuitului la momentul $t=0$.

Figura 34.310 reprezintă tensiunea de borne u ca funcție de timp cu ajutorul integralei Fourier.

Pentru cercetarea circuitului electric din momentul conectării $t=0$ se stabilește o ecuație diferențială în forma

$$u\,\frac{e^{pt}}{p}\,dp = di(t)\,F(p) \qquad (3)$$

care ne conduce la integrala Fourier-Mellin pentru curentul electric $i(t)$ în forma

$$i(t) = \frac{1}{2\pi j}\int_{-j\infty}^{+j\infty}\frac{e^{pt}}{p(F)p}\,u\,dp = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{u}{pF(p)}\right] \qquad (4)$$

denumită de unii autori integrala lui Bromwich sau formula de inversiune.

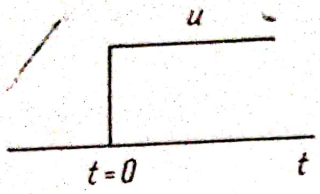


Fig. 34.310. Tensiunea de borne u ca funcție de timp.

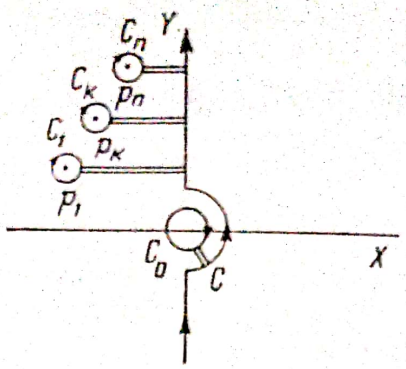


Fig. 34.311. Punctele $p_1 \ldots p_k \ldots p_n$ în planul complex.

Exactitatea formulei (4) se verifică în felul următor:

Admitem că se cunoaște funcția caracteristică $F(p)$; cu alte cuvinte se cunoaște descompunerea în fracții simple

$$\frac{1}{pF(p)} = \frac{A_0}{p} + \frac{A}{p-p_1} + \ldots + \frac{A_k}{p-p_k} + \ldots + \frac{A_n}{p-p_n} \tag{5}$$

în care $p_1 \ldots p_k \ldots p_n$ reprezintă rădăcinile ecuației caracteristice

$$F(p) = 0. \tag{6}$$

Aceste rădăcini apar în planul complex din figura 34.311 ca puncte singulare și anume ca poli de ordinul 1 ale funcției olomorfe

$$\frac{e^{pt}}{pF(p)}.$$

Ca urmare (4) ia forma

$$i(t) = \frac{1}{2\pi j}\int_{-j\infty}^{+j\infty} e^{pt} u \left\{\frac{A_0}{p} + \frac{A_1}{p-p_1} + \ldots + \frac{A_k}{p-p_k} + \ldots + \frac{A_n}{p-p_n}\right\}. \tag{7}$$

La efectuarea integralei Fourier-Mellin din (7) se constată că nu se mai folosește forma simbolică cu operatorul p pentru ecuația diferențială.

Se aplică teorema lui Cauchy pentru funcția olomorfă $\frac{e^{pt}}{p-p_k} uA_k$ în felul următor

$$\frac{1}{2\pi j}\int_{-j\infty}^{+j\infty} \frac{e^{pt}}{p-p_k} uA_k \, dp + \frac{1}{2\pi j}\int_{C_k} \frac{e^{pt}}{p-p_k} uA_k \, dp = 0. \tag{8}$$

La efectuarea integralei pentru cercul C_k conform formulei lui Cauchy, se introduc

$$e^{pt} = e^{p_k t} + (p-p_k)te^{p_k t}$$

$$p - p_k = \delta r \cdot e^{j\alpha}$$

$$dp = \delta r \cdot je^{j\alpha} \, d\alpha$$

$$\frac{dp}{p-p_k} = j d\alpha$$

Scanned with OKEN Scanner

astfel că

$$\frac{e^{pt}}{p-p_k} = \frac{e^{p_k t}}{p-p_k} + t e^{p_k t}$$

$$\int_{C_k} \frac{e^{pt}}{p-p_k} dp = e^{p_k t} \int_{C_k} \frac{dp}{p-p_k} + t e^{p_k t} \int_{C_k} dp = -e^{p_k t} (2\pi j)$$

deoarece $d\alpha$ e negativ și

$$\int_{C_k} \delta r \cdot j e^{j\alpha} \cdot d\alpha = \delta r (e^{j\alpha})_{2\pi}^{0} = 0.$$

Ca urmare se obține

$$\frac{1}{2\pi k} \int_{C_k} \frac{e^{pt}}{p-p_k} uA_k dp = -e^{p_k t} uA_k. \tag{9}$$

Din (8) se obține

$$\frac{1}{2\pi j} \int_{-j\infty}^{+j\infty} \frac{e^{pt}}{p-p_k} uA_k dp = e^{p_k t} uA_k \tag{10}$$

în care

$$A_k = \frac{1}{p_k F'(p_k)}.$$

Integrala Fourier-Mellin din (7) devine

$$i(t) = u \left[\frac{1}{F(0)} + \sum_{k=1}^{n} \frac{e^{p_k t}}{p_k F'(p_k)} \right].$$

Cu ajutorul integralei Fourier-Mellin și a teoremei și formulei lui Cauchy se obține formula lui Heaviside.

Spre exemplu în cazul cînd $-p_1$, $-p_2$ devin pozitive, ca ele să nu apară în dreapta axei y, se efectuează integrala Fourier-Mellin între limitele $x_0 - j\infty$ și $x_0 + j\infty$.

x_0 este astfel luată, încît toate punctele singulare să se găsească de partea stîngă a dreptei ce trece prin x_0 paralelă cu ordonata.

În acest caz se obține

$$i(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{x_0-j\infty}^{x_0+j\infty} \frac{e^{pt} \cdot u}{pF(p)} dp. \tag{11}$$

Se remarcă că determinarea curentului $i(t)$ cu ajutorul integralei Fourier-Mellin are loc și în cazul cînd $F(p) = 0$ posedă pe $p = 0$ ca o rădăcină. Pot să existe și rădăcini multiple.

Prin aplicarea integralei Fourier-Mellin nu mai apar restricțiile care erau impuse la aplicarea formulei lui Heaviside.

Să luăm ca exemplu ecuația diferențială

$$L \frac{di}{dt} = u$$

la care $p = 0$ formează o soluție a ecuației caracteristice $F(p) = 0$.

Scanned with OKEN Scanner

Avem

$$F(p) = Lp$$

$$F(p) = 0 \text{ pentru } p = 0.$$

Se formează

$$\frac{1}{pF(p)} = \frac{1}{p^2L} = \frac{A_0}{p^2} + \frac{A_1}{p}.$$

Rezultă

$$A_0 = \frac{1}{L} \qquad A_1 = 0.$$

Integrala Fourier-Mellin ia forma

$$i(t) = \frac{1}{2\pi j}\int_{-j\infty}^{+j\infty} \frac{e^{pt}}{Lp^2}\, u dp. \tag{12}$$

Se formează integrala pentru cercul C_0 din figura 34.311 parcurs în sens negativ. Din

$$f(p) = f(p_k) + \frac{p - p_k}{1} f'(p_k)$$

în care

$$f(p) = e^{pt} \quad p_k = 0$$

rezultă

$$e^{pt} = 1 + pt.$$

Pentru cercul C_0 se obține

$$\frac{1}{2\pi j}\int_{C_0} \frac{e^{pt}}{Lp^2}\, u dp = \frac{1}{2\pi j}\int_{C_0} \frac{u}{Lp^2}\, dp + \frac{1}{2\pi j}\int_{C_0} \frac{u}{Lp}\, t dp = -\left(\frac{u}{L}\, t\right)$$

în care

$$p = \delta r \cdot e^{j\alpha}; \qquad dp = \delta r \cdot j e^{j\alpha} d\alpha.$$

Ca urmare (12) devine

$$i(t) = \frac{u}{L}\, t. \tag{13}$$

De altfel și direct din ecuația

$$L\frac{di}{dt} = u$$

Scanned with OKEN Scanner

rezultă

$$i = \frac{u}{L} t$$

cu condiția ca în momentul conectării $t = 0$ să avem $i = 0$, ceea ce este posibil.

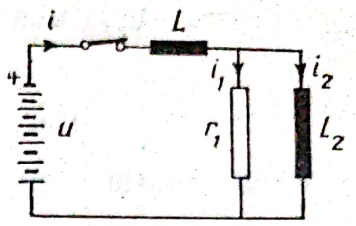


Fig. 34.312. Circuit electric.

Să considerăm ca un al doilea exemplu circuitul din figura 34.312.

Pentru i, i_1 și i_2 se obțin ecuațiile diferențiale

$$L \frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + i_1 r_1 = u$$

$$i_1 r_1 = L_2 \frac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t} = L_2 \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} (i - i_1)$$

$$i = i_1 + i_2.$$

La determinarea funcției $F(p)$ se recomandă să se introducă simbolul p în locul lui $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}$. Se obține

$$Lpi + r_1 i_1 = u$$

$$(L_2 p + r_1) i_1 = L_2 p i$$

de unde se obține

$$i_1(p) = \frac{L_2 p}{L_2 p + r_1} i(p)$$

astfel că

$$\left(Lp + \frac{r_1 L_2 p}{L_2 p + r_1}\right) i(p) = u$$

în care

$$F(p) = Lp + \frac{r_1 L_2 p}{L_2 p + r_1}$$

sau

$$F(p) = \frac{f_1(p)}{f_2(p)} = \frac{LL_2 p^2 + p(Lr_1 + L_2 r_1)}{L_2 p + r_1}.$$

Se constată că $p = 0$ formează o soluție a ecuației $F(p) = 0$; formula lui Heaviside nu se aplică.

Pentru efectuarea integralei Fourier-Mellin se formează

$$\frac{1}{pF(p)} = \frac{L_2p + r_1}{LL_2p^2(p - p_1)} = \frac{A}{p^2} + \frac{A_1}{p} + \frac{B}{p - p_1}.$$

Din ecuația

$$f_1(p) = p[LL_2p + (Lr_1 + L_2r_1)] = 0$$

se obține

$$p_1 = -\frac{r_1(L + L_2)}{LL_2}.$$

Pentru determinarea constantelor A, A_1, B se formează:

$$\frac{L_2p + r_1}{LL_2} = A(p - p_1) + A_1p(p - p_1) + Bp^2 = p^2(A_1 + B) + p(A - A_1p_1) - Ap_1$$

de unde se deduc

$$A_1 + B = 0 \qquad \frac{1}{L} = A - A_1p_1 \qquad \frac{r_1}{LL_2} = -Ap_1$$

astfel că

$$A = -\frac{r_1}{LL_2p_1} = \frac{L}{L + L_2}; \quad A_1 = -\left(\frac{1}{p_1L} + \frac{r_1}{LL_2p_1^2}\right) = \frac{L_2^2}{r_1(L + L_2)^2}$$

$$B = -\frac{L_2^2}{r_1(L + L_2)^2}.$$

Ca urmare

$$i(t) = \frac{1}{2\pi j}\int_{-j\infty}^{+j\infty} \frac{e^{pt}}{pF(p)}\,u\,dp = \frac{1}{2\pi j}\int_{-j\infty}^{+j\infty} e^{pt}\,u\left(\frac{A}{p^2} + \frac{A_1}{p} + \frac{B}{p - p_1}\right)dp$$

de unde rezultă

$$i(t) = u(At + A_1 + Be^{p_1t}) = \frac{u}{L + L_2}\left(t + \frac{L_2^2}{r_1(L + L_2)}\left(1 - e^{-r_1\frac{L + L_2}{LL_2}t}\right)\right).$$

34.3. INTEGRALA LAPLACE PENTRU u CONSTANT

După cum cu ajutorul integralei Fourier-Mellin se obține $i(t)$ în funcție de raportul $u/pF(p)$, se poate pune și problema inversă și anume să se determine funcția caracteristică $F(p)$ atunci cînd se cunoaște $i(t)$.

Scanned with OKEN Scanner

În acest scop ne folosim de integrala Laplace în forma

$$\frac{u}{pF(p)} = \int_0^\infty e^{-pt} i(t)dt = \mathcal{L}[i(t)]. \tag{1}$$

Parametrul p se exprimă în general printr-un număr complex în forma

$$p = \beta + j\,\alpha.$$

Din analiza matematică se știe că integrala Laplace în forma

$$\int_0^\infty e^{-px}\,dx$$

reprezintă o integrală definită improprie deoarece ea posedă un sens (este convergentă) numai dacă numărul real β este pozitiv.

În relația (1) mărimea $u/F(p)$ este denumită imaginea sau transformata funcției originale $i(t)$ și are aceeași dimensiune ca și $i(t)$. Deoarece p are dimensiunea lui $1/t$, așa cum ne arată e^{pt}, rezultă că în (1) cei doi termeni din stînga și din dreapta egalității posedă aceeași dimensiune. $1/F(p)$ are dimensiunea de $1/\Omega$.

Din

$$\int e^{ax} f(x)\,dx = \frac{e^{ax}}{a}\left[f(x) - \frac{f'(x)}{a} + \frac{f''(x)}{a^2} - \cdots\right] + C \tag{2}$$

în care a are dimensiunea inversă a lui x, se constată că în

$$a\int e^{ax} f(x)dx = e^{ax}\left[f(x) - \frac{f'(x)}{a} + \frac{f''(x)}{a^2} - \cdots\right] + C \tag{3}$$

termenii din dreapta și din stînga egalității posedă aceeași dimensiune ca dimensiunea funcției $f(x)$.

Relația (1) se verifică ușor.

Admitem că se cunoaște $i(t)$ în forma

$$i(t) = u(A_0 + A_1 e^{p_1 t} + \ldots + A_k e^{p_k t} + \ldots + A_n e^{p_n t}) \tag{4}$$

Se formează

$$p\int_0^\infty e^{-pt} i(t)dt = p\int_0^\infty e^{-pt} u(A_0 + A_1 e^{p_1 t} + \ldots + A_k e^{p_k t} + \ldots + A_n e^{p_n t})\,dt =$$

$$= p\left[\frac{u}{-p} A_0 e^{-pt} + \frac{u}{-(p-p_1)} A_1 e^{-(p-p)t} + \ldots + \frac{u}{-(p-p_k)} A_k e^{-(p-p_k)t} + \right.$$

$$\left. + \ldots + \frac{u}{-(p-p_n)} A_n e^{-(p-p_n)}\right]_0^\infty = u\left(A_0 + A_1\frac{p}{p-p_1} + \ldots + A_k\frac{p}{p-p_k} + \right.$$

$$\left. + \ldots + A_n\frac{p}{p-p_n}\right) = \frac{u}{F(p)} \tag{5}$$

ceea ce verifică relația (1).

Să luăm ca exemplu curentul i în forma

$$i = \frac{u}{L}\, t.$$

Pentru transformata funcției $i(t)$ avem

$$\frac{u}{F(p)} = p\int_0^\infty \mathrm{e}^{-pt} i(t)\,\mathrm{d}t = p\int_0^\infty \mathrm{e}^{-pt}\,\frac{u}{L}\,t\,\mathrm{d}t = p\,\frac{u}{L}\left[\frac{\mathrm{e}^{-pt}}{p}\left(t+\frac{1}{p}\right)\right]_0^\infty =$$

$$= -\frac{u}{L}\left[t\,\mathrm{e}^{-pt} + \frac{1}{p}\,\mathrm{e}^{-pt}\right]_0^\infty = \frac{u}{Lp}$$

ceea ce corespunde funcției $F(p) = Lp$, care corespunde ecuației diferențiale

$$L\,\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} = u.$$

În tabelele de corespondență dintre funcția imagine și funcția original, funcția imagine se reprezintă prin $\varphi(p)$. Se scrie:

$$\varphi(p) = \int_0^\infty \Phi(t)\,\mathrm{e}^{-pt}\,\mathrm{d}t. \tag{6}$$

În cazul cînd funcția original este $i(t)$, înseamnă că funcția imagine $\varphi(p)$ se reprezintă prin $u/pF(p)$. La folosirea formulei (6) trebuie să se țină seama de dimensiunile mărimilor pentru a evita o greșală.

34.4. ECUAȚIA INTEGRALĂ SIMBOLICĂ

Din cele dezvoltate mai sus s-a văzut că pentru determinarea funcției original $i(t)$ și a funcției imagine $u/pF(p)$, care corespund unei ecuații diferențiale de ordinul n cu coeficienți constanți și cu membrul al doilea u constant, s-au folosit integrala Fourier-Mellin, respectiv integrala lui Laplace în formele

$$i(t) = \frac{1}{2\pi\mathrm{j}}\int_{-\mathrm{j}\infty}^{+\mathrm{j}\infty} \frac{\mathrm{e}^{pt}}{pF(p)}\,u\,\mathrm{d}p$$

$$\frac{u}{pF(p)} = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-pt} i(t)\mathrm{d}t$$

fără să fie necesar de a se reprezenta ecuația diferențială în forma simbolică cu p ca operator.

De data aceasta ecuația diferențială obișnuită poate fi pusă în forma unei ecuații integrale simbolice.

Scanned with OKEN Scanner

Să luăm ca exemplu ecuația integro-diferențială în forma:

$$L\frac{di}{dt} + ri + \frac{1}{C}\int_0^t i\,dt = u \tag{1}$$

cu r, L, C și u ca mărimi constante.

Se înmulțesc termenii ecuației (1) cu $e^{-pt}\,dt$ și după efectuarea integralelor se înmulțesc termenii cu p. Se obține

$$p\int_0^\infty L\frac{di}{dt}e^{-pt}\,dt + p\int_0^\infty ri\,e^{-pt}\,dt + \frac{p}{C}\int_0^\infty e^{-pt}\,dt\int_0^t i\,dt = p\int_0^\infty e^{-pt}u\,dt. \tag{2}$$

Se efectuează mai întîi calculele

$$\frac{d}{dt}\left(e^{-pt}i(t)\right) \text{ și } \frac{d}{dt}\left(e^{-pt}\int_0^t i\,dt\right). \tag{3}$$

Se obține

$$\frac{d}{dt}\left(e^{-pt}i(t)\right) = -pe^{-pt}i(t) + e^{-pt}\frac{di}{dt}. \tag{4}$$

Ca urmare

$$\int_0^\infty e^{-pt}\frac{di}{dt}\,dt = p\int_0^\infty e^{-pt}i(t)\,dt + \left(e^{-pt}i(t)\right)_0^\infty \tag{5}$$

în care pentru $t = 0$ avem $i = 0$, iar pentru $t = \infty$ avem $e^{-pt}i = 0$.

Ca urmare (5) ia forma

$$\int_0^\infty e^{-pt}\frac{di}{dt}\,dt = p\int_0^\infty e^{-pt}i\,dt. \tag{6}$$

A doua relație din (3) devine

$$\frac{d}{dt}\left(e^{-pt}\int_0^t i\,dt\right) = -p\,e^{-pt}\int_0^t i\,dt + e^{-pt}i \tag{7}$$

astfel că

$$\int_0^\infty e^{-pt}\,dt\int_0^t i\,dt = \frac{1}{p}\int_0^\infty e^{-pt}i\,dt - \frac{1}{p}\left[e^{-pt}\int_0^t i\,dt\right]_0^\infty \tag{8}$$

în care pentru $t = 0$ avem $i = 0$, iar pentru $t = \infty$ avem $e^{-pt} = 0$.

Ca urmare din (8) se obține:

$$\int_0^\infty e^{-pt}\,dt\int_0^t i\,dt = \frac{1}{p}\int_0^\infty e^{-pt}i(t)\,dt \tag{9}$$

Ținîndu-se seama de expresiile din (6) și (9) pe care le obțin integralele din (2), relația (2) devine

$$\left(Lp^2 + pr + \frac{p}{pC}\right)\int_0^\infty e^{-pt} i\,dt = p\int_0^\infty e^{-pt} u\,dt$$

sau

$$\left(Lp + r + \frac{1}{pC}\right) p\int_0^\infty e^{-pt} i\,dt = p\int_0^\infty e^{-pt} u\,dt. \tag{10}$$

Relația (10) reprezintă ecuația integro-diferențială în forma unei ecuații integrale simbolice. O denumim simbolică pentru că ea e dedusă pe cale simbolică din ecuația integro-diferențială (1).

Se constată că în (10) p nu mai reprezintă simbolul unui operator de forma $\frac{d}{dt}$.

Deoarece p are dimensiunea de $1/t$ rezultă că integralele din (10) posedă dimensiunea lui i respectiv u. Ca urmare introducîndu-se

$$p\int_0^\infty e^{-pt} i\,dt = i(p) \qquad p\int_0^\infty e^{-pt} u\,dt = u(p) \tag{11}$$

rezultă

$$Lp + r + \frac{1}{pC} = F(p) \tag{12}$$

astfel că

$$F(p)i(p) = u(p). \tag{13}$$

Relația (13) seamănă cu aceea obținută din ecuația diferențială simbolică cu p ca un operator.

De data aceasta relația (13) corespunde unei ecuații integrale simbolice, în care p nu mai exprimă un operator. La stabilirea formulei lui Heaviside $F(p)$ exprima un operator în care $\frac{p}{p - p_k} \cdot 1$, reprezenta $e^{p_k t}$.

La folosirea integralei Fourier-Mellin, a integralei lui Laplace și a ecuației integrale simbolice, p reprezintă o mărime de aceeași natură ca p_k.

34.5. APLICAREA CALCULULUI OPERAȚIONAL ÎN STUDIUL CIRCUITELOR ELECTRICE PENTRU u SINUSOIDAL

Din cele ce urmează se va vedea că în cazul cînd tensiunea de borne u este o funcție sinusoidală de timp și cînd nu ne folosim de exprimarea tensiunii în forma complexă, funcția $F(p)$ se stabilește numai cu ajutorul ecuației integrale simbolice.

Să luăm ca exemplu ecuația diferențială

$$L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + ri = u \tag{1}$$

în care

$$u = u_m \sin \omega t \tag{2}$$

L și r reprezintă parametri constanți.

Avem

$$i = i_{st} + i_{tr} \tag{3}$$

în care

$$i_{st} = i_m \sin(\omega t - \varphi) = \frac{u_m}{z} \sin(\omega t - \varphi)$$
$$z = \sqrt{r^2 + (\omega L)^2} \qquad \operatorname{tg} \varphi = \frac{\omega L}{r}. \tag{4}$$

Pentru determinarea curentului electric tranzitoriu i_{tr} se ia ecuația diferențială (1) cu membrul al doilea făcut egal cu zero.

Din

$$\frac{\mathrm{d}i_{tr}}{\mathrm{d}t} + ri_{tr} = 0 \tag{5}$$

în care

$$i_{tr} = I\,\mathrm{e}^{pt} \tag{6}$$

se obține ecuația caracteristică ca pentru u constant.

Avem

$$Lp + r = F(p) = 0 \tag{7}$$

de unde se deduce

$$p_1 = -\frac{r}{L}.$$

În consecință se obține

$$i = i_{st} + i_{tr} = \frac{u_m}{z} \sin(\omega t - \varphi) + \frac{u_m}{z} \sin \varphi\, \mathrm{e}^{p_1 t}. \tag{8}$$

Constanta I a fost determinată ținîndu-se seama de condiția inițială și anume: în momentul conectării $t = 0$, curentul electric total i e nul pentru că circuitul posedă inductivitatea L.

Pentru a se putea folosi ecuaţia diferenţială simbolică cu scopul de a se obţine funcţia caracteristică simbolică $F(p)$ la determinarea curentului electric total i, este necesar să se exprime tensiunea momentană u în forma complexă.

Se introduce

$$\mathcal{U} = u_m \, e^{j\omega t} \tag{9}$$

Cînd se trece la forma obişnuită

$$u = u_m \sin \omega t$$

se consideră din

$$\mathcal{U} = u_m (\cos \omega t + j \sin \omega t)$$

numai factorul înmulţit cu j.

Se scrie în forma complexă şi ecuaţia diferenţială pentru curentul electric staţionar i_{st}. Avem

$$L \frac{d\mathcal{I}_{st}}{dt} + r\mathcal{I}_{st} = \mathcal{U} \tag{10}$$

în care

$$\mathcal{I}_{st} = \mathcal{I}_c \, e^{j\omega t}. \tag{11}$$

Introducînd pe $\mathcal{I}_{st}$ în (10) se obţine

$$(L j \omega + r) \mathcal{I}_c = z\mathcal{I}_c = u_m \tag{12}$$

de unde se deduce $\mathcal{I}_c$. Avem

$$\mathcal{I}_c = \frac{u_m}{j\omega L + r} = \frac{u_m}{z} = \frac{u_m}{z} e^{-j\varphi} \tag{13}$$

în care

$$z = r + j\omega L = z e^{j\varphi}; \quad \operatorname{tg} \varphi = \frac{\omega L}{r}. \tag{14}$$

Curentul electric tranzitoriu i_{tr} se obţine din

$$L \frac{di_{tr}}{dt} + r i_{tr} = 0 \tag{15}$$

în care

$$i_{tr} = I e^{p_1 t} \tag{16}$$

$$F(p_1) = Lp_1 + r = 0. \tag{17}$$

Scanned with OKEN Scanner

Curentul electric staționar își păstrează aceeași formă indiferent dacă u e constant sau sinusoidal.

Curentul electric total ia forma

$$\mathcal{J} = \mathcal{J}_{st} + i_{tr} = u_m e^{j\omega t}\left(\frac{1}{z} + A_1 e^{(p-j\omega)t}\right) = u_m e^{j\omega t}\frac{1}{z}(1 - e^{(p-j\omega)t}) \quad (18)$$

în care $A_1 = -1/z$ pentru $t = 0$ și $\mathcal{J} = 0$.

Pentru a se obține $\mathcal{J}$ din (15) din ecuația diferențială simbolică în forma

$$F(p)\mathcal{J}(p) = \mathcal{U} \quad (19)$$

să urmărim cum s-a ajuns la $i(p)$ cînd u era constant.

Pentru u constant ecuația diferențială simbolică are forma

$$(Lp + r)\, i(p) = u$$

în care

$$p = \frac{d}{dt}$$

S-a format

$$F(p) = (Lp + r) = 0$$

și s-a obținut

$$p_1 = -\frac{r}{L}.$$

S-a descompus în fracții simple

$$\frac{1}{pF(p)} = \frac{A_0}{p} + \frac{A_1}{p - p_1} \quad (20)$$

în care

$$A_0 = \frac{1}{F(0)} = \frac{1}{r}; \qquad A_1 = \frac{1}{p_1 F'(p_1)} = -\frac{1}{r}.$$

S-a format

$$i(p) = \frac{u}{F(p)} = u\left(A_0 + A_1 \frac{p}{p - p_1}\cdot 1\right) \quad (21)$$

în care operatorul $\frac{p}{p - p_1}\cdot 1$ devine

$$\frac{p}{p - p_1}\cdot 1 = e^{p_1 t}.$$

Ca urmare

$$i(t) = \frac{U}{r}(1 - e^{p_1 t}). \tag{22}$$

Prin introducerea tensiunii de borne u, în forma sinusoidală (9) s-a obținut $\mathcal{I}$ în forma (18).

Se constată că

$$A_0 = \frac{1}{z}. \tag{23}$$

Obținerea lui A_0 în forma (23) e posibilă dacă se introduce în locul relației (20)

$$\frac{1}{(p - j\omega)F(p)} = \frac{A_0}{p - j\omega} + \frac{A_1}{p - p_1}. \tag{24}$$

Pentru determinarea lui A_0 se face $p - j\omega = 0$ astfel că $p = j\omega$

$$A_0 = \frac{1}{F(j\omega)} = \frac{1}{j\omega L + r} = \frac{1}{z}. \tag{25}$$

Pentru A_1 se obține

$$A_1 = \frac{1}{(p_1 - j\omega)F'(p_1)} \tag{26}$$

în care

$$p_1 - j\omega = -\frac{r}{L} - j\omega = -\frac{z}{L}$$

$$F(p) = pL + r \qquad F'(p) = L$$

$$(p_1 - j\omega)F'(p_1) = -\frac{z}{L}L = -z.$$

Ca urmare

$$A_1 = -\frac{1}{z}$$

$$\mathcal{I}(p) = \frac{\mathcal{U}}{F(p)} = \mathcal{U}\left(A_0 + A_1\frac{p - j\omega}{p - p_1}\right) \tag{27}$$

în care

$$\frac{p - j\omega}{p - p_1} = \frac{p - j\omega}{(p - j\omega) - (p_1 - j\omega)} \cdot 1 = e^{(p_1 - j\omega)t} \tag{28}$$

astfel că

$$\mathcal{I}(t) = \mathcal{U}\frac{1}{\varepsilon}(1 - e^{(p_1 - j\omega)t})$$

care corespunde lui $\mathcal{I}(t)$ din (18).

Pentru ecuația diferențială liniară de ordinul n cu coeficienți constanți și cu membrul al doilea în forma unei funcții sinusoidale de timp, se obține ecuația diferențială simbolică în forma

$$F(p)\,\mathcal{I}(p) = \mathcal{U}$$

în care

$$F(p) = a_n p^n + \ldots + a_1 p + a_0.$$

Se introduce

$$\frac{1}{(p - j\omega)F(p)} = \frac{A_0}{p - j\omega} + \frac{A_1}{p - p_1} + \cdots + \frac{A_k}{p - p_k} + \cdots + \frac{A_n}{p - p_n}$$

în care p_1, p_2 ... p_n reprezintă rădăcinile ecuației caracteristice

$$F(p) = 0.$$

Avem

$$A_0 = \frac{1}{F(j\omega)}; \quad A_k = \frac{1}{(p_k - j\omega)F'(p_k)}$$

astfel că

$$\frac{1}{F(p)} = A_0 + A_1\frac{p - j\omega}{p - p_1} + \ldots + A_n\frac{p - j\omega}{p - p_n}$$

$$\mathcal{I}(p) = \mathcal{U}\frac{1}{F(p)} = \mathcal{U}\left(A_0 + A_1\frac{p - j\omega}{p - p_1} + \ldots + A_n\frac{p - j\omega}{p - p_n}\right)$$

$$\mathcal{I}(t) = \mathcal{U}(A_0 + A_1 e^{(p - j\omega)t} + \ldots + A_n e^{(p_n - j\omega)t})$$

sau

$$\mathcal{I} = \frac{\mathcal{U}}{\varepsilon} + \sum_{k=1}^{n}\frac{u_m e^{p_k}}{(p_k - j\omega)F'(p_k)}. \tag{29}$$

Relația (29) reprezintă formula lui Heaviside în forma complexă pentru cazul cînd tensiunea de borne este sinusoidală.

Spre exemplu se dă

$$L\frac{di}{dt} + ri + \frac{1}{C}\int_0^t i\,dt = u$$

în care $u = u_m \sin \omega t$.

Se introduce u în forma complexă

$$\mathcal{U} = u_m e^{j\omega t}.$$

Ecuația diferențială simbolică ia forma

$$\left(pL + r + \frac{1}{pC}\right)\mathcal{I}(p) = F(p)\mathcal{I}(p) = \mathcal{U}$$

în care

$$\mathcal{I} = \mathcal{I}_{st} + i_{tr}.$$

Curentul electric $\mathcal{I}(p)$ se obține în forma

$$\mathcal{I}(p) = \mathcal{U}\frac{f_2(p)}{f_1(p)} = \mathcal{U}\frac{pC}{LCp^2 + rCp + 1} = \mathcal{U}\left(A_0 + A_1\frac{p - j\omega}{p - p_1} + A_2\frac{p - j\omega}{p - p_2}\right)$$

în care

$$A_0 = \frac{f_2(j\omega)}{f_1(j\omega)}; \quad A_1 = \frac{f_2(p_1)}{(p_1 - j\omega)f_2'(p_1)}; \quad A_2 = \frac{f_2(p_2)}{(p_2 - j\omega)f'_1(p_2)}.$$

Se introduc

$$\frac{f_2(p)}{f_1(p)} = \frac{p}{L(p - p_1)(p - p_2)}$$

$$f_1'(p) = L[(p - p_2) + (p - p_1)].$$

Se obțin:

$$A_0 = \frac{j\omega C}{-\omega^2 LC + j\omega rC + 1} = \frac{1}{j\omega L + r - j\frac{1}{pC}} = \frac{1}{\varepsilon}$$

$$A_1 = \frac{p_1}{(p_1 - j\omega)L(p_1 - p_2)} = \frac{p_1}{(p_1 - j\omega)2\Delta_2 L}$$

$$A_2 = \frac{p_2}{(p_2 - j\omega)L(p_2 - p_1)} = -\frac{p_2}{(p_2 - j\omega)2\Delta_2 L}.$$

Se aduc A_1 și A_2 la același numitor

$$A_1 = \frac{p_1(p_2 - j\omega)}{(p_1 - j\omega)(p_2 - j\omega)2\Delta_2 L} = \frac{\frac{1}{LC} - j\omega p_1}{\left(\frac{1}{LC} - \omega^2 + j\omega 2\Delta_1\right)2\Delta_2 L} =$$

$$= \frac{j\frac{\omega}{L}\left(\frac{1}{j\omega C} - p_1 L\right)}{j\frac{\omega}{L}\left(\frac{1}{j\omega C} + j\omega L + 2\Delta_1 L\right)2\Delta_2 L} = \frac{\frac{1}{j\omega C} - p_1 L}{\varepsilon 2\Delta_2 L}$$

în care

$$\Delta_1 = -\frac{r}{2L}\,; \qquad \Delta_2 = \sqrt{\left(\frac{r}{2L}\right)^2 - \frac{1}{LC}}\,.$$

A_1 mai poate fi scris în forma

$$A_1 = \frac{1}{z\,2\Delta_2 LC}\left[\frac{1}{\omega}\,e^{-j\left(\frac{\pi}{2}+\varphi\right)} + (\Delta_1 - \Delta_2)\,LC\,e^{-j\varphi}\right].$$

În mod analog se obține:

$$A_2 = -\frac{p_2(p_1 - j\,\omega)}{(p_1 - j\,\omega)(p_2 - j\,\omega)\,2\Delta_2 L} = \frac{\frac{1}{LC} - j\,\omega p_2}{\left(\frac{1}{LC} - \omega^2 + j\,\omega 2\Delta_1\right)2\Delta_2 L} =$$

$$= -\frac{\frac{1}{j\,\omega C} - p_2 L}{z\,2\Delta_2 L}$$

sau

$$A_2 = -\frac{1}{z\,2\Delta_2 LC}\left[\frac{1}{\omega}\,e^{-j\left(\frac{\pi}{2}+\varphi\right)} + (\Delta_1 + \Delta_2)\,LC\,e^{-j\varphi}\right].$$

Ca urmare curentul electric $\mathcal{J}$ ia forma

$$\mathcal{J} = \mathcal{U}\left[\frac{1}{z} + \frac{\frac{1}{j\,\omega C} - p_1 L}{z\,2\Delta_2 L}\,e^{(p_1 - j\omega)t} - \frac{\frac{1}{j\,\omega C} - p_2 L}{z\,2\Delta_2 L}\,e^{(p_2 - j\omega)t}\right]$$

sau

$$\mathcal{J} = \frac{\mathcal{U}}{z} + \frac{u_m}{z\,2\Delta_2 L}\left[\left(\frac{1}{j\,\omega C} - p_1 L\right)e^{p_1 t} - \left(\frac{1}{j\,\omega C} - p_2 L\right)e^{p_2 t}\right].$$

Pentru valoarea momentană în forma obișnuită curentul electric devine:

$$i = \frac{u_m}{z}\sin(\omega t - \varphi) + \frac{u_m}{z2\Delta_2 LC}\left\{\left[-\frac{1}{\omega}\cos\varphi + (\Delta_1 - \Delta_2)LC\sin\varphi\right]e^{p_1 t} + \right.$$

$$\left. + \left[\frac{1}{\omega}\cos\varphi + (\Delta_1 + \Delta_2)\,LC\sin\varphi\right]e^{p_2 t}\right\}.$$

S-a considerat $\left(\frac{r}{2L}\right)^2 > \frac{1}{LC}$.

Cînd circuitul posedă numai r și L în serie ($C = \infty$) se obține

$$\Delta_1 = \Delta_2 = \frac{r}{2L}, \quad p_1 = 0, \quad p_2 = -\frac{r}{L}$$

$$i = \frac{u_m}{z}\sin(\omega t - \varphi) + \frac{u_m}{z}\sin\varphi\, e^{-\frac{r}{L}t}.$$

34.6. INTEGRALA FOURIER-MELLIN PENTRU u SINUSOIDAL

Cînd se utilizează integrala Fourier-Mellin pentru determinarea curentului electric ca funcție de timp, atunci cînd tensiunea de borne u reprezintă o funcție sinusoidală de timp, deosebim două cazuri, după cum valoarea momentană a tensiunii e sau nu exprimată în forma complexă.

Se consideră mai întîi cazul cînd u e exprimată în forma complexă.

Tensiunea $\mathcal{U} = u_m e^{j\omega t}$ se exprimă cu ajutorul integralei Fourier-Mellin în felul următor:

$$\mathcal{U} = \frac{1}{2\pi j}\int_{-j\infty}^{+j\infty} \frac{e^{pt}u_m}{p - j\omega}\,dp = u_m e^{j\omega t}. \tag{30}$$

În figura 34.313 se consideră tensiunea de borne u conectată la circuitul electric în momentul $t = 0$ cînd u e nul și în momentul $t = t_1$ cînd tensiunea nu e nulă.

Cînd tensiunea de borne se conectează la timpul $t = t_1$ posedă valoarea

$$u = u_m \sin \omega t_1.$$

Ca urmare se scrie u ca funcție de timp în forma

$$u = u_m \sin(\omega(t - t_1) + \alpha) \tag{31}$$

în care $\alpha = \omega t_1$.

Din (31) se vede că în momentul conectării $t = t_1$ avem $u = u_m \sin\alpha$. În cazul acesta tensiunea momentană în forma complexă ia forma

$$\mathcal{U} = u_m e^{j(\alpha - \omega t_1)} e^{j\omega t} \tag{32}$$

iar reprezentarea ei cu ajutorul integralei Fourier-Mellin devine:

$$\mathcal{U} = \frac{1}{2\pi j}\int_{-j\infty}^{+j\infty} \frac{e^{pt}u_m}{p - j\omega} e^{j(\alpha - \omega t_1)} = u_m e^{j\omega t} e^{j(\alpha - \omega t_1)}. \tag{33}$$

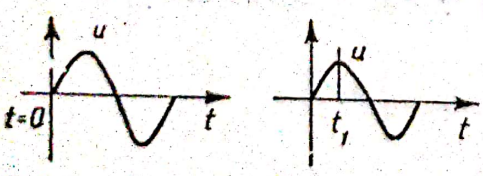


Fig. 34.313. Tensiunea de borne conectată la $t = 0$ și la $t = t_1$.

Introducîndu-se variația infinitezimală a curentului electric în forma

$$\frac{e^{pt}u_m}{p - j\omega}\,dp = d\mathcal{J}F(p) \tag{34}$$

$\mathcal{J}$ ia forma

$$\mathcal{J} = \frac{1}{2\pi j}\int_{-j\infty}^{+j\infty} \frac{e^{pt}u_m}{(p - j\omega)F(p)}\,dp. \tag{35}$$

Spre exemplu pentru

$$\frac{1}{(p - j\omega)F(p)} = \frac{A_0}{p - j\omega} + \frac{A_1}{p - p_1} + \cdots + \frac{A_k}{p - p_k} + \cdots + \frac{A_n}{p - p_n} \tag{36}$$

în care

$$A_0 = \frac{1}{F(j\omega)}; \quad A_k = \frac{1}{(p_k - j\omega)F'(p_k)}$$

se obține

$$\mathcal{J} = \frac{1}{2\pi j}\int_{-j\infty}^{+j\infty} e^{pt}u_m\left(\frac{A_0}{p - j\omega} + \frac{A_1}{p - p_1} + \cdots + \frac{A_k}{p - p_k} + \cdots + \frac{A_n}{p - p_n}\right)dp \tag{37}$$

ceea ce conduce la

$$\mathcal{J} = u_m A_0 e^{j\omega t} + u_m A_1 e^{p_1 t} + \ldots + u_m A_n e^{p_n t} = \frac{\mathcal{U}}{z} + \sum_{k=1}^{n} \frac{u_m e^{p_k t}}{(p_k - j\omega)F'(p_k)}$$

ceea ce reprezintă formula lui Heaviside pentru u ca funcție sinusoidală de timp.

34.7. INTEGRALA LAPLACE ȘI ECUAȚIA INTEGRALĂ SIMBOLICĂ PENTRU u SINUSOIDAL

Deosebim două cazuri, după cum u e exprimată în forma complexă

$$\mathcal{U} = u_m e^{j\omega t}$$

sau în forma obișnuită

$$u = u_m \sin \omega t.$$

Cînd $\mathcal{U}$ e exprimată în forma complexă se introduce în fața integralei Laplace factorul $p - j\omega$ în loc de p.

Se formează

$$(p - j\omega)\int_0^{\infty} e^{-pt}\mathcal{U}dt = (p - j\omega)\int_0^{\infty} e^{-pt}u_m e^{j\omega t}\,dt =$$

$$= (p - j\omega)\int_0^{\infty} e^{-(p-j\omega)t}u_m\,dt = (p - j\omega)\frac{u_m}{-(p - j\omega)}\left[e^{-(p-j\omega)t}\right]_0^{\infty} = u_m. \tag{38}$$

Scanned with OKEN Scanner

În mod analog se obține:

$$(p-\mathrm{j}\omega)\int_0^\infty \mathrm{e}^{-pt}\,\mathcal{J}\,\mathrm{d}t=(p-\mathrm{j}\,\omega)\int_0^\infty \mathrm{e}^{-pt}\,u_m(A_0\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}+A_1\,\mathrm{e}^{p_1 t}+\ldots+A_k\mathrm{e}^{p_k t})\mathrm{d}t=$$

$$=u_m\left(A_0+A_1\frac{p-\mathrm{j}\omega}{p-p_1}+\ldots+A_n\frac{p-\mathrm{j}\omega}{p-p_n}\right)=u_m\frac{1}{F(p)}\cdot \tag{39}$$

Să luăm ca exemplu ecuația diferențială

$$L\frac{\mathrm{d}\mathcal{J}}{\mathrm{d}t}+r\mathcal{J}+\frac{1}{C}\int_0^t \mathcal{J}\mathrm{d}t=\mathcal{U} \tag{40}$$

pentru stabilirea ecuației integrale simbolice.

Se înmulțesc termenii din (40) cu $\mathrm{e}^{-pt}\mathrm{d}t$ și după efectuarea integralei se înmulțesc termenii cu $(p-\mathrm{j}\omega)$.

Se obține

$$\left(Lp+r+\frac{1}{pC}\right)(p-\mathrm{j}\,\omega)\int_0^\infty \mathrm{e}^{pt}\,\mathcal{J}\mathrm{d}t=(p-\mathrm{j}\,\omega)\int_0^\infty \mathrm{e}^{-pt}\,\mathcal{U}\,\mathrm{d}t \tag{41}$$

de unde se obține

$$\left(Lp+r+\frac{1}{pC}\right)\frac{u_m}{F(p)}=u_m \tag{42}$$

astfel că:

$$F(p)=Lp+r+\frac{1}{pC}\cdot \tag{43}$$

$F(p)$ obține aceeași formă fie că u este constant sau sinusoidal exprimat în forma complexă.

34.8. ECUAȚIA INTEGRALĂ SIMBOLICĂ ÎN CAZUL CÎND u E SINUSOIDAL ȘI EXPRIMAT ÎN FORMA OBIȘNUITĂ

În acest caz ecuația diferențială se reprezintă în forma obișnuită. Avem:

$$L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}+ri+\frac{1}{C}\int_0^t i\,\mathrm{d}t=u_m\sin\omega t \tag{44}$$

Din (44) se obține ecuația integrală simbolică în forma

$$\left(Lp+r+\frac{1}{pC}\right)p\int_0^\infty \mathrm{e}^{-pt}\,i\,\mathrm{d}t=p\int_0^\infty \mathrm{e}^{-pt}\,u_m\sin\omega t\,\mathrm{d}t \tag{45}$$

Scanned with OKEN Scanner

în care se obține

$$p\int_0^\infty e^{-pt}\,u_m \sin \omega t\,dt = p\int_0^\infty \frac{u_m}{2j}\{e^{-(p-j\omega)t} - e^{-(p+j\omega)t}\}\,dt =$$

$$= p\,\frac{u_m}{2j}\left\{\frac{e^{-(p-j\omega)t}}{-(p-j\omega)} - \frac{e^{-(p+j\omega)t}}{-(p+j\omega)}\right\}_0^\infty = p\,\frac{u_m}{2j}\left\{\frac{-1}{-(p-j\omega)} - \frac{-1}{-(p+j\omega)}\right\} =$$

$$= u_m \frac{p\omega}{p^2+\omega^2}. \tag{46}$$

Ținîndu-se seama de

$$\frac{u_m}{F(p)} = p\int_0^\infty e^{-pt}\,dt$$

ecuația integrală simbolică din (45) devine

$$\left(Lp + r + \frac{1}{pC}\right)\frac{u_m}{F(p)} = u_m \frac{p\omega}{p^2+\omega^2} \tag{47}$$

de unde se deduce

$$\frac{1}{F(p)} = \frac{p\omega}{p^2+\omega^2}\,\frac{1}{Lp + r + \frac{1}{pC}}. \tag{48}$$

$F(p)$ în forma (48) apare cînd tensiunea de borne e sinusoidală și e introdusă în ecuația integrală simbolică în forma obișnuită.

În acest caz cu ajutorul integralei Fourier-Mellin se va obține curentul electric i în forma obișnuită.

Cînd tensiunea de borne u e exprimată în forma

$$u = u_m \sin(\omega t + \alpha) \tag{49}$$

înseamnă că în momentul conectării se ia $t = 0$ astfel că:

$$u = u_m \sin \alpha.$$

Prin efectuarea integralei în (45) din membrul al doilea în forma

$$p\int_0^\infty e^{-pt}\,u_m \sin(\omega t + \alpha)\,dt = p\int_0^\infty \frac{u_m}{2j}\,e^{-pt}\{e^{j(\omega t+\alpha)} - e^{-j(\omega t+\alpha)}\}\,dt =$$

$$= p\int_0^\infty \frac{u_m}{2j}\{e^{j\alpha}\,e^{-(p-j\omega)t} - e^{-j\alpha}\,e^{-(p+j\omega)t}\}\,dt = p\,\frac{u_m}{2j}\left\{\frac{e^{j\alpha}}{p-j\omega} - \frac{e^{-j\alpha}}{p+j\omega}\right\} =$$

$$= u_m \frac{p\omega\cos\alpha + p^2\sin\alpha}{p^2+\omega^2} \tag{50}$$

Scanned with OKEN Scanner

ca urmare ecuația integrală simbolică ia forma

$$\left(Lp + r + \frac{1}{pC}\right)\frac{u_m}{F(p)} = u_m \frac{p\,\omega\cos\alpha + p^2\sin\alpha}{p^2+\omega^2} \tag{51}$$

de unde se deduce

$$\frac{1}{F(p)} = \frac{p\,\omega\cos\alpha + p^2\sin\alpha}{p^2+\omega^2}\cdot\frac{1}{Lp + r + \frac{1}{pC}}. \tag{52}$$

Prin introducerea lui $1/F(p)$ din (52) în integrala Fourier-Mellin, se obține valoarea momentană a curentului electric i, în forma obișnuită.

34.9. EXEMPLE DE DETERMINARE A CURENTULUI ELECTRIC i, CU AJUTORUL INTEGRALEI FOURIER-MELLIN

Exemplul I

Se dă

$$\frac{1}{F(p)} = \frac{1}{p(p+a)}$$

Deoarece $p = 0$ formează o rădăcină a ecuației $F(p) = 0$ înseamnă că nu se poate folosi formula lui Heaviside la determinarea curentului electric.

Se formează

$$\frac{1}{pF(p)} = \frac{1}{p^2(p+a)} = \frac{A_0}{p^2} + \frac{A_1}{p} + \frac{A_2}{p+a}.$$

Din:

$$1 = A_0(p+a) + A_1 p(p+a) + A_2 p^2$$

se obține

$$A_0 = \frac{1}{a};\quad A_1 = -\frac{A_0}{a} = -\frac{1}{a^2};\quad A_2 = -A_1 = \frac{1}{a^2}$$

astfel că

$$\frac{1}{p^2(p+a)} = \frac{1}{a}\frac{1}{p^2} - \frac{1}{a^2}\frac{1}{p} + \frac{1}{a^2}\frac{1}{p+a}.$$

Fie $u =$ constant. Se obține

$$i(t) = \frac{1}{2\pi j}\int_{-j\infty}^{+j\infty}\frac{e^{pt}}{pF(p)}u\,dp = \frac{1}{2\pi j}\int_{-j\infty}^{+j\infty} e^{pt}u\left(\frac{1}{ap^2} - \frac{1}{a^2p} + \frac{1}{a^2}\frac{1}{p+a}\right)dp =$$

$$= u\left(\frac{t}{a} - \frac{1}{a^2} + \frac{1}{a^2}e^{-at}\right) = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{u}{p^2(p+a)}\right].$$

Exemplul II.

Se dă

$$\frac{1}{F(p)} = \frac{1}{(p+a)^2}.$$

Nu poate fi aplicată formula lui Heaviside la determinarea curentului electric, deoarece ecuația caracteristică $F(p) = 0$ posedă o rădăcină dublă.

Se formează

$$\frac{1}{pF(p)} = \frac{1}{p(p+a)^2} = \frac{A_0}{p} + \frac{A_1}{(p+a)^2} + \frac{A_2}{p+a}.$$

Din relația

$$1 = A_0(p+a)^2 + A_1 p + A_2 p(p+a)$$

se obține

$$A_0 = \frac{1}{a^2}; \quad A_1 = -\frac{1}{a}; \quad A_2 = -\frac{1}{a^2}.$$

Fie u = constant. Curentul electric i ia forma

$$i(t) = \frac{1}{2\pi j}\int_{-j\infty}^{+j\infty} \frac{e^{pt}}{pF(p)}\, u\, dp = \frac{1}{2\pi j}\int_{-j\infty}^{+j\infty} e^{pt}\, u \left\{\frac{1}{a^2 p} - \frac{1}{a(p+a)^2} - \frac{1}{a^2}\frac{1}{p+a}\right\} dp =$$

$$= u\left(\frac{1}{a^2} - \frac{1}{a} t\, e^{-at} - \frac{1}{a^2} e^{-at}\right) = \frac{u}{a^2}\{1 - e^{-at}(1+at)\}.$$

Spre exemplu la efectuarea integralei

$$\int_{-j\infty}^{+j\infty} \frac{e^{pt}}{(p+a)^2}\, dp$$

se ține seama de teorema și formula lui Cauchy. Avem

$$\int_{-j\infty}^{+j\infty} \frac{e^{pt}}{(p+a)^2}\, dp + \int_{C_a} \frac{e^{pt}}{(p+a)^2}\, dp = 0. \qquad (1)$$

Pentru cercul cel mic cu centrul în $-a$ se obține conform relației

$$f(u) = f(z) + \frac{u-z}{1!} f'(z)$$

$$e^{pt} = e^{-at} - \frac{(p+a)}{1!} t e^{-at}.$$

Ca urmare pentru cercul C_a se formează

$$\frac{e^{pt}}{(p+a)^2}\,dp = \frac{e^{-at}}{(p+a)^2}\,dp - \frac{dp}{(p+a)}\,t\,e^{-at}$$

în care

$$p + a = \delta r e^{j\alpha}$$

$$dp = \delta r\, j e^{j\alpha} d\alpha$$

$$\frac{dp}{p+a} = j\,d\alpha.$$

Se formează pentru cercul C_a integrala

$$\int_{C_a} \frac{e^{pt}}{(p+a)^2}\,dp = -\int_{C_a} \frac{dp}{(p+a)}\,t\,e^{-at} = t\,e^{-at}(2\pi j)$$

deoarece arcul α a fost luat în sens negativ.

Ca urmare din (1) se obține

$$\frac{1}{2\pi j}\int_{-j\infty}^{+j\infty} \frac{e^{pt}}{(p+a)^2}\,dp = -te^{-at}.$$

34.10. CERCETĂRI DE CIRCUITE ELECTRICE ÎN REGIM TRANZITORIU ȘI STAȚIONAR

Exemplul I

În circuitul din figura 34.314 se consideră curentul i ca un curent continuu și în mod normal întreruptorul k închis. Ca urmare bobina și condensatorul sînt puse în scurtcircuit.

În capacitatea C e cuprinsă și capacitatea bobinei cu inductivitatea L.

La deschiderea întreruptorului k apare curentul electric i_1 ca funcție de timp și ca urmare și diferența de potențial $u = V_a - V_b$ la bornele bobinei devine o funcție de timp.

Se cere să se determine tensiunea de borne u ca funcție de timp.

Se formează ecuația diferențială

$$u = L\frac{di_1}{dt} = \frac{1}{C}\int (i - i_1)\,dt. \qquad (1)$$

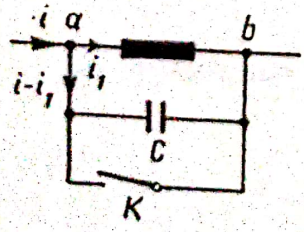


Fig. 34.314. Circuit cu L, C în paralel.

Condițiile inițiale sînt la $t = 0$, momentul întreruperii, avem

$$u = 0 \qquad i_1 = 0 \qquad \int (i - i_1)dt = 0$$

Derivînd ecuația diferențială de mai sus se obține

$$\frac{du}{dt} = L\frac{d^2 i_1}{dt^2} = \frac{1}{C}(i - i_1). \qquad (2)$$

Exprimînd ecuația diferențială (2) în forma simbolică se obține

$$pu = Lp^2 i_1 = \frac{1}{C}(i - i_1)$$

sau

$$u = Lpi_1 = \frac{1}{pC}(i - i_1) \tag{3}$$

de unde se obține

$$(Lp^2C + 1)i_1 = i. \tag{4}$$

Ca urmare ecuația simbolică (3) devine

$$u = Lpi_1 = \frac{Lp}{Lp^2C + 1} i. \tag{5}$$

Din (5) rezultă

$$i = u\frac{Lp^2C + 1}{Lp} = uF(p) \tag{6}$$

în care

$$F(p) = \frac{f_1(p)}{f_2(p)} = \frac{Lp^2C + 1}{Lp}. \tag{7}$$

Se constată că $p = 0$ nu reprezintă o rădăcină a ecuației $f_1(p) = 0$; ca urmare se aplică formula lui Heaviside.

Din $f_1(p) = 0$ rezultă

$$p_{1,2} = \pm \mathrm{j}\,\sigma \tag{8}$$

în care

$$\sigma = \frac{1}{\sqrt{LC}}. \tag{9}$$

Se obține

$$u = \frac{i}{F(p)} = i\left(A_0 + A_1\frac{p}{p - p_1} + A_2\frac{p}{p - p_2}\right) \tag{10}$$

în care

$$A_0 = \frac{f_2(0)}{f_1(0)} \quad A_1 = \frac{f_2(p_1)}{p_1 f_1'(p_1)} \quad A_2 = \frac{f_2(p_2)}{p_2 f_1'(p_2)}.$$

Se obțin:

$$A_0 = 0 \quad A_1 = \frac{p_1 L}{p_1 2LCp_1} = \frac{1}{2Cp_1} = \frac{1}{2C\,\mathrm{j}\,\sigma}.$$

$$A_2 = \frac{p_2 L}{p_2 2LCp_2} = \frac{1}{2Cp_2} = -\frac{1}{2C\,\mathrm{j}\,\sigma}. \tag{11}$$

Introducînd pe (11) în (10) se obține

$$u = i\frac{1}{2C\,\mathrm{j}\,\sigma}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\sigma t} - \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\sigma t}\right) = i\sqrt{\frac{L}{C}}\sin\sigma t. \tag{12}$$

Exemplul II

Pentru circuitul serie-paralele din figura 34.315 se cere să se determine curentul electric i ca funcție de timp, din momentul conectării circuitului la o baterie de acumulatoare cu tensiunea u_g.

Pentru cei trei curenți electrici i, i_1 și i_2 se obțin ecuațiile

$$\begin{aligned} ri + Ri_1 + L\frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t} &= u_g \\ Ri_1 + L\frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t} &= \frac{1}{C}\int i_2\,\mathrm{d}t \\ i_1 + i_2 &= i. \end{aligned} \tag{13}$$

Ecuațiile diferențiale din (13) în forma simbolică devin

$$\begin{aligned} ri + (R + Lp)i_1 &= u_g \\ (R + Lp)\,i_1 &= \frac{1}{pC}\,i_2 \\ i_1 + i_2 &= i. \end{aligned} \tag{14}$$

Înlocuind pe i_2 din a doua ecuație cu i_2 din a treia ecuație se obține

$$(p^2LC + RCp + 1)\,i_1(p) = i(p) \tag{15}$$

Introducînd în prima ecuație pe $i_1(p)$ din (15) se obține

$$\frac{rp^2 + \left(\frac{Rr}{L} + \frac{1}{C}\right)p + \frac{r+R}{LC}}{p^2 + \frac{R}{L}p + \frac{1}{LC}}\,i(p) = F(p)\,i(p) = \frac{f_1(p)}{f_2(p)}\,i(p) = u_g. \tag{16}$$

Deoarece $p = 0$ nu constituie o rădăcină a ecuației $f_1(p) = 0$ și cum nu există rădăcini multiple, se aplică formula lui Heaviside

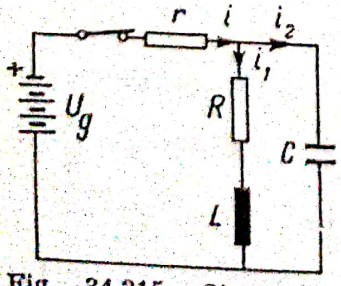


Fig. 34.315. Circuit în conectare serie-paralel.

Se obține

$$i = u_g\frac{f_2(p)}{f_1(p)} = u_g(A_0 + A_1\,\mathrm{e}^{p_1 t} + A_2\,\mathrm{e}^{p_2 t})$$

în care

$$A_0 = \frac{f_2(0)}{f_1(0)}; \qquad A_1 = \frac{f_2(p_1)}{p_1 f_1'(p_1)}; \qquad A_2 = \frac{f_2(p_2)}{p_2 f_1'(p_2)}$$

Scanned with OKEN Scanner

Ecuația

$$f_1(p) = rp^2 + \left(\frac{Rr}{L} + \frac{1}{C}\right) p + \frac{r+R}{LC} = 0$$

posedă rădăcinile p_1 și p_2 în formele

$$p_{1,2} = -\left(\frac{R}{2L} + \frac{1}{2rC}\right) \pm \sqrt{\left(\frac{R}{2L} + \frac{1}{2rC}\right)^2 - \frac{r+R}{rLC}}.$$

Fie

$$\Delta_1 = \frac{R}{2L} + \frac{1}{2rC}\ ; \quad \Delta_2 = \sqrt{\left(\frac{R}{2L} + \frac{1}{2rC}\right)^2 - \frac{r+R}{rLC}}$$

astfel că

$$p_1 = -(\Delta_1 - \Delta_2), \quad p_2 = -(\Delta_1 + \Delta_2).$$

Pentru constanta A_0 se obține:

$$A_0 = \frac{1}{r+R}$$

În loc să se calculeze constantele A_1 și A_2 se folosesc tabelele din literatură [1].

În paragraful 1.34 se găsește

$$\frac{p^2 + \alpha p + \beta}{(p+a)(p+b)} \doteqdot \frac{\beta}{ab} + \frac{a^2 + \alpha a + \beta}{a(a-b)} e^{-at} - \frac{b^2 - \alpha b + \beta}{b(a-b)} e^{-bt}.$$

Van der Pol a introdus semnul de corespondență $\doteqdot$ între funcția imagine și funcția original.

În exemplul mai sus avem

$$\frac{1}{F(p)} = \frac{f_2(p)}{f_1(p)} = \frac{p^2 + \frac{R}{L} p + \frac{1}{LC}}{r(p-p_1)(p-p_2)}$$

$$a = -p_1, \quad b = -p_2, \quad \alpha = \frac{R}{L}, \quad \beta = \frac{1}{LC}$$

$$\frac{\beta}{ab} = \frac{r}{r+R} \qquad \frac{a^2 + \alpha a + \beta}{a(a-b)} e^{-at} = \frac{p_1^2 - \frac{R}{L} p_1 + \frac{1}{LC}}{2p_1\Delta_2} e^{p_1 t}$$

$$\frac{b^2 - \alpha b + \beta}{b(a-b)} e^{-bt} = \frac{p_2^2 + \frac{R}{L} p_2 + \frac{1}{LC}}{2p_2\Delta_2} e^{p_2 t}.$$

[1] Ditkin V. A. și Kuznețov P. I.: Spravocinik po operationomu iscisteriu, GITTL Moscova, 1951.

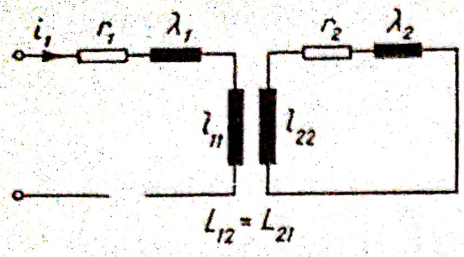


Fig. 34.316. Transformator cu secundarul în scurtcircuit.

Curentul $i(t)$ obține forma

$$i(t) = \frac{u_g}{r}\left[\frac{r}{r+R} + \frac{p_1^2 - \frac{R}{L}p_1 + \frac{1}{LC}}{2p_1\Delta_2}e^{p_1 t} - \frac{p_2^2 + \frac{R}{L}p_2 + \frac{1}{LC}}{2p_2\Delta_2}e^{p_2 t}\right] \tag{17}$$

în regim staționar avem

$$i_{st} = \frac{u_g}{r+R}.$$

Exemplul III

În figura 34.316 se prezintă un transformator cu secundarul în scurt-circuit care se conectează la bornele unei surse de tensiune u_{1b}.

Se cere să se determine curentul electric i_1 din circuitul primar, ca funcție de timp, atît pentru u_{1b} constant cît și ca funcție sinusoidală de timp.

Ecuațiile diferențiale pentru curenții electrici i_1 și i_2 sînt

$$\begin{aligned} L_{21}\frac{di_2}{dt} + L_{11}\frac{di_1}{dt} + r_1 i_1 &= u_{1b} \\ L_{12}\frac{di_1}{dt} + L_{22}\frac{di_2}{dt} + r_2 i_2 &= 0. \end{aligned} \tag{18}$$

Cazul cînd tensiunea de borne u_{1b} e constantă

Deoarece în regimul tranzitoriu i_1 și i_2 sînt de forma Ie^{pt} este firesc să exprimăm ecuațiile diferențiale (18) în forma simbolică

$$\begin{aligned} pL_{21}i_2 + pL_{11}i_1 + r_1 i_1 &= u_{1b} \\ pL_{12}i_1 + pL_{22}i_2 + r_2 i_2 &= 0. \end{aligned} \tag{19}$$

Prin eliminarea lui i_2 se obține

$$((pL_{22} + r_2)(pL_{11} + r_1) - p^2L_{12}^2)i_1 = u_{1b}(pL_{22} + r_2)$$

în care $L_{12} = L_{21}$, sau

$$\frac{(pL_{11} + r_1)(pL_{22} + r_2) - p^2L_{12}^2}{pL_{22} + r_2}\, i_1(p) = F(p)\, i_1(p) = u_{1b} \tag{20}$$

în care

$$F(p) = \frac{f_1(p)}{f_2(p)} = \frac{(pL_{11} + r_1)(pL_{22} + r_2) - p^2L_{12}^2}{pL_{22} + r_2}.$$

Se constată că pentru $f_1(p) = 0$, $p = 0$ nu formează o soluție, astfel că se aplică formula lui Heaviside.

Se formează

$$\frac{f_1(p)}{pF(p)} = \frac{A_0}{p} + \frac{A_1}{p - p_1} + \frac{A_2}{p - p_2} \tag{21}$$

în care $f_1(p) = 0$ ne dă ca rădăcini pe p_1 și p_2.

Avem

$$(pL_{11} + r_1)(pL_{22} + r_2) - p^2L_{12}^2 = 0 \tag{22}$$

sau

$$p^2(L_{11}L_{22} - L_{12}^2) + p(L_{11}r_2 + L_{22}r_1) + r_1r_2 = 0. \tag{23}$$

Se introduc

$$T_1 = \frac{L_{11}}{r_1} \qquad T_2 = \frac{L_{22}}{r_2} \qquad \sigma = 1 - \frac{L_{12}^2}{L_{11}L_{22}}.$$

Relația (23) devine

$$L_{11}L_{22}\,\sigma\left(p^2 + \frac{p}{\sigma}\left(\frac{1}{T_1} + \frac{1}{T_2}\right) + \frac{1}{\sigma\,T_1T_2}\right) = 0 \tag{24}$$

T_1, T_2 reprezintă constantele de timp, iar σ coeficientul de dispersie total.

Cu cît înlănțuirea magnetică dintre cele două bobine este mai perfectă, cu atît fluxul magnetic de dispersie devine mai mic și ca urmare σ descreşte.

În cazul cînd înlănțuirea magnetică a celor două bobine este ideală, σ devine nul.

Pentru $f_1(p) = 0$ avem

$$p^2 + \frac{p}{\sigma}\left(\frac{1}{T_1} + \frac{1}{T_2}\right) + \frac{1}{\sigma\,T_1T_2} = 0$$

cu soluțiile:

$$p_{1,2} = \frac{1}{2\sigma}\left(\frac{1}{T_1} + \frac{1}{T_2}\right) \pm \sqrt{\frac{1}{4\sigma^2}\left(\frac{1}{T_1} + \frac{1}{T_2}\right)^2 - \frac{1}{\sigma\,T_1T_2}}. \tag{25}$$

Ținîndu-se seama de dezvoltarea binomului

$$(a + b)^m = a^m + \frac{m}{1!}\,a^{m-1}b + \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2}\,a^{m-2}b^2 + \ldots$$

se obține pentru σ mic

$$\left[\frac{1}{4\sigma^2}\left(\frac{T_1+T_2}{T_1T_2}\right)^2-\frac{1}{\sigma\,T_1T_2}\right]^{1/2}\cong\frac{1}{2\sigma}\,\frac{T_1+T_2}{T_1T_2}-\frac{1}{2}\left[\frac{1}{4\sigma^2}\,\frac{(T_1+T_2)^2}{(T_1T_2)^2}\right]^{-1/2}\frac{1}{\sigma\,T_1T_2}.$$

Ca urmare

$$\sqrt{\frac{1}{4\sigma^2}\left(\frac{1}{T_1}+\frac{1}{T_2}\right)^2-\frac{1}{\sigma\,T_1T_2}}\cong\frac{1}{2\sigma}\,\frac{T_1+T_2}{T_1T_2}-\frac{1}{T_1+T_2}$$

p_1, p_2 obțin valorile

$$p_1=-\frac{1}{T_1+T_2},\quad p_2=-\frac{T_1+T_2}{\sigma\,T_1T_2}+\frac{1}{T_1+T_2}\cong\frac{1}{\sigma}\,\frac{T_1+T_2}{T_1T_2}. \tag{26}$$

Constantele A_0, A_1 și A_2 se obțin din:

$$A_0=\frac{f_2(0)}{f_1(0)}=\frac{1}{r_1};\quad A_1=\frac{f_2(p_1)}{p_1f_1'(p_1)};\quad A_2=\frac{f_2(p_2)}{p_2f_1'(p_2)}.$$

Din

$$\frac{f_2(p)}{pf_1'(p)}=\frac{1}{-r_1\left(pT_1+2-\dfrac{pT_2(pT_1+1)}{pT_2+1}\right)} \tag{27}$$

pentru

$$p_1=-\frac{1}{T_1+T_2}$$

se obține

$$A_1=\frac{f_2(p_1)}{p_1f_1'(p_1)}=-\frac{1}{r_1}\,\frac{T_1}{T_1+T_2}.$$

Tot din (27) pentru

$$p_2=-\frac{1}{\sigma}\,\frac{T_1+T_2}{T_1T_2}$$

se obține

$$A_2=\frac{1}{r_1\dfrac{\sigma T_1(T_1+T_2)^2}{\sigma T_1T_2(\sigma T_1-(T_1+T_2))}}\cong-\frac{1}{r_1}\,\frac{T_2}{T_1+T_2}$$

în care s-a neglijat σT_1 față de (T_1+T_2).

Se formează

$$\frac{1}{F(p)}=\frac{f_2(p)}{f_1(p)}=A_0+A_1\frac{p}{p-p_1}+A_2\frac{p}{p-p_2}$$

astfel că

$$i_1(p) = \frac{u_{1b}}{F(p)} = u_{1b}\left(A_0 + A_1\frac{p}{p-p_1} + A_2\frac{p}{p-p_2}\right).$$

Curentul i_1 ca funcție de timp ia forma

$$i_1(t) = u_{1b}\,(A_0 + A_1 e^{p_1 t} + A_2 e^{p_2 t})$$

sau

$$i_1(t) = \frac{u_{1b}}{r_1}\left(1 - \frac{T_1}{T_1+T_2}\,e^{-\frac{t}{T_1+T_2}} - \frac{T_2}{T_1+T_2}\,e^{-\frac{T_1+T_2}{\sigma T_1 T_2}\,t}\right). \qquad (28)$$

Din (28) se vede că a doua funcție exponențială descrește mai repede ca prima. Aceasta se datorește faptului că înmagazinarea de energie în cîmpul magnetic al fluxului de dispersie are loc într-un interval de timp mai scurt decît timpul necesar pentru înmagazinarea energiei în cîmpul magnetic din miezul de fier.

Din diagrama din figura 34.317 se vede cum variază i_1 în funcție de timp.

Cazul cînd tensiunea de borne u_{1b} reprezintă o funcție sinusoidală de timp

Avem

$$u_{1b} = u_m \sin \omega t$$

sau în forma complexă

$$\mathcal{U}_{1b} = u_m\, e^{j\omega t}.$$

Curentul electric $\mathcal{I}_1$ în forma complexă devine

$$\mathcal{I}_1 = \frac{u_m}{F(j\omega)}\,e^{j\omega t} + \sum_{k=1}^{n}\frac{u_m\, e^{p_k t}}{(p_k - j\omega)\,F'(p_k)}.$$

Din ecuația

$$F(p) = \frac{f_1(p)}{f_2(p)}$$

s-a obținut pentru $F(p) = 0$

$$p_1 \cong -\frac{1}{T_1+T_2}, \quad p_2 \cong -\frac{1}{\sigma}\,\frac{T_1+T_2}{T_1T_2}.$$

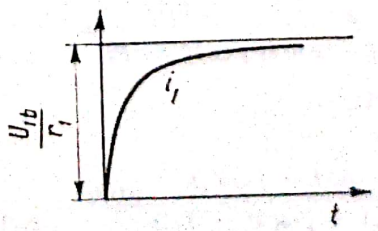


Fig. 34.317. i_1 în funcție de timp.

Scanned with OKEN Scanner

Se consideră cazul $\sigma \cong 0$, $p_2 = -\infty$, astfel că

$$\mathcal{J}_1 = \frac{u_m}{F(j\omega)} e^{j\omega t} + \frac{u_m e^{p_1 t}}{(p_1 - j\omega) F'(p_1)}$$

în care

$$F(j\omega) = \frac{f_1(j\omega)}{f_2(j\omega)}; \quad A_0 = \frac{1}{F(j\omega)}; \quad A_1 = \frac{f_2(p_1)}{(p_1 - j\omega) f_1'(p_1)}$$

$$F(j\omega) = \frac{f_1(j\omega)}{f_2(j\omega)} = \frac{(j\omega L_{11} + r_1)(j\omega L_{22} + r_2) + \omega^2 L_{11} L_{22}}{j\omega L_{22} + r_2} =$$

$$= \frac{r_1 r_2 (j\omega T_1 + 1)(j\omega T_2 + 1) + \omega^2 r_1 r_2 T_1 T_2}{r_2 (j\omega T_2 + 1)} = \frac{r_1 (1 + j\omega (T_1 + T_2))}{1 + j\omega T_2}$$

$$A_0 = \frac{1 + j\omega T_2}{r_1 [1 + j\omega (T_1 + T_2)]}.$$

Se formează

$$\frac{f_2(p)}{f_1'(p)} = \frac{pL_{22} + r_2}{L_{11}(pL_{22} + r_2) + L_{22}(pL_{11} + r_1) - 2pL_{11}L_{22}} =$$

$$= \frac{(pT_2 + 1)}{r_1 [T_1 (pT_2 + 1) + T_2 (pT_1 + 1) - 2pT_1 T_2]}.$$

Pentru

$$p_1 = -\frac{1}{T_1 + T_2}$$

se obţine

$$\frac{f_2(p_1)}{f_1'(p_1)} = \frac{T_1}{r_1 (T_1 + T_2)^2}.$$

Avem

$$p_1 - j\omega = -\frac{1 + j\omega (T_1 + T_2)}{T_1 + T_2}.$$

Ca urmare

$$A_1 = \frac{f_2(p_1)}{(p_1 - j\omega) f_1'(p)} = -\frac{T_1}{r_1 (1 + j\omega (T_1 + T_2))(T_1 + T_2)}$$

iar $\mathcal{J}_1$ ia forma:

$$\mathcal{J}_1 = \frac{u_m (1 + j\omega T_2)}{r_1 (1 + j\omega (T_1 + T_2))} e^{j\omega t} - \frac{u_m T_1}{r_1 (1 + j\omega (T_1 + T_2))(T_1 + T_2)} e^{-\frac{1}{T_1 + T_2} t}.$$

Pentru a se obține valoarea momentană a curentului electric i_1 în forma obișnuită se introduc

$$1 + j\,\omega T_2 = \sqrt{1 + (\omega T_2)^2}\; e^{j\varphi_1}; \quad \operatorname{tg}\varphi_1 = \omega T_2$$

$$1 + j\,\omega(T_1 + T_2) = \sqrt{1 + \omega^2(T_1 + T_2)^2}\; e^{j\varphi_2}; \quad \operatorname{tg}\varphi_2 = \omega(T_1 + T_2)$$

astfel că:

$$\mathcal{J}_1 = \frac{u_m}{r_1}\left[\sqrt{\frac{1 + (\omega T_2)^2}{1 + \omega^2(T_1 + T_2)^2}}\, e^{j(\omega t + \varphi_1 - \varphi_2)} - \frac{T_1 e^{-j\varphi_2}}{(T_1 + T_2)\sqrt{1 + \omega^2(T_1 + T_2)^2}}\, e^{-\frac{1}{T_1 + T_2}t}\right].$$

Pentru i_1 se obține

$$i_1 = \frac{u_m}{r_1}\left[\sqrt{\frac{1 + (\omega T_2)^2}{1 + \omega^2(T_1 + T_2)^2}}\, \sin(\omega t + \varphi_1 - \varphi_2) + \right.$$

$$\left. + \frac{T_1}{T_1 + T_2}\, \frac{\sin\varphi_2}{\sqrt{1 + \omega^2(T_1 + T_2)^2}}\, e^{-\frac{1}{T_1 + T_2}t}\right]. \qquad (29)$$

Exemplul IV

S-a văzut că în baza ecuațiilor diferențiale ale cîmpului electromagnetic, care arată cum se propagă în tot spațiul cu viteza v_U o stare de electrizare respectiv de magnetizare, evidențiate prin funcțiile potențiale scalare și vectoriale V și $\mathcal{A}_B$, s-a ajuns în capitolul 27 în cazul unui circuit electric cu parametri repartizați *să se determine în regim staționar* diferența de potențial u_x și curentul electric i_x la poziția x în circuit, cu ajutorul unei ecuații diferențiale cu derivate parțiale, care duce la alte ecuații asemănătoare cu ecuațiile diferențiale ale cîmpului electromagnetic.

În cele ce urmează, aceleași ecuații diferențiale cu derivate parțiale vor fi folosite la cercetarea regimului tranzitoriu al lui u_x și i_x în circuitul electric.

În figura 34.318 se reprezintă schema de conectare a unui conductor paralel cu pămîntul la polul pozitiv al unei baterii de acumulatoare. Celălalt pol al bateriei e legat la pămînt, iar celălalt capăt al conductorului e liber.

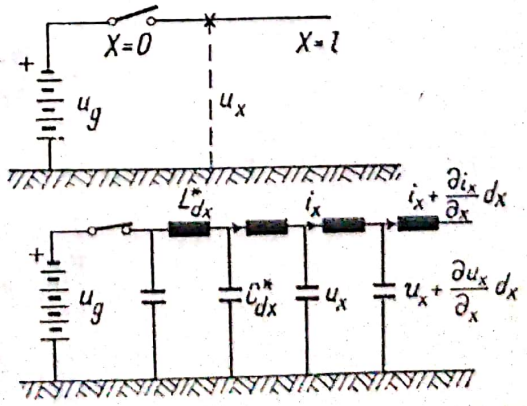


Fig. 34.318. Conectarea unui conductor la bateria de acumulatoare.

Conductorul posedă în general o rezistență electrică, o inductivitate, o capacitate față de pămînt și o conductanță transversală între conductor și pămînt datorită imperfecțiunii izolației suportului, de exemplu din porțelan.

Toate aceste mărimi sînt considerate ca uniform repartizate de-a lungul conductorului. În consecință, se introduc r^*, g^*, L^* și C^* ca mărimi specifice exprimate în Ω/km, S/km, H/km și F/km.

În figura 34.318 dedesubt se reprezintă schema echivalentă a circuitului electric. În această schemă se consideră r^* și g^* neglijabile. Întreaga linie apare ca un lanț de circuite cuadripolare infinitezimale, formate din $L^*\mathrm{d}x$ și $C^*\mathrm{d}x$.

Din momentul conectării conductorului la bateria de acumulatoare, ia ființă un regim tranzitoriu. Condensatoarele echivalente se încarcă și după încărcare toate bornele pozitive ale condensatoarelor, adică întregul conductor, se va găsi la același potențial pe care îl are borna pozitivă a bateriei de acumulatoare.

Așadar după încărcarea conductorului cu o sarcină electrică superficială, curentul electric devine nul.

În timpul regimului tranzitoriu diferența de potențial u_x față de pămînt și curentul electric i_x în punctul x al conductorului apar ca funcții atît de x cît și de timp, conform ecuațiilor diferențiale cu derivate parțiale, cunoscute sub denumirea de ecuațiile telegrafiștilor. Avem

$$\begin{aligned} -\frac{\partial u_x}{\partial x} &= L^* \frac{\partial i_x}{\partial t} + r^* i_x \\ -\frac{\partial i_x}{\partial x} &= C^* \frac{\partial u_x}{\partial t} + g^* u_x. \end{aligned} \tag{30}$$

S-a relevat că în general g^* e de ordinul de mărime $0{,}1 \cdot 10^{-6}$ S/km, astfel că practic e o mărime neglijabilă.

Se iau în considerare numai relațiile

$$-\frac{\partial u_x}{\partial x} = L^* \frac{\partial i_x}{\partial t}$$

$$-\frac{\partial i_x}{\partial x} = C^* \frac{\partial u_x}{\partial t}.$$

Din ecuațiile de mai sus se obțin ecuațiile diferențiale numai în u_x respectiv i_x

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} &= L^* C^* \frac{\partial^2 u_x}{\partial t^2} \\ \frac{\partial^2 i_x}{\partial x^2} &= L^* C^* \frac{\partial^2 i_x}{\partial t^2}. \end{aligned} \tag{31}$$

Scanned with OKEN Scanner

Forma cea mai simplă a soluției unor astfel de ecuații diferențiale este o undă sinusoidală mobilă în forma

$$u_x = u_m \sin \sigma\left(t - \frac{x}{v_U}\right) = u_m \sin (\sigma t - \alpha^* x)$$

$$i_x = i_m \sin \sigma\left(t - \frac{x}{v_U}\right) = i_m \sin (\sigma t - \alpha^* x)$$

în care

$$v_U = \frac{1}{\sqrt{L^* C^*}} \qquad \alpha^* = \frac{\sigma}{v_U}.$$

S-a văzut în paragraful 27.2 că în cazul general, cînd se iau în considerare și r^* și g^*, este recomandabil să se exprime valorile momentane u_x și i_x în forma complexă. Se introduc

$$\mathcal{U}_x = \mathcal{U}\, e^{\gamma^* x} e^{pt} \qquad (32)$$

$$\mathcal{I}_x = \mathcal{I}\, e^{\gamma^* x} e^{pt}.$$

În locul lui p s-ar fi introdus frecvența circulară sau pulsația ω dacă conductorul ar fi fost conectat la o tensiune de borne sinusoidală, în care caz s-ar fi stabilit u_x și i_x în regim staționar.

În (32) însă se consideră în regim tranzitoriu.

În general avem

$$\gamma^* = \beta^* + j\,\alpha^*.$$

Cînd avem $r^* = 0$, $g^* = 0$, rezultă $\beta^* = 0$.

Ca urmare în cazul ecuațiilor diferențiale (31) se iau

$$\mathcal{U}_x = \mathcal{U}\, e^{j\alpha^* x} e^{pt} \qquad \mathcal{I}_x = \mathcal{I}\, e^{j\alpha^* x} e^{pt} \qquad (33)$$

cu ecuațiile diferențiale în forma complexă

$$\frac{\partial^2 \mathcal{U}_x}{\partial x^2} = L^* C^* \frac{\partial^2 \mathcal{U}_x}{\partial t^2}$$

$$\frac{\partial^2 \mathcal{I}_x}{\partial x^2} = L^* C^* \frac{\partial^2 \mathcal{I}_x}{\partial t^2}. \qquad (34)$$

Introducîndu-se (33) în (34) se obțin:

$$-\alpha^{*2} = L^* C^* p^2; \quad \alpha^* = \pm j\, p \sqrt{L^* C^*}$$

sau

$$j\,\alpha^* = \mp p \sqrt{L^* C^*} = \mp \frac{p}{v_U} \qquad (35)$$

Scanned with OKEN Scanner

de unde se deduce p ca o mărime complexă de forma

$$p = \pm \mathrm{j}\,\alpha^* v_U = \pm \mathrm{j}\,\sigma. \tag{36}$$

Mărimea $(-\mathrm{j}\alpha^*)$ se referă la unda incidentă iar $\mathrm{j}\alpha^*$ la unda reflectată.

Deoarece prin introducerea lui $\mathcal{U}_x$ din (32) în ecuația diferențială din (31) se obține

$$\frac{\partial^2 \mathcal{U}_x}{\partial x^2} = \gamma^{*2} \mathcal{U}_x$$

înseamnă că avem $\pm \gamma^*$, astfel că:

$$\mathcal{U}_x = (\mathcal{U}_r\, \mathrm{e}^{\gamma^* x} + \mathcal{U}_i\, \mathrm{e}^{-\gamma^* x})\, \mathrm{e}^{pt}. \tag{37}$$

Ca urmare tensiunea $\mathcal{U}_x$ se mai poate scrie în forma

$$\mathcal{U}_x = (\mathcal{U}_1 \operatorname{ch} \gamma^* x + \mathcal{U}_2 \operatorname{sh} \gamma^* x)\, \mathrm{e}^{pt} \tag{38}$$

ceea ce se poate ușor verifica dacă se trece de la (38) la (37).

În cele ce urmează se consideră $\mathcal{U}_x$ în forma (38). Din:

$$-\frac{\partial \mathcal{U}_x}{\partial x} = pL^* \mathcal{I}_x \tag{39}$$

rezultă

$$\mathcal{I}_x = -\frac{\gamma^*}{pL^*} (\mathcal{U}_1 \operatorname{sh} \gamma^* x + \mathcal{U}_2 \operatorname{ch} \gamma^* x)\, \mathrm{e}^{pt}$$

sau

$$\mathcal{I}_x = -\sqrt{\frac{C^*}{L^*}} (\mathcal{U}_1 \operatorname{sh} \gamma^* x + \mathcal{U}_2 \operatorname{ch} \gamma^* x)\, \mathrm{e}^{pt} \tag{40}$$

în care

$$z_U = \sqrt{\frac{L^*}{C^*}}.$$

Pentru $x = 0$ se obține

$$\mathcal{U}_0 = \mathcal{U}_1\, \mathrm{e}^{pt} = u_i.$$

Constanta $\mathcal{U}_1$ e cunoscută

$$\mathcal{U}_1 = u_g\, \mathrm{e}^{-pt}. \tag{41}$$

Scanned with OKEN Scanner

Pentru $x = l$ se obține

$$\mathcal{I}_l = 0 = -\sqrt{\frac{C^*}{L^*}}\,(\mathcal{U}_1 \operatorname{sh}\gamma^* l + \mathcal{U}_2 \operatorname{ch}\gamma^* l)\,e^{pt}$$

de unde se deduce:

$$\mathcal{U}_l = -\frac{\mathcal{U}_1 \operatorname{sh}\gamma^* l}{\operatorname{ch}\gamma^* l} = -\frac{u_g\, e^{-pt} \operatorname{sh}\gamma^* l}{\operatorname{ch}\gamma^* l}. \tag{42}$$

Tensiunea $\mathcal{U}_x$ devine

$$\mathcal{U}_x = \frac{u_g}{\operatorname{ch}\gamma^* l}(\operatorname{ch}\gamma^* l \operatorname{ch}\gamma^* x - \operatorname{sh}\gamma^* l \operatorname{sh}\gamma^* x) =$$

$$= \frac{u_g}{\operatorname{ch}\gamma^* l}\operatorname{ch}\gamma^*(l - x). \tag{43}$$

In mod analog se obține

$$\mathcal{I}_x = \frac{u_g}{\operatorname{ch}\gamma^* l}\sqrt{\frac{C^*}{L^*}}\operatorname{sh}\gamma^*(l - x). \tag{44}$$

Din

$$\gamma^* = \mathrm{j}\,\alpha^* = \pm p\sqrt{L^* C^*}$$

rezultă:

$$\beta^* = 0.$$

Avem

$$\operatorname{ch}\gamma^*(l - x) = \frac{1}{2}(e^{\beta^*(l-x)}\,e^{\mathrm{j}\alpha^*(l-x)} + e^{-\beta^*(l-x)}\,e^{-\mathrm{j}\alpha^*(l-x)}) =$$

$$= \frac{1}{2}(e^{\mathrm{j}\alpha^*(l-x)} + e^{-\mathrm{j}\alpha^*(l-x)}) = \cos\alpha^*(l - x)$$

$$\operatorname{sh}\gamma^*(l - x) = \frac{1}{2}(e^{\beta^*(l-x)}\,e^{\mathrm{j}\alpha^*(l-x)} - e^{-\beta^*(l-x)}\,e^{-\mathrm{j}\alpha^*(l-x)}) =$$

$$= \frac{1}{2}(e^{\mathrm{j}\alpha^*(l-x)} - e^{-\mathrm{j}\alpha^*(l-x)}) = \mathrm{j}\sin\alpha^*(l - x).$$

Ca urmare, pentru $\beta^* = 0$ se obține

$$\mathcal{U}_x = \frac{u_g}{\cos\alpha^* l}\cos\alpha^*(l - x)$$

$$\mathcal{I}_x = \frac{u_g}{\cos\alpha^* l}\sqrt{\frac{L}{C}}\,\mathrm{j}\sin\alpha^*(l - x)$$

Scanned with OKEN Scanner

astfel că valorile momentane în forma obișnuită apar

$$u_x = \frac{u_g}{\cos \alpha^* l} \cos\ \alpha^*(l - x)$$

$$i_x = \frac{u_g}{\cos \alpha^* l} \sqrt{\frac{L}{C}} \sin\ \alpha^*(l - x). \tag{45}$$

Relațiile (45) ne arată că atit u_x cît și i_x pot fi determinate cu ajutorul formulei lui Heaviside, deoarece α^* apareca o funcție de p din (36).

Se obține u_x din

$$u_g = \frac{\cos \alpha^* l}{\cos \alpha^* (l-x)} \qquad u_x = F(p)\, u_x \tag{46}$$

în care

$$F(p) = \frac{f_1(p)}{f_2(p)} = \frac{\cos \alpha^* l}{\cos \alpha^* (l - x)}. \tag{47}$$

Se poate aplica formula lui Heaviside pentru că pentru $p = 0$ $(\alpha^* = 0)$ funcția $f_1(p) = \cos\ \alpha^* l$ nu devine nulă. Se obține

$$u_x = u_g \frac{\cos\ \alpha^*(l-x)}{\cos\ \alpha^* l} = u_g\{A_0 + A_1 e^{p_1 t} + \ldots + A_k\, e^{p_k t} + \ldots\} \tag{48}$$

în care

$$A_0 = \frac{f_2(0)}{f_1(0)} \qquad A_k = \frac{f_2(p_k)}{p_k f_1'(p_k)}.$$

Din ecuația

$$f_1(p) = \cos\ \alpha^* l = 0$$

se obțin

$$\alpha_1^* l = \frac{\pi}{2}; \quad \alpha_3^* l = 3\,\frac{\pi}{2} \quad \ldots \alpha_{2k-1}^* l = (2k - 1)\,\frac{\pi}{2} \ldots$$

de unde rezultă

$$p_1 = \mathrm{j}\alpha_1^* v_U = \mathrm{j}\,\frac{\pi}{2l}\, v_U$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$p_{2k-1} = \mathrm{j}\alpha_{2k-1}^* v_U = j(2k - 1)\,\frac{\pi}{2l}\, v_U.$$

Din relația

$$f_1'(p_{2k-1}) = \frac{\partial}{\partial p_{2k-1}} \cos\ (\alpha_{2k-1}^* l) = \frac{\partial}{\partial \alpha_{2k-1}^*} \cos\ (\alpha_{2k-1}^* l) \frac{\mathrm{d}\alpha_{2k-1}^*}{\mathrm{d}p_{2k-1}} = -\, l \sin\ (\alpha_{2k-1}^* l)\, \frac{1}{\mathrm{j}v_U}$$

se obține

$$A_{2k-1} = \frac{\cos\ \alpha^*_{2k-1}\ (l-x)}{p_{2k-1} f_1'(p_{2k-1})} = -\frac{\cos \alpha^*_{2k-1}\ (l-x)}{\mathrm{j}(2k-1)\frac{\pi}{2l} v_U \ \frac{1}{\mathrm{j}v_U}\ l \sin(\alpha^*_{2k-1} l)} =$$

$$= -\frac{\cos\ (2k-1)\frac{\pi}{2l}\ (l-x)}{(2k-1)\frac{\pi}{2}\ \sin(2k-1)\frac{\pi}{2}} = -\frac{\sin(2k-1)\frac{\pi}{2} \sin\ (2k-1)\frac{\pi}{2l} x}{(2k-1)\frac{\pi}{2} \sin\ (2k-1)\frac{\pi}{2}} = -\frac{\sin\ (2k-1)\frac{\pi}{2l} x}{(2k-1)\frac{\pi}{2}} \tag{49}$$

Pe de altă parte avem

$$A_0 = \frac{f_2(0)}{f_1(0)} = 1. \tag{50}$$

Deoarece atît unda incidentă cît și unda reflectată posedă aceeași constantă A_{2k-1}, se obține

$$A_{2k-1}(e^{p_{2k-1}t} + e^{-p_{2k-1}t}) = -\frac{\sin\ (2k-1)\frac{\pi}{2l} x}{(2k-1)\frac{\pi}{2}} \left[e^{\mathrm{j}(2k-1)\frac{\pi}{2l} v_U t} + e^{-\mathrm{j}(2k-1)\frac{\pi}{2l} v_U t} \right] =$$

$$= -\frac{\sin\ (2k-1)\frac{\pi}{2l} x}{(2k-1)\frac{\pi}{2}}\ 2\cos(2k-1)\frac{\pi}{2l} v_U t\,. \tag{51}$$

Ca urmare se obține

$$u_x = u_g \left[1 - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin\ (2k-1)\frac{\pi}{2l} x \cdot 2\cos(2k-1)\frac{\pi}{2l} v_U t}{(2k-1)\frac{\pi}{2}} \right]$$

sau

$$u_x = u_g \left[1 - \frac{\pi}{4} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin\ (2k-1)\frac{\pi}{2l} x \cdot \cos\ (2k-1)\frac{\pi}{2l} v_U t}{(2k-1)} \right]. \tag{52}$$

Se introduce mărimea

$$\tau = \frac{l}{v_U}$$

care reprezintă intervalul de timp în care un curent electric i sau o tensiune u se propagă ca o stare electromagnetică tranzitorie, de la începutul pînă la sfîrşitul liniei.

Se obţine din (52) tensiunea u_i de la sfîrşitul liniei, ca funcţie de timp, introducîndu-se în formula de mai sus $x = l$.

Se obţine

$$u_i = u_g\left[1 - \frac{4}{\pi}\left(\frac{\cos\frac{\pi}{2}\frac{t}{\tau}}{1} - \frac{\cos 3\frac{\pi}{2}\frac{t}{\tau}}{3} + \frac{\cos 5\frac{\pi}{2}\frac{t}{\tau}}{5} \cdots\right)\right].$$

Pentru $t = 0$ se obţine

$$u_i = u_g\left[1 - \frac{4}{\pi}\left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots\right)\right].$$

Ţinîndu-se seama de seria

$$\operatorname{arc\,tg} y = y - \frac{y^3}{3} + \frac{y^5}{5} - \frac{y^7}{7} + \cdots \qquad 1 \geqslant y \geqslant -1$$

în care pentru $y = 1$ avem arc tg $y = \frac{\pi}{4}$, rezultă

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots$$

Ca urmare la timpul $t = 0$ rezultă $u_i = 0$. Timpul $t = 0$ reprezintă momentul conectării conductorului la bateria de acumulatoare.

Ca orice stare electromagnetică care se propagă în spaţiu cu o anumită viteză, are nevoie de un interval de timp pentru a se propaga de la începutul liniei la sfîrşitul ei. Ca urmare în momentul conectării $t = 0$, la sfîrşitul liniei u_i e nulă.

Pentru $t = \tau$ se obţine $u_i = u_g$.

Pentru $t = 2\tau$ se obţine

$$u_i = u_g\left[1 - \frac{4}{\pi}\left(-1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \frac{1}{7} \cdots\right)\right]$$

adică

$$u_i = 2u_g.$$

Pentru $t = 3\tau$ se obţine din nou $u_i = 0$.

În figura 34.319, *a* se reprezintă diferenţa de potenţial u_i de la sfîrşitul conductorului în funcţie de timp, atunci cînd r^* este neglijabil.

În acest caz apare o oscilaţie a lui u_i de la $2u_i$ la zero.

Cînd se ia în considerare şi r^*, tensiunea u_i tinde în oscilaţia ei către tensiunea u_g a bateriei de acumulatoare, deoarece linia se încarcă de-a lungul ei, pînă cînd curentul electric devine nul.

Scanned with OKEN Scanner

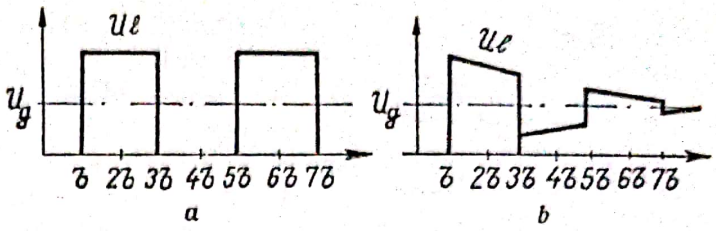


Fig. 34.319. u_l în funcție de timp.

În figura 34.319, *b* se reprezintă variația în timp a tensiunii u_l de la sfîrșitul conductorului cînd se ia în considerare și r^*.

Prin deconectarea conductorului, care e izolat față de pămînt, de la borna pozitivă a bateriei de acumulatoare, conductorul apare ca un condensator electric încărcat față de pămînt cu o sarcină electrică superficială și cu o diferență de potențial față de pămînt egală cu u_g.

Se știe că atunci cînd pentru tensiuni și curenți electrici apar ecuații diferențiale cu derivate parțiale, tensiunile și curenții electrici la poziția x a circuitului, se reprezintă prin unde sinusoidale mobile.

În exemplul de față s-a văzut că la poziția x a conductorului, tensiunea și curentul electric se reprezintă prin cîte o sumă de unde cu diferite amplitudini și lungimi de undă.

Din relația

$$\alpha_{2k-1}\lambda_{2k-1} = 2\pi \tag{53}$$

se determină lungimea de undă λ_{2k-1}.

Cît timp diferența de potențial de la începutul liniei este constantă în timp apare o undă rezultantă de formă dreptunghiulară, care se propagă de-a lungul conductorului cu viteza v_U.

În figura 34.320, *a* apare în momentul conectării conductorului la borna pozitivă a bateriei de acumulatoare, la $x = 0$, o diferență de potențial față de pămînt exprimată prin u_0, care se propagă de-a lungul conductorului cu viteza v_U, pînă la capătul deschis de la sfîrșitul liniei.

În figura 34.320, *b* se vede cum unda de tensiune la sfîrșitul liniei, $x = l$, este reflectată la începutul liniei ($x = 0$) deoarece aci u_0 este constantă; apare o nouă undă reflectată ca în figura 34.320, *c* care e negativă. Cînd această undă nouă reflectată nehașurată ajunge la sfîrșitul liniei, ea se reflectă din nou cu același semn, astfel că tensiunea la sfîrșitul liniei u_l devine nulă (v. fig. 34.320, *d*).

În timp ce unda reflectată se propagă spre începutul liniei, treptat întreaga linie ajunge la tensiunea zero ca în momentul conectării.

La începutul liniei, deoarece tensiunea u_0 este constantă, va apare o nouă undă rezultantă dreptunghiulară pozitivă, care se propagă cu viteza v_U ca în (*e*).

În mod analog se stabilește și variația în timp a curentului electric i_0 la începutul conductorului.

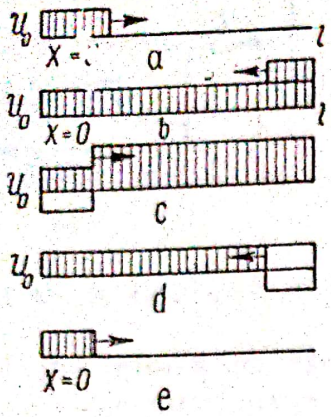


Fig. 34.320. Propagarea tensiunii u_0.

Curentul electric i_l la sfîrșitul conductorului, care e liber, e nul.

În figura 34.321 se reprezintă cele patru perioade de propagare a undei rezultante dreptunghiulare a curentului electric i_0 pînă cînd curentul electric de la începutul liniei revine la forma din *a*.

În figura 34.322, *a* se reprezintă variația în timp a curentului electric i_0 de la începutul conductorului, cînd $r^* = 0$, iar în figura 34.322, *b* se reprezintă variația în timp a curentului electric la începutul conductorului cînd $r^* \neq 0$.

Din figura 34.322, *b* se vede că i_0 tinde către zero, ceea ce înseamnă că condensatoarele echivalente se încarcă treptat, pînă cînd întregul conductor se găsește la același potențial.

În figura 34.323, *a* se prezintă cazul cînd diferența de potențial u_0 la începutul conductorului apare ca o funcție sinusoidală de timp în forma

$$u_0 = u_m \sin (\omega t + \alpha).$$

În momentul conectării ($t = 0$) avem

$$u_0 = u_m \sin \alpha.$$

În intervalul de timp T de la conectarea conductorului, valoarea u_0 a undei de tensiune se găsește în punctul $x = \lambda$. Avem $\lambda = v_U T$, în care $T = 1/f$. f reprezintă frecvența tensiunii u_0 de la începutul conductorului.

În figura 34.323, *b* se vede cum apare pe lungimea λ a conductorului, de la începutul lui, tensiunea u.

Din cele dezvoltate mai sus, se desprinde o problemă importantă și anume urmărirea în formă analitică a *fenomenului electromagnetic tranzitoriu*, care a precedat apariția fenomenului electrostatic, prin electrizarea conductorului conectat la borna pozitivă a bateriei de acumulatoare.

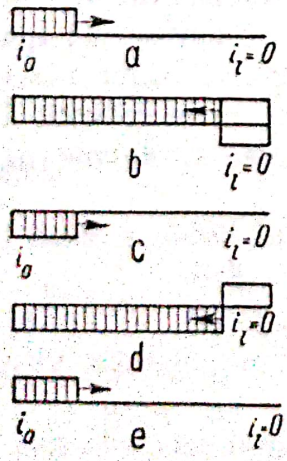


Fig. 34.321. Propagarea curentului i_0.

Din cele ce urmează se va vedea că nu se poate folosi o ecuație diferențială lineară de ordinul n cu coeficienți constanți pentru a determina pe u_x și i_x de-a lungul conductorului, în cadrul fenomenului electromagnetic tranzitoriu, premergător fenomenului electrostatic.

Admitem că conductorul din punct de vedere electric e reprezentat printr-un lanț numai de două circuite cuadripolare, ca în fig. 34.308 formate cu L și C.

Pentru a se obține legătura dintre tensiunea u_0 de la începutul conductorului cu tensiunea u_2 de la sfîrșitul

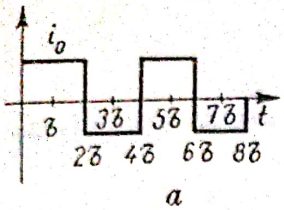


Fig. 34.322. i_0 în funcție de timp.

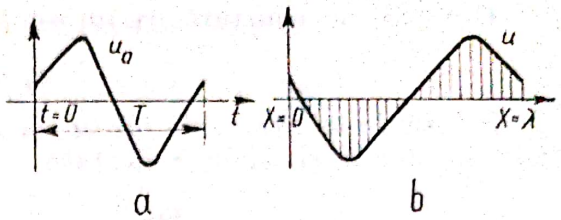


Fig. 34.323. *a*) Variația în timp a tensiunii u_0 *b*) Propagarea undei de tensiune u de-a lungul conductorului în timpul T.

lui, se stabilește o ecuație diferențială liniară de ordinul 4 cu coeficienți constanți, așa cum e prezentată în paragraful 32.1.

Folosindu-ne de formula lui Heaviside se obține

$$u_2 = u_{2st} + u_{2tr} = f(t).$$

Ca urmare se mai obține în funcție de timp valorile staționare și tranzitorii ale mărimilor

$$i_2' = f_1(u_2) \qquad u_1 = f_2(u_2) \qquad i_1' = f_3(u_2).$$

Se vede că nu se obțin u_x și i_x în funcție de x, care corespund propagării stării electromagnetice tranzitorii de-a lungul conductorului, cu viteza v_U.

Ca urmare, e firesc să se încerce urmărirea fenomenului electromagnetic tranzitoriu cu ajutorul ecuațiilor diferențiale cu derivate parțiale care corespund unui lanț de circuite cuadripolare infinitezimale, în care apare în mod explicit viteza de propagare a stării electromagnetice v_U.

Trebuie relavat din capul locului că ecuațiile diferențiale cu derivate parțiale nu posedă însușirea ecuațiilor diferențiale lineare de ordinul n și cu coeficienți constanți, de a se face membrul al doilea al ecuației egal cu zero, pentru a se obține u_{tr} respectiv i_{tr} ca funcții exponențiale de timp în regimul tranzitoriu.

În general ecuațiile diferențiale cu derivate parțiale sînt folosite numai în regim staționar.

S-a văzut totuși din cele ce s-au prezentat în acest paragraf, că în anumite cazuri astfel de ecuații diferențiale cu derivate parțiale, pot servi și la urmărirea fenomenului electromagnetic tranzitoriu. În acest scop s-au introdus $\mathcal{U}_x$ și $\mathcal{I}_x$ ca valori momentane în forma complexă din (33) în care $j\omega$, care corespunde unui regim staționar, a fost înlocuit prin p, încă necunoscut, care corespunde regimului tranzitoriu.

Pentru cazul cînd $\beta^* = 0$ s-a obținut ușor legătura dintre α^* și p în forma

$$p = \pm j\alpha^* v_U = \pm j\sigma$$

în care σ reprezintă frecvența circulară a undei, încă necunoscută.

Se remarcă că expresiile lui $\mathcal{U}_x$ și $\mathcal{I}_x$ se pretează ușor pentru regimul tranzitoriu, dacă sînt exprimate în formele (43) și (44), de unde pentru $\beta^* = 0$ se obțin ușor într-o formă simplă u_x și i_x în forma obișnuită ca în (45).

Din (45) se constată că nu se poate forma relaţia

$$u_x = i_x z_U.$$

Folosindu-se expresiile lui $\mathcal{U}_x$ şi $\mathcal{I}_x$ în forma (38), în care se evidenţiază unda incidentă şi unda reflectată, atunci se obţine

$$\frac{u_{ix}}{i_{ix}} = z_U \qquad \frac{u_{rx}}{i_{rx}} = -z_U.$$

Avem

$$\mathcal{U}_x = (\mathcal{U}_r e^{\gamma^* x} + \mathcal{U}_i e^{-\gamma^* x}) e^{pt}$$

$$\mathcal{I}_x = (\mathcal{I}_r e^{\gamma^* x} + \mathcal{I}_i e^{-\gamma^* x})\, e^{pt}.$$

Folosindu-ne de ecuaţia diferenţială care formează legătura dintre $\mathcal{U}_x$ şi $\mathcal{I}_x$ în forma

$$-\frac{\partial \mathcal{U}_x}{\partial x} = L^* \frac{\partial \mathcal{I}_x}{\partial t}$$

se obţine relaţia

$$\gamma^*(-\mathcal{U}_r e^{\gamma^* x} + \mathcal{U}_i e^{-\gamma^* x}) = L^* p\,(\mathcal{I}_x e^{\gamma^* x} + \mathcal{I}_i e^{-\gamma^* x})$$

în care

$$\mathcal{U}_i = \frac{L^* p}{\gamma^*} \mathcal{I}_i \qquad \mathcal{U}_r = -\frac{L^* p}{\gamma^*} \mathcal{I}_r.$$

Se obţine pentru $\beta^* = 0$.

$$\gamma^* = j\alpha^* \qquad p = j\alpha^* v_U = j\sigma$$

$$\frac{L^* p}{\gamma^*} = L^* v_U = L^* \frac{1}{\sqrt{L^* C^*}} = \sqrt{\frac{L^*}{C^*}} = z_U.$$

Ca urmare rezultă

$$\mathcal{U}_i = z_U \mathcal{I}_i \qquad \mathcal{U}_r = -z_U \mathcal{I}_r$$

astfel că pentru $\beta^* = 0$ avem

$$e^{\gamma^* x} = e^{j\alpha^* x}.$$

Valorile momentane în forma complexă ale mărimilor $\mathcal{U}_x$ şi $\mathcal{I}_x$ devin

$$\mathcal{U}_x = (U_r e^{j\alpha^* x} + U_i e^{-j\alpha^* x})\, e^{j\sigma t}$$

$$\mathcal{I}_x = \left(-\frac{U_r}{z_U} e^{j\alpha^* x} + \frac{U_i}{z_U} e^{-j\alpha^* x}\right) e^{j\sigma t}$$

Scanned with OKEN Scanner

de unde rezultă

$$u_x = U_r \sin(\sigma t + \alpha^* x) + U_i \sin(\sigma t - \alpha^* x)$$

$$i_x = -\frac{U_r}{z_U} \sin(\sigma t + \alpha^* x) + \frac{U_i}{z_U} \sin(\sigma t - \alpha^* x)$$

astfel că

$$u_{ix} = U_i \sin(\sigma t - \alpha^* x) \qquad i_{ix} = \frac{U_i}{z_U} \sin(\sigma t - \alpha^* x)$$

$$u_{rx} = U_r \sin(\sigma t + \alpha^* x) \qquad i_{rx} = -\frac{U_r}{z_u} \sin(\sigma t + \alpha^* x)$$

de unde se deduc

$$\frac{u_{ix}}{i_{ix}} = z_U \qquad \frac{u_{rx}}{i_{rx}} = -z_U. \tag{54}$$

Relațiile (45) obținute pentru valorile momentane u_x și i_x în forma obișnuită nu pot fi folosite decît dacă α^* e cunoscut, așa cum se întîmplă cînd ecuațiile diferențiale cu derivate parțiale sînt folosite pentru un regim electromagnetic staționar.

Numai datorită faptului că α^* e o funcție de p se consideră u_x din (45) exprimat în forma (46), așa cum se obișnuiește la aplicarea formulei lui Heaviside, care a fost stabilită avînd la bază ecuația diferențială lineară de ordinul n cu coeficienți constanți.

Prin

$$f_1(p) = \cos \alpha^* l = 0$$

s-a realizat determinarea lui α^*, obținîndu-se pentru u_x expresia cunoscută din (48).

Expresia finală a lui u_x în forma (52) ne arată că u_x se exprimă printr-o sumă de funcții sinusoidale oscilante cu amplitudini în forma

$$a_{2k-1} = \frac{\pi}{4} \frac{1}{2k-1} \cos\left((2k-1)\frac{\pi}{2l} v_U t\right)$$

ca funcții de timp, la o funcție sinusoidală de x de forma

$$\sin(2k-1)\frac{\pi}{2l} x.$$

Așa dar se crează o sumă de unde oscilante de forma

$$a_{2k-1} \sin(2k-1)\frac{\pi}{2l} x$$

cu diferite amplitudini a_{2k-1} și cu diferite lungimi de undă λ_{2k-1}, obținute din

$$(2k-1)\frac{\pi}{2l} = \alpha^*_{2k-1}$$

$$\alpha^*_{2k-1} \lambda_{2k-1} = 2\pi.$$

Scanned with OKEN Scanner

Din cele stabilite în cercetarea regimului electromagnetic tranzitoriu, s-a văzut că în momentul conectării conductorului la borna pozitivă a bateriei de acumulatoare, la începutul conductorului apare potențialul u_0, iar la sfîrșit potențialul e nul.

Pe de altă parte, se mai constată cum se propagă u_0 de la începutul conductorului, cu viteza v_U către sfîrșitul conductorului în intervalul de timp $\tau = l/v_U$.

După cum deja în paragraful 1.1 s-a văzut că într-un circuit electric cu parametri concentrați și constanți r, L, C, conectat la o tensiune de borne u_b constată, tensiunea de la bornele condensatorului u_c oscilează în forma

$$u_c = \frac{Q}{C} = u_b\ (1 - \cos\ \sigma t)$$

atunci cînd $r = 0$, în jurul valorii mijlocii u_b, (v. fig. 1.12), se constată și de data aceasta că în cazul cînd se consideră $r^* = 0$, potențialul u_i de la sfîrșitul conductorului oscilează ca în figura. 34.319, *a*.

Acest fapt ne arată că numai prezența rezistenței electrice face să nu aibă loc, la infinit, oscilații între energia electrică și energia magnetică, care s-a declanșat din momentul conectării conductorului la borna pozitivă a bateriei de acumulatoare. O astfel de energie oscilatorie se transformă într-o energie calorică.

Revenim la conductorul din figura 34.318.

Se conectează o rezistență R cu un capăt la sfîrșitul conductorului și cu celălalt capăt la pămînt. Rezistența conductorului o considerăm neglijabilă față de rezistența R.

Introducîndu-se în mod separat, pentru undele incidente și undele reflectate relațiile

$$\begin{aligned} u_i &= z_U i_i \\ u_r &= -\ z_U i_r \end{aligned} \tag{54}$$

se obțin la sfîrșitul conductorului relațiile

$$\begin{aligned} u_i + u_r &= u_0 \\ i_i + i_r &= \frac{u_0}{R}. \end{aligned} \tag{55}$$

Se obține

$$\begin{aligned} u_i + u_r &= u_0 \\ \frac{u_i}{z_U} - \frac{u_r}{z_U} &= \frac{u_0}{R} \end{aligned} \tag{56}$$

de unde se deduc

$$\begin{aligned} u_i &= \frac{u_0}{2}\left(1 + \frac{z_U}{R}\right) \\ u_r &= \frac{u_0}{2}\left(1 - \frac{z_U}{R}\right). \end{aligned} \tag{57}$$

Scanned with OKEN Scanner

Pentru i_i și i_r se obțin

$$i_i = \frac{u_0}{2z_U}\left(1 + \frac{z_U}{R}\right)$$
$$i_r = -\frac{u_0}{2z_U}\left(1 - \frac{z_U}{R}\right) \qquad (58)$$

astfel că

$$i_i + i_r = i = \frac{u_0}{R}.$$

În felul acesta se constată că după ce a dispărut fenomenul electromagnetic tranzitoriu apare un fenomen electrocinetic. Dat fiindcă intensitatea de cîmp electric în spațiile ocupate de conductor se menține constantă, înseamnă că și curentul electric i e constant în timp. În felul acesta apare un cîmp al inducției mangnetice $\mathfrak{B}$ constant în timp. Apare și un cîmp magnetostatic.

Apariția fenomenului electromagnetic tranzitoriu, adică apariția unei tensiuni u_x și a unui curent electric i_x tranzitoriu în orice punct al conductorului, e în mod deosebit cercetată în cazul liniilor de înaltă tensiune. Datorită izolamentului mare al acestor linii, perturbările atmosferice pot produce unde electromagnetice mobile, care pot duce la străpungerea izolamentului bobinelor unui transformator sau generator electric. Pentru studiul protecției mașinilor și a aparatelor electrice contra supratensiunilor se cere un studiu amplu al unor astfel de unde electromagnetice mobile.

Exemplul V

În figura 34.324 se prezintă un motor de c.c. conectat la o baterie de acumulatoare de tensiune u_b. Circuitul de excitație cu i_e constant e separat de circuitul rotorului.

Admitem că motorul pornește în gol fără rezistență de pornire. Considerăm frecările neglijabile; deci cuplul rezistent M_d e considerat practic nul. Se cere să se determine curentul electric i ca funcție de timp.

Se constată că un astfel de motor se comportă față de rețeaua electrică ca un condensator electric în serie cu o rezistență și inductivitate ca în figură.

Viteza unghiulară înmulțită cu o constantă este echivalentă cu sarcina electrică a condensatorului. Tensiunea electromotoare u a motorului e egală

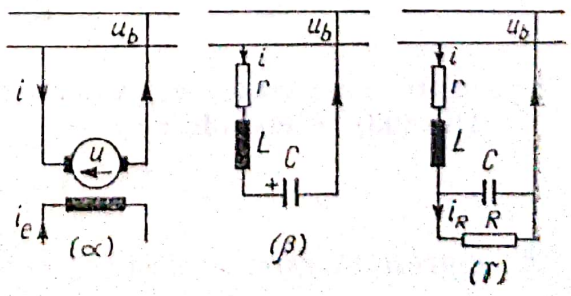


Fig. 34.324. Motor de c.c. cu excitație separată echivalent cu un circuit electric cu r, L, C.

cu diferența de potențial de la bornele condensatorului iar energia cinetică a rotorului corespunde energiei electrice a condensatorului.

Integrala $\int(d\ell\ \mathcal{E})$ pentru circuitul rotorului ne dă

$$u_b = L\frac{di}{dt} + ri + u \tag{59}$$

în care tensiunea electromotoare u este opusă sensului curentului electric i. r, L reprezintă rezistența respectiv inductivitatea rotorului.

Tensiunea electromotoare u ia forma

$$u^{V} = \frac{p}{a}\frac{n}{60}\,10^{-8}\,\Phi 2W = \zeta\omega \tag{60}$$

în care p reprezintă numărul de perechi de poli, a numărul de căi duble ale curentului, Φ fluxul magnetic în Maxwell pentru un pol, W numărul total de spire și n numărul de ture într-un minut.

Se introduce viteza unghiulară $\omega\,1/s$.

$$\omega = \frac{2\pi n}{60}$$

astfel că

$$\frac{p}{a}\frac{1}{2\pi}\,10^{-8}\,\Phi 2W = \zeta^{\text{Weber}}.$$

Cuplul activ se reprezintă în forma

$$M_d = \Theta\frac{d\omega}{dt} \tag{61}$$

în care M_d se exprimă în kgfm și momentul de inerție Θ în kgfms^2.

Puterea electromagnetică devine

$$ui^{W} = (M_d \cdot 9{,}81)\omega. \tag{62}$$

Din (60), (61) și (62) se obține

$$i^{A} = \frac{\Theta\cdot 9{,}81}{\zeta}\frac{d\omega}{dt} = \frac{\Theta\,9{,}81}{\zeta^2}\frac{du}{dt} = C\frac{du}{dt} \tag{63}$$

în care

$$C^{F} = \frac{\Theta\,9{,}81}{\zeta^2} \tag{64}$$

reprezintă capacitatea echivalentă în F.

Din (63) se mai obține

$$Q^{C} = \frac{\Theta\,9{,}81}{\zeta}\omega \tag{65}$$

Q^{C} reprezintă sarcina electrică echivalentă a condensatorului electric.

Scanned with OKEN Scanner

Din

$$dA^J = M \cdot 9{,}81\ d\alpha = M_d \cdot 9{,}81\ \omega\ dt =$$

$$= \Theta \cdot 9{,}81 \frac{d\omega}{dt}\ \omega\ dt = d\left(\Theta \cdot 9{,}81 \frac{\omega^2}{2}\right) = dW_c$$

rezultă

$$W_c^J = \Theta \cdot 9{,}81 \frac{\omega^2}{2}. \tag{66}$$

Prin

$$W_e = \frac{u^2 C}{2} \tag{67}$$

se reprezintă energia electrică înmagazinată în cîmpul electric al condensatorului. Se verifică ușor că

$$W_c = W_e. \tag{68}$$

Ca urmare în circuitul condensatorului se obține $\int(d\ell/\mathcal{S})$ în forma

$$u_b = L\frac{di}{dt} + ri + \frac{1}{C}\int i\,dt. \tag{69}$$

Condițiiie inițiale sînt: în momentul conectării $t = 0$ avem

$$i = 0; \qquad u = 0; \qquad \omega = 0; \qquad \frac{d\omega}{dt} = 0.$$

Ecuația diferențială (69) în forma simbolică devine

$$\left(pL + r + \frac{1}{Cp}\right) i(p) = u_b$$

în care

$$F(p) = pL + r + \frac{1}{pC} = \frac{LCp^2 + rCp + 1}{Cp} = \frac{f_1(p)}{f_2(p)}$$

astfel că

$$i(p) = u_b \frac{1}{F(p)} = u_b \frac{f_2(p)}{f_1(p)}$$

în care

$$\frac{1}{F(p)} = \frac{f_2(p)}{f_1(p)} = \frac{pC}{LCp^2 + rCp + 1} = A_0 + A_1 \frac{p}{p - p_1} + A_2 \frac{p}{p - p_2}$$

p_1, p_2 sînt rădăcinile ecuației

$$f_1(p) = LCp^2 + rCp + 1 = LC\left(p^2 + \frac{r}{L}p + \frac{1}{LC}\right) = 0$$

$$p_1 = -(\Delta_1 - \Delta_2); \qquad p_2 = -(\Delta_1 + \Delta_2)$$

$$\Delta_1 = \frac{r}{2L}; \qquad \Delta_2 = \sqrt{\left(\frac{r}{2L}\right)^2 - \frac{1}{LC}}.$$

Constantele A_0, A_1 și A_2 se obțin din

$$A_0 = \frac{f_2(0)}{f_1(0)}; \qquad A_1 = \frac{f_2(p_1)}{p_1 f_1'(p_1)}; \qquad A_2 = \frac{f_2(p_2)}{p_2 f_1'(p_2)}.$$

Se constată că $p = 0$ nu formează o rădăcină a ecuației $f_1(p) = 0$, ceea ce înseamnă că se aplică formula lui Heaviside.

Pentru constante se obțin

$$A_0 = 0; \qquad A_1 = \frac{p_1 C}{p_1(2LCp_1 + rC)} = \frac{1}{2Lp_1 + r} = \frac{1}{2L\Delta_2}.$$

$$A_2 = \frac{p_2 C}{p_2(2LCp_2 + rC)} = \frac{1}{2Lp_2 + r} = -\frac{1}{2L\Delta_2}.$$

Ca urmare curentul i ia forma

$$i = \frac{u_b}{2\Delta_2 L}(e^{p_1 t} - e^{p_2 t})$$

În ce privește valoarea capacității condensatorului echivalent, se ia ca exemplu

$u_b = 110^{v}$; turația finală cînd i devine nul $c\ n_0 =$ 1500 ture/min. Momentul de inerție $\Theta = 0{,}15$ kgfms^2.

Valoarea capacității C este

$$C = \frac{\Theta \cdot 9{,}81}{\zeta^2} = \frac{\Theta \cdot 9{,}81}{u_b^2} \cdot \omega_0^2 = \frac{\Theta \cdot 9{,}81}{u_b^2}\left(\frac{\pi}{30}\right)^2 n_0^2 = 2{,}98 \text{ F}.$$

Cu un astfel de motor de curent continuu se poate realiza o capacitate echivalentă destul de mare.

Admițînd că la pornire există un cuplu rezistent M_{dr} constant, viteza unghiulară ω_0' devine mai mică ca ω_0.

Deoarece trebuie să apară un cuplu activ care trebuie să compenseze cuplul rezistent, rezultă că curentul electric nu mai e nul.

În figura 34.324, γ se consideră schema circuitului electric echivalent pentru cazul cînd se ia în considerare cuplul rezistent echivalent M_{dr}. Apare o rezistență R în paralel cu condensatorul electric.

Din relația

$$u_0' i_0' = \zeta \omega_0' i_0' = M_{dr} \cdot 9{,}81 \cdot \omega_0'$$

rezultă

$$i'_0 = \frac{M_{dr} \cdot 9{,}81}{\zeta}.$$

Pe de altă parte din

$$u_b - i'_0 r = u'_0 = \zeta \omega'_0$$

se obține atît u'_0 cît și viteza unghiulară ω'_0 în regim staționar.

Din relația

$$u'_0 = i'_0 R$$

se obține rezistența R.

În general se poate lua în considerare și o rezistență de pornire r_p conectată în serie cu rotorul și considerată constantă în întregul regim tranzitoriu.

Exemplul VI

Să se determine influența curenților turbionari din miezul de fier al unei bobine, asupra curentului tranzitoriu i din bobină din momentul conectării bobinei la o tensiune de borne constantă în timp.

În figura 34.325, *a* se reprezintă o bobină cu W spire care conține un miez de fier.

În momentul conectării bobinei la o baterie de acumulatoare cu tensiunea u_g, apare un curent electric i tranzitoriu pînă cînd se stabilește regimul staționar, cu un curent electric constant în timp.

Se cere să se determine curentul electric tranzitoriu, care depinde de curenții turbionari din miezul de fier care apar datorită variației în timp a inducției magnetice din miezul de fier.

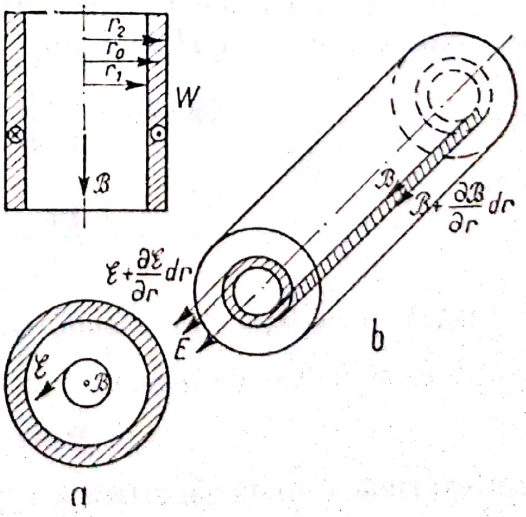


Fig. 34.325. Bobina cu W spire și cu miez de fier alimentată cu i.

Ne sprijinim pe cele două legi ale lui Maxwell: legea circuitului magnetic şi legea inducţiei, care se referă la cîmpurile $\mathcal{H}$ şi $\mathcal{E}$ solenoidale. Avem

$$\text{rot}\,\mathcal{H} = \frac{4\pi}{10} j; \qquad \text{rot}\,\mathcal{E} = -10^{-8}\mu\frac{\partial}{\partial t}$$

$$\mathcal{B} = \mu\mathcal{H}; \qquad \mathcal{E} = j\rho$$

cu $\mathcal{H}$ în Oe, $\mathcal{B}$ în G, $\mathcal{E}$ în V/cm, j în A/cm^2, ρ, rezistivitatea, în Ωcm^2/cm.

Din legile lui Maxwell în forma diferenţială de mai sus, se deduc aceleaşi legi din efectuarea transformărilor de integrale: transformări din integrale de linie în integrale de suprafaţă.

În acest scop s-au introdus pentru miezul de fier din figura 34.325,*b* suprafeţele haşurate, pentru care se efectuează transformările de integrale.

Prin efectuarea integralelor se obţin din expresiile de mai sus

$$H \cdot l - \left(H + \frac{\partial H}{\partial r}\,\mathrm{d}r\right) l = \frac{4\pi}{10} J l \mathrm{d}r$$

$$2\pi(r + \mathrm{d}r)\left(E + \frac{\partial E}{\partial r}\,\mathrm{d}r\right) - 2\pi r E = -10^{-8}\,\mu\frac{\partial}{\partial t} H \cdot 2\pi r \mathrm{d}r.$$

Neglijînd infinitul mic de ordinul 2, se obţine

$$-\frac{\partial H}{\partial r} = \frac{4\pi}{10} J$$

$$-10^{-8}\,\frac{\mu}{\rho}\,\frac{\partial H}{\partial t} = \frac{1}{r}\,\frac{\partial}{\partial r}(rJ).$$

Prima ecuaţie diferenţială ne arată că indiferent de faptul dacă J este sau nu o funcţie de timp, H apare ca o funcţie de r; din a doua ecuaţie diferenţială rezultă că atunci cînd H devine o funcţie de timp, (rJ) apare ca o funcţie de r.

J reprezintă densitatea curentului electric turbionar în miezul de fier.

Din cele două ecuaţii diferenţiale cu derivate parţiale rezultă o ecuaţie diferenţială numai în H în forma

$$4\pi \cdot 10^{-9}\,\frac{\mu}{\rho}\,\frac{\partial H}{\partial t} = \frac{1}{r}\,\frac{\partial}{\partial r}\left\{-\frac{10}{4\pi}\,\frac{\partial H}{\partial r}\,r\right\}$$

sau

$$\frac{\partial^2 H}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\,\frac{\partial H}{\partial r} - 4\pi \cdot 10^{-9}\,\frac{\mu}{\rho}\,\frac{\partial H}{\partial t} = 0.$$

Dacă în ecuaţia diferenţială de mai sus nu ar fi existat termenul $\frac{1}{r}\,\frac{\partial H}{\partial r}$, soluţia ei ar fi fost de forma

$$H(tr) = H_c e^{\gamma' r} e^{pt}$$

care exprimă o undă amortizată exprimată în forma complexă.

Scanned with OKEN Scanner

În cazul nostru se scrie soluția în forma

$$H(tr) = H(r)e^{pt}$$

ceea ce ne conduce la o ecuație diferențială de forma

$$\frac{\partial^2 H}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial H}{\partial r} - 4\pi \cdot 10^{-9}\frac{\mu}{\rho} pH = 0.$$

Fie

$$-4\pi \cdot 10^{-9}\frac{\mu}{\rho} p = k^2.$$

Ecuația diferențială devine

$$\frac{\partial^2 H}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial H}{\partial r} + k^2 H = 0.$$

O astfel de ecuație diferențială e denumită ecuația diferențială a funcției Bessel de speța întîia și de ordinul zero.

Ca urmare soluția ei ia forma

$$H(tr) = H_c J_0(kr)e^{pt}$$

în care

$$k = j\sqrt{4\pi \cdot 10^{-9}\frac{\mu}{\rho} p}.$$

Pentru determinarea densității curentului electric turbionar J ne folosim de ecuația diferențială

$$-\frac{\partial H}{\partial r} = \frac{4\pi}{10} J.$$

Se obține

$$-H_c \frac{\partial}{\partial r} J_0(kr)e^{pt} = H_c k J_1(kr)e^{pt} = \frac{4\pi}{10} J$$

de unde se obține J

$$J = \frac{10}{4\pi} H_c k J_1(kr)e^{pt}$$

în care se introduce

$$J_c = \frac{10}{4\pi} H_c k$$

sau

$$H_c = \frac{4\pi}{10k} J_c$$

obținîndu-se legătura dintre cele două constante H_c și J_c.

Ca urmare $H(tr)$ și $J(tr)$ devin

$$H(tr) = J_c \frac{4\pi}{10k} J_0(kr)e^{pt}$$

$$J(tr) = J_c J_1(kr)e^{pt}$$

Pentru determinarea constantei J_c se folosește curentul electric i din bobină. Se obțin următoarele două relații cu i

$$u_g - 10^{-8} \frac{d}{dt} \Phi W = iR$$

$$H(tr_1)\, l = \frac{4\pi}{10} iW.$$

A doua relație e valabilă cînd raza r_1 a bobinei este mică față de lungimea l a bobinei.

La efectuatea integralei de linie $\oint (d\mathcal{H})$ pentru o linie l care e situată la suprafața interioară a bobinei, se constată că linia închisă (l + linia din exteriorul bobinei pentru care integrala dă practic valoarea zero) înlănțuie numai turbionul curentului din bobină.

Dacă s-ar fi luat l pentru suprafața unui cilindru cu $r < r_1$, atunci la efectuarea integralei de mai sus, linia închisă ar cuprinde într-însa nu numai turbionul care corespunde curentului din bobină, ci și turbionul curenților turbionari din spațiul cuprins între suprafața cilindrului cu raza r și suprafața cilindrului cu raza r_1.

Din prima relație se obține

$$-10^{-8} \frac{d}{dt} \Phi W = 2\pi r_1 E(tr_1) W = 2\pi r_1 \rho J(tr_1) W = 2\pi r_1 \rho J_c\, J_1(kr_1)e^{pt}.$$

Din a doua relație avem

$$i = \frac{10}{4\pi W} H(tr_1)\; l = \frac{10l}{4\pi W} J_c \frac{4\pi}{10k} J_0(kr_1)e^{pt}.$$

Ca urmare prima relație se exprimă în forma

$$\frac{u_g}{R} e^{-pt} = J_c \frac{r_1 l}{W}\left[\frac{1}{kr_1} J_0(kr_1) - \frac{\rho}{R} \frac{2\pi W^2}{l} J_1(kr_1)\right]$$

de unde se obține constanta J_c

$$J_c = \frac{\frac{u_g}{R} e^{-pt}}{\frac{r_1 l}{W}\left[\frac{1}{kr_1} J_0(kr_1) - aJ_1(kr_1)\right]}$$

în care

$$a = \frac{\rho}{R} 2\pi \frac{W^2}{l}$$

$$R = \rho_1 \frac{2\pi r_0 W}{\nu \frac{\Delta l}{W}} = \rho_1 \frac{2\pi r_0 W^2}{\nu \Delta l}$$

astfel că

$$a = \frac{\rho}{R} 2\pi \frac{R\nu\Delta}{\rho_1 2\pi r_0} = \frac{\rho}{\rho_1} \frac{\nu\Delta}{r_0}.$$

În aceste relații
ν reprezintă un factor de bobinaj,
ρ_1, ρ rezistivitatea conductorului bobinei, respectiv a miezului de fier,
Δ grosimea bobinei,
r_0 raza mijlocie a bobinei.
Introducîndu-se expresia constantei J_c în $J(tr)$ se obține

$$J(tr) = \frac{u_g W}{Rlr_1} \frac{J_1(kr)}{\frac{1}{kr_1} J_0(kr_1) - aJ_1(kr_1)} = \frac{u_g W}{Rlr_1} \frac{J_1\left(\frac{\xi_1}{r_1} r\right)}{\left(\frac{1}{\xi_1} J_0(\xi_1) - aJ_1(\xi_1)\right.}$$

în care

$$\xi_1 = kr_1 = j\sqrt{4\pi \cdot 10^{-9} \frac{\mu}{\rho} p} \cdot r_1.$$

S-a relevat din cele prezentate mai sus că p nu este cunoscut. După cum se vede în ξ_1 apare atît p cît și r_1.

Se pune întrebarea cum se determină p? În acest scop ne folosim de formula lui Heaviside pentru exprimarea legăturii dintre u_g și densitatea turbionului $J(tr)$. Cu alte cuvinte relația de mai sus se va scrie în forma

$$u_g \frac{W}{Rlr_1} = \frac{\frac{1}{\xi_1} J_0(\xi_1) - a_1 J_1(\xi_1)}{J_1\left(\frac{\xi_1}{r_1} r\right)} J(tr) =$$

$$= F(p)J(tr) = \frac{f_1(p)}{f_2(p)} J(tr)$$

Scanned with OKEN Scanner

în care

$$f_1(p) = J_0(\xi_1) - a\xi_1 J_1(\xi_1)$$

$$f_2(p) = \xi_1 J_1\left(\frac{\xi_1}{r_1} r\right).$$

Se constată că $p = 0$ nu constituie o rădăcină a ecuației $f_1(p) = 0$, deci formula lui Heaviside poate fi aplicată. Se formează

$$J(tr) = u_g \frac{W}{Rlr_1}(A_0 + \ldots + A_k e^{p_k t} + \ldots)$$

în care

$$A_0 = \frac{f_2(0)}{f_1(0)}; \quad A_k = \frac{f_2(p_k)}{p_k f_1'(p_k)}.$$

$$\frac{f_2(p)}{f_1(p)} = \frac{\xi_1 J_1\left(\frac{\xi_1}{r_1} r\right)}{J_0(\xi_1) - a\xi_1 J_1(\xi_1)}$$

p se obține din ecuația

$$f_1(p) = 0.$$

Ca urmare se obține

$$\frac{J_0(\xi_1)}{J_1(\xi_1)} = a\xi_1.$$

Cum raportul de mai sus poate să devină egal cu $a\xi_1$ pentru mai multe valori ale lui ξ_1, adică mai multe valori ale lui p, deoarece ξ_1 depinde de r_1 și p, se vor introduce valorile ξ_{11} ξ_{12} ... ξ_{1k} care satisfac relația de mai sus.

Ținîndu-se seama de funcțiile $J_0(\xi)$ și $J_1(\xi)$ din figura 3.25 din Adaus, care apar ca niște funcții de cos α și sin α amortizate, se constată că raportul de mai sus pentru diferite valori ale lui ξ se reprezintă ca în figura 34.326.

Din

$$\xi_{1k} = kr_1 = j\sqrt{4\pi \cdot 10^{-9} \frac{\mu}{\rho} p_k} \cdot r_1$$

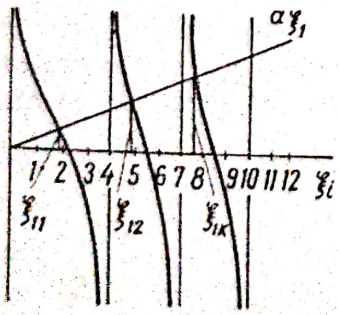
se obține

$$p_k = -\frac{\rho \xi_{1k}^2}{4\pi \cdot 10^{-9} \mu r_1^2}.$$

În figura 34.326 se duce dreapta $a\xi_1$. În punctele de intersecție ale acestei drepte cu curbele din figură se obțin ξ_{11} ξ_{12} ξ_{1k}. Ca urmare p_k devine cunoscut în funcție de ξ_{1k}.

Se trece la determinarea constantelor A_0 și A_k. Pentru $\xi_1 = 0$ avem

$$\frac{f_2(0)}{f_1(0)} = \frac{0}{J_0(\xi_1)} = 0.$$



34.326. Raportul $\frac{J_0(\xi_1)}{J_1(\xi_1)}$.

Se formează

$$p\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}p}f_1(p) = p\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\xi_1}[J_0(\xi_1) - a\xi_1 J_1(\xi_1)]\frac{\mathrm{d}\xi_1}{\mathrm{d}p}.$$

Din relația

$$p = -\frac{\rho\xi_1^2}{4\pi\cdot 10^{-9}\mu r_1^2}$$

se obține

$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}\xi_1} = -\frac{2\rho\xi_1}{4\pi\cdot 10^{-9}\mu r_1^2}$$

astfel că

$$p\frac{\mathrm{d}\xi_1}{\mathrm{d}p} = \frac{\xi_1}{2}.$$

Pe de altă parte avem

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\xi_1}[J_0(\xi_1) - a_1\xi_1 J_1(\xi_1)] = -J_1(\xi_1) - a\xi_1 J_0(\xi_1)$$

în care s-a ținut seama de

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\xi_1}J_1(\xi_1) = J_0(\xi_1) - \frac{1}{\xi_1}J_1(\xi_1).$$

Ca urmare

$$p\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}p}f_1(p) = -\frac{\xi_1}{2}[J_1(\xi_1) + a\xi_1 J_0(\xi_1)]$$

A_k obține forma

$$A_k = -\frac{2J_1\left(\frac{\xi_{1k}}{r_1}r\right)}{J_1(\xi_{1k}) + a\xi_{1k}J_0(\xi_{1k})}.$$

Se obține densitatea de curent $J(tr)$ în forma

$$J(tr) = -\frac{2W}{Rlr_1}u_g\sum_{k=1}^{\infty}\frac{J_1\left(\frac{\xi_{1k}}{r_1}r\right)e^{p_k t}}{J_1(\xi_{1k}) + a\xi_{1k}J_0(\xi_{1k})}.$$

Ținîndu-se seama de

$$\frac{J_0(\xi_{1k})}{J_1(\xi_{1k})} = a\xi_{1k}$$

se formează

$$J_1(\xi_{1k}) + a\xi_{1k}J_0(\xi_{1k}) = J_0(\xi_{1k})\left[\frac{J_1(\xi_{1k})}{J_0(\xi_{1k})} + a\xi_{1k}\right] =$$

$$= J_0(\xi_{1k})\left[\frac{1}{a\xi_{1k}} + a\xi_{1k}\right] = \frac{1}{a\xi_{1k}} J_0(\xi_{1k})\,(1 + a^2\xi_{1k}^2).$$

Ca urmare $J(tr)$ devine

$$J(tr) = -\frac{2W}{Rlr_1} u_g \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a\xi_{1k} J_1\left(\frac{\xi_{1k}}{r_1} r\right) e^{p_k t}}{J_0(\xi_{1k})(1 + a^2\xi_{1k}^2)}.$$

Mărimea $J(tr)$ reprezintă valoarea numerică a densității curentului electric turbionar, tangent la cercul de rază r, curent care apare în regimul tranzitoriu, adică în intervalul de timp cînd are loc o variație a curentului electric i.

Determinarea intensității cîmpului magnetic $H(tr)$

Avem

$$H(tr) = \frac{4\pi}{10k} J_c J_0(kr)\, e^{pt} =$$

$$= \frac{4\pi}{10k} \frac{u_g W}{Rlr_1} \frac{J_0\left(\frac{\xi_1}{r_1} r\right)}{\frac{1}{\xi_1} J_0(\xi_1) - aJ_1(\xi_1)} = \frac{4\pi}{10Rl} u_g \frac{J_0\left(\frac{\xi_1}{r_1} r\right)}{J_0(\xi_1) - a\xi_1 J_1(\xi_1)}$$

de unde se deduce

$$\frac{4\pi W}{10Rl} u_g = \frac{J_0(\xi_1) - a\xi_1 J_1(\xi_1)}{J_0\left(\frac{\xi_1}{r_1} r\right)} H(tr) = F(p)H(tr) = \frac{f_1(p)}{f_2(p)} H(tr).$$

Se constată că $p = 0$ nu constituie o rădăcină a ecuației $f_1(p) = 0$, deci se poate aplica formula lui Heaviside.

Se obține

$$H(tr) = \frac{4\pi W}{10Rl} u_g \frac{f_2(p)}{f_1(p)} = H_{st}\,(A_0 + \ldots + A_k e^{p_k t} \ldots)$$

în care

$$\frac{u_g}{R} = i_{st}; \qquad \frac{4\pi i_{st} W}{10\ l} = H_{st}$$

$$A_0 = \frac{f_2(0)}{f_1(0)}; \qquad A_k = \frac{f_2(p_k)}{p_k f_1'(p_k)}.$$

Scanned with OKEN Scanner

Determinarea constantelor A_0 și A_k.

Se obține $A_0 = 1$. Din

$$f_1(p) = 0 = J_0(\xi_1) - a\xi_1 J_1(\xi_1)$$

se obține p. Avem

$$\frac{J_0(\xi_1)}{J_1(\xi_1)} = a\xi_1$$

de unde se deduc valorile $\xi_{11}, \xi_{12} \ldots \xi_{1k} \ldots$ care satisfac relația, la care corespund $p_1, p_2 \ldots p_k \ldots$

Se formează

$$p\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}p} f_1(p) = p\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\xi_1}[J_0(\xi_1) - a\xi_1 J_1(\xi_1)]\frac{\mathrm{d}\xi_1}{\mathrm{d}p} = -\frac{\xi_1}{2}[J_1(\xi_1) + a\xi_1 J_0(\xi_1)]$$

astfel că

$$A_k = -\frac{J_0\left(\frac{\xi_{1k}}{r_1} r\right)}{\frac{\xi_{1k}}{2}[J_1(\xi_{1k}) + a\xi_{1k} J_0(\xi_{1k})]}$$

$H(tr)$ ia forma

$$H(tr) = H_{st}\left[1 - 2\sum_{k=1}^{\infty} \frac{J_0\left(\frac{\xi_{1k}}{r_1} r\right) e^{p_k t}}{\xi_{1k}[J_1(\xi_{1k}) + a\xi_{1k} J_0(\xi_{1k})]}\right].$$

Comparînd cele două relații pentru $J(tr)$ și $H(tr)$ se constată că în expresia lui $J(tr)$ apare $J_1\left(\frac{\xi_{1k}}{r_1} r\right)$, ceea ce înseamnă că pentru $r = 0$ densitatea curentului electric turbionar $J(tr)$ devine nulă; pe cînd în expresia intensității cîmpului magnetic apare $J_0\left(\frac{\xi_{1k}}{r_1} r\right)$, care e diferită de zero pentru $r = 0$, adică cîmpul magnetic în axa cilindrului este diferit de zero.

Din

$$l \cdot H(tr_1) = \frac{4\pi}{10} iW$$

sîntem în măsură să rezolvăm problema pusă la început, de a se determina curentul electric tranzitoriu i sub influența turbionilor electrici din miezul de fier.

Se obține

$$i = \frac{10}{4\pi W} lH_{st}\left[1 - 2\sum_{k=1}^{\infty} \frac{J_0\left(\frac{\xi_{1k}}{r_1} r\right) e^{p_k t}}{\xi_{1k}[J_1(\xi_{1k}) + a\xi_{1k}J_0(\xi_{1k})]}\right] =$$

$$= \frac{10}{4\pi W} lH_{st}\left[1 - 2\sum_{k=1}^{\infty} \frac{J_0\left(\frac{\xi_{1k}}{r_1} r_1\right) e^{p_k t}}{\frac{1}{a} J_0(\xi_{1k})(1 + a^2\xi_{1k}^2)}\right] = i_{st}\left[1 - 2\sum_{k=1}^{\infty} \frac{a e^{p_k t}}{1 + a^2\xi_{1k}^2}\right]$$

în care

$$i_{st} = \frac{u_g}{R}; \qquad p_k = -\frac{\rho\xi_{1k}^2}{4\pi \cdot 10^{-9} \cdot \mu r_1^2}$$

ξ_{1k} se obține din figura 34.326.

În cazul cînd bobina nu posedă miez de fier, deci se poate introduce $\rho = \infty$, deci curenții turbionari devin nuli, se obține din

$$a = \frac{\rho}{\rho_1} \frac{\nu\Delta}{r_0}, \qquad a = \infty.$$

Din relația

$$a\xi_1 = \frac{J_0(\xi_1)}{J_1(\xi_1)}$$

se obține pentru α foarte mare, o dreaptă în figura 34.326 care va forma cu axa ξ_1 un unghi apropiat de 90°; ca urmare ξ_{11} devine foarte mic. Se obține

$$J_0(\xi_{11}) \cong 1; \qquad J_1(\xi_{11}) \cong \frac{\xi_{11}}{2}$$

$$\frac{J_0(\xi_{11})}{J_1(\xi_{11})} = \frac{2}{\xi_{11}} = a\xi_{11}$$

de unde rezultă

$$a\xi_{11}^2 = 2.$$

Expresia

$$\frac{1}{a}(1 + a^2\xi_{11}^2) = 2$$

obține pentru a foarte mare și $a\xi_{11}^2 = 2$, valoarea 2.

Pe de altă parte din

$$a\xi_{11}^2 = 2 = \frac{\rho}{\rho} \frac{\nu\Delta}{r_0} \xi_{11}^2$$

rezultă

$$\cdot \rho \xi_{11}^2 = \frac{2\rho_1 r_0}{\nu\Delta}$$

astfel că

$$p_1 = -\frac{2\rho r_0}{\nu\Delta} \frac{1}{4\pi \cdot 10^{-9} \mu r_1^2}.$$

Pentru $\rho = \infty$, $p_2, p_3 \ldots p_k$ devenind infinit de mari cu semnul minus, rezultă $e^{p_k t}$ egal cu zero.

Curentul electric i obține expresia cunoscută

$$i = \frac{u_g}{R}(1 - e^{p_1 t}).$$

Pentru a se putea aprecia ordinul de mărime al constantelor de mai sus, să luăm următorul exemplu numeric. Fie

$$r_1 = 4 \text{ cm}, \; r_0 = 4{,}5 \text{ cm}, \; \Delta = 1 \text{ cm}, \; \nu = 0{,}98$$

$$\rho_1 = 0{,}0175 \cdot 10^{-4} \; \Omega\text{cm}, \; \rho = 0{,}1 \cdot 10^{-4} \; \Omega\text{cm}, \; \mu = 500.$$

Se obține

$$a = \frac{\rho}{\rho_1} \frac{\nu\Delta}{r_0} = 1{,}13.$$

Introducîndu-se în expresia lui p_1 în forma

$$p_1 = -\frac{2\rho_1 r_0}{\nu\Delta} \frac{1}{4\pi \cdot 10^{-9} \mu r_1^2} \frac{2\pi W^2}{2\pi W^2}$$

cu mărimea

$$Rl = \rho_1 \frac{2\pi r_0 W^2}{\nu\Delta}$$

se obține

$$p_1 = -\frac{Rl}{4\pi \cdot 10^{-9} \mu r_1^2 \pi W^2}$$

în care apare inductivitatea L în forma

$$L^{\mathrm{H}} = 4\pi \cdot 10^{-9} \frac{W^2}{R_m} \qquad R_m = \frac{l}{\mu\pi r_1^2}$$

astfel că

$$p_1 = -\frac{R}{L}$$

$$i = \frac{u_b}{R}\left(1 - e^{-\frac{r}{L}\cdot}\right)$$

34.11. UTILIZAREA CALCULULUI OPERAȚIONAL LA DETERMINAREA REGIMULUI TRANZITORIU, ATUNCI CÎND CIRCUITELE ELECTRICE SÎNT DECONECTATE DE LA TENSIUNEA DE BORNE u_b ȘI PUSE IMEDIAT ÎN SCURTCIRCUIT

În figura 34.327 se reprezintă un circuit electric care a fost deconectat de la tensiunea de borne u_b și pus imediat în scurtcircuit.

Se cere să se determine curentul electric i ca funcție de timp.

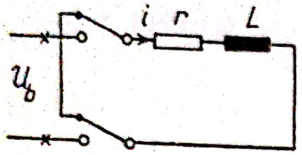


Fig. 34.327. Circuitul electric deconectat de la tensiunea u_b și pus imediat în scurtcircuit.

Se va determina i folosind metoda obișnuită și după aceea vom introduce un calcul operațional care să ne conducă la același rezultat.

Ecuația diferențială a circuitului electric pus în scurtcircuit e

$$L\frac{di}{dt} + ri = 0 \tag{1}$$

în care L, r reprezintă parametrii constanți.

Curentul electric i devine

$$i = Ie^{pt} \tag{2}$$

ceea ce ne conduce la ecuația diferențială în forma

$$(Lp + r)\, I\, e^{pt} = 0. \tag{3}$$

Ecuația (3) e satisfăcută pentru

$$F(p) = Lp + r = 0$$

astfel că

$$p_1 = -\frac{r}{L}$$

$$i = Ie^{-\frac{r}{L}t}.$$

Constanta I se determină în baza condițiilor inițiale. În momentul punerii circuitului în scurtcircuit, $t = 0$, avem

$$i = I = \frac{u_b}{r}.$$

Ca urmare

$$i = \frac{u_b}{r}\, e^{-\frac{r}{L}t} \tag{4}$$

Figura 34.328 reprezintă curentul electric i ca funcție de timp.

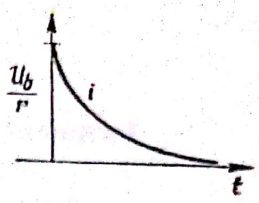


Fig. 34.328. $i = f(t)$

În cele ce urmează se folosește un nou calcul operațional pentru determinarea curentului i ca funcție de timp.

Se introduce o tensiune ajutătoare de forma

$$u_b e^{-\frac{t}{p}}$$

care pusă la bornele circuitului dat, ne produce același curent electric i, ca în cazul cînd circuitul e scurtcircuitat.

Se formează ecuația diferențială

$$L\frac{di}{dt} + ri = u_b e^{-\frac{t}{p}}. \tag{5}$$

Curentul electric i ia forma

$$i = I e^{-\frac{t}{p}}. \tag{6}$$

Introducînd pe i în forma (6) în ecuația diferențială se obține

$$\left(-\frac{L}{p} + r\right) i = F(p)\, i = u_b e^{-\frac{t}{p}} \tag{7}$$

în care

$$F(p) = -\frac{L}{p} + r = \frac{-L + rp}{p} = \frac{f_1(p)}{f_2(p)}$$

astfel că

$$i = I e^{-\frac{t}{p}} = \frac{1}{F(p)} u_b e^{-\frac{t}{p}} = \frac{f_2(p)}{f_1(p)} u_b e^{-\frac{t}{p}}$$

de unde se obține

$$I = \frac{f_2(p)}{f_1(p)} u_b. \tag{8}$$

Pentru determinarea atît a lui I cît și a lui p se introduce raportul

$$\frac{1}{pF(p)} = \frac{A_0}{p} + \frac{A_1}{p - p_1} \tag{9}$$

sau

$$\frac{1}{F(p)} = A_0 + A_1 \frac{p}{p - p_1}. \tag{10}$$

Se formează

$$f_1(p) = 0 = -L + rp$$

de unde se obține

$$p_1 = \frac{L}{r}$$

în care

$$A_0 = \frac{1}{F(0)} = \frac{f_2(0)}{f_1(0)} = 0; \qquad A_1 = \frac{f_2(p_1)}{p_1 f_1'(p_1)} = \frac{1}{r}.$$

Faptul că A_0 e nul, înseamnă că nu există curent electric staționar, ceea ce corespunde realității.

Ca urmare i ia forma

$$i = u_b \frac{1}{r} \frac{p}{p - p_1} e^{-\frac{t}{p_1}}. \tag{11}$$

Rămîne să vedem cînd operatorul $\frac{p}{p - p_1}$ va da

$$\frac{p}{p - p_1} e^{-\frac{t}{p_1}} = e^{-\frac{t}{p_1}}.$$

În acest scop se introduce

$$\frac{1}{p} = \frac{d}{dt}. \tag{12}$$

Operatorul $\frac{p}{p - p_1}$ ia forma

$$\frac{p}{p - p_1} = \left(1 - \frac{p_1}{p}\right)^{-1} = 1 + \frac{p_1}{p} + \left(\frac{p_1}{p}\right)^2 + \left(\frac{p_1}{p}\right)^3 + \ldots$$

astfel că

$$\frac{p}{p - p_1} e^{-\frac{t}{p_1}} = \left\{1 + \left(\frac{p_1}{p}\right) + \left(\frac{p_1}{p}\right)^2 + \left(\frac{p_1}{p}\right)^3 + \ldots\right\} e^{-\frac{t}{p_1}}$$

în care se introduce $\frac{1}{p} = \frac{d}{dt}$. Ca urmare se obține

$$\frac{p}{p - p_1} e^{-\frac{t}{p_1}} = e^{-\frac{t}{p_1}} - \left(\frac{p_1}{p_1}\right) e^{-\frac{t}{p_1}} + \left(\frac{p_1}{p_1}\right)^2 e^{-\frac{t}{p_1}} - \left(\frac{p_1}{p_1}\right)^3 e^{-\frac{t}{p_1}} + \ldots = e^{-\frac{t}{p_1}} \tag{13}$$

Scanned with OKEN Scanner

Curentul i în forma (11) devine

$$i = \frac{u_b}{r} e^{-\frac{r}{L}t}. \tag{14}$$

Din cele prezentate aci se vede că prin introducerea tensiunii ajutătoare $u_b e^{-\frac{t}{p}}$ cu operatorul $\frac{1}{p} = \frac{d}{dt}$ se obține pentru i aceeași soluție ca cea rezultată din aplicarea metodei obișnuite.

Se trece la cazul general, cînd se obține pentru determinarea curentului electric i o ecuație diferențială lineară de ordinul n, atunci cînd circuitul e scurtcircuitat.

Introducîndu-se ecuația diferențială

$$a_n \frac{d^n i}{dt^n} + \ldots + a_1 \frac{di}{dt} + a_0 i = u_b e^{-\frac{t}{p}} \tag{15}$$

cînd circuitul e scurtcircuitat se obține i în forma

$$i = I e^{-\frac{t}{p}}. \tag{16}$$

Avem

$$F(p) i = u_b e^{-\frac{t}{p}}.$$

în care

$$F(p) = -\frac{a_n}{p^n} - \ldots - \frac{a_1}{p} + a_0$$

astfel că

$$i = \frac{1}{F(p)} u_b e^{-\frac{t}{p}}.$$

Se descompune în fracții simple raportul

$$\frac{1}{pF(p)} = \frac{A_0}{p} + \frac{A_1}{p - p_1} + \ldots + \frac{A_n}{p - p_n}$$

în care $F(p) = 0$ ne dă: $p_1, p_2 \ldots p_n$.

S-a admis cazul cînd $p = 0$ nu formează o soluție a ecuației $F(p) = 0$ și nu există rădăcini multiple pentru această ecuație. Se obține

$$i = u_b \{ A_0 e^{-\frac{t}{0}} + A_1 e^{-\frac{t}{p_1}} + \ldots + A_n e^{-\frac{t}{p_n}} \}$$

în care

$$A_0 = \frac{1}{F(0)} = 0$$

deoarece nu există curent electric staționar.

Curentul electric tranzitoriu devine

$$i = u_b \sum_{k=1}^{n} \frac{e^{-\frac{t}{p_k}}}{p_k F'(p_k)}. \tag{17}$$

Exemplu

Motorul de curent continuu cu excitația separată din figura 34.324 se deconectează de la tensiunea de borne u_b și se scurtcircuitează. Se cere să se determine curentul electric i în funcție de timp.

Prin deconectarea circuitului rotorului de la rețea și punerea lui în scurt-circuit se determină curentul electric rezolvînd ecuația

$$L\frac{di}{dt} + ri + u = u_b e^{-\frac{t}{p}} \tag{18}$$

Din formula (60) din paragraful precedent avem

$$u = \zeta\omega \tag{19}$$

în care ζ e o constantă măsurată în Weber. Ea depinde de fluxul magnetic Φ considerat constant (i_e = constant). ω reprezintă viteza unghiulară.

Din

$$ui = M_d \cdot 9{,}81\omega = 9{,}81\Theta\frac{d\omega}{dt}\omega$$

$$u = \zeta\omega \tag{20}$$

rezultă

$$i = \frac{9{,}81\ \Theta}{\zeta}\frac{d\omega}{dt}. \tag{21}$$

Dat fiindcă i apare în forma

$$i = Ie^{-\frac{t}{p}} \tag{22}$$

și i e proporțional cu $\frac{d\omega}{dt}$, înseamnă că avem

$$\omega = \omega_0 e^{-\frac{t}{p}}. \tag{23}$$

Scanned with OKEN Scanner

Ca urmare se obține

$$\frac{d\omega}{dt} = -\frac{\omega_0}{p} e^{-\frac{t}{p}} = -\frac{\omega}{p} \tag{24}$$

de unde rezultă

$$i = -\frac{9{,}81\Theta}{\zeta}\frac{\omega}{p} = -\frac{9{,}81\Theta}{\zeta^2}\frac{u}{p}$$

astfel că

$$u = -\zeta^2 p \frac{1}{9{,}81\Theta} i. \tag{25}$$

Introducînd în ecuația diferențială (18) pe i în forma (22) și pe u în forma (25), se obține

$$\left(-\frac{L}{p} + r - \zeta^2 p \frac{1}{9{,}81\Theta}\right) i = -\frac{1}{p}\left(\frac{\zeta^2 p^2}{9{,}81\Theta} - rp + L\right) i = u_b e^{-\frac{t}{p}}. \tag{26}$$

Se obține

$$F(p)i = \frac{f_1(p)}{f_2(p)} i = u_b e^{-\frac{t}{p}} \tag{27}$$

în care

$$f_1(p) = -\left(\frac{\zeta^2}{\Theta 9{,}81} p^2 - rp + 1\right)$$

$$f_2(p) = p.$$

Se constată că $f_1(p) = 0$ nu posedă pe $p = 0$ ca o rădăcină și nu există rădăcini multiple. Se obține

$$i = u_b \left\{\frac{f_2(0)}{f_1(0)} + \sum_{k=1}^{n} \frac{f_2(p_k)}{p_k f_1'(p_k)} e^{-\frac{t}{p_k}}\right\}.$$

În exemplul luat avem

$$f_2(0) = 0$$

ceea ce ne arată că nu există un curent electric staționar.

Avem

$$i = u_b \sum_{k=1}^{n} \frac{f_2(p_k)}{p_k f'_1(p_k)} e^{-\frac{t}{p_k}}.$$

Scanned with OKEN Scanner

Din

$$f_1(p) = \frac{\zeta^2}{9{,}81\Theta} p^2 - rp + L = 0$$

rezultă

$$p_{1,2} = \frac{9{,}81\Theta}{2\zeta^2} r \pm \sqrt{\frac{(9{,}81\Theta)^2}{4\zeta^4} r^2 - 4 \frac{\zeta^2}{9{,}81\Theta} L \frac{(9{,}81\Theta)^2}{4\zeta^4}} =$$

$$= \frac{9{,}81\Theta}{2\zeta^2} r \pm \sqrt{\frac{(9{,}81\Theta)^2}{4\zeta^4} r^2 - L \frac{9{,}81\Theta}{\zeta^2}}.$$

Ca urmare

$$i = u_b \left(\frac{f_2(p_1)}{p_1 f_1'(p_1)} e^{-\frac{t}{p_1}} + \frac{f_2(p_2)}{p_2 f_1'(p_2)} e^{-\frac{t}{p_2}} \right).$$

Să considerăm cazul cînd curentul i devine oscilant. Un astfel de caz apare cînd avem

$$\frac{L 9{,}81\Theta}{\zeta^2} > \frac{(9{,}81\Theta)^2}{4\zeta^4} r^2.$$

Într-un astfel ce caz $p_{1,2}$ apar ca mărimi complexe. Se obțin

$$p_{1,2} = \frac{\Theta 9{,}81}{2\zeta^2} r \pm j\sigma = \Delta_1 \pm j\sigma$$

în care

$$\Delta_1 = \frac{9{,}81\Theta}{2\zeta^2} r \; ; \quad \sigma = \sqrt{\frac{L\Theta 9{,}81}{\zeta^2} - \frac{(\Theta 9{,}81)^2}{4\zeta^4} r^2}.$$

Se formează

$$f_1'(p) = -\left(\frac{2\zeta^2}{9{,}81\Theta} p - r \right)$$

$$\frac{f_2(p)}{p f_1'(p)} = -\frac{1}{\frac{2\zeta^2}{9{,}81\Theta} p - r}$$

astfel că

$$\frac{f_2(p_1)}{p_1 f_1'(p_1)} = -\frac{1}{j\frac{2\zeta^2}{9{,}81}\sigma} \quad \frac{f_2(p_2)}{p_2 f_1'(p_2)} = \frac{1}{j\frac{2\zeta^2}{9{,}81}\sigma}$$

Scanned with OKEN Scanner

Curentul electric i devine

$$i = u_b \left\{ - \frac{1}{j\frac{2\zeta^2}{9{,}81}\sigma} e^{-\frac{t}{p_1}} + \frac{1}{j\frac{2\zeta^2}{9{,}81\Theta} e^{-\frac{t}{p_2}}} \right\}. \tag{28}$$

Pentru $\frac{1}{p_1}$ și $\frac{1}{p_2}$ se obține

$$\frac{1}{p_1} = \frac{1}{\Delta_1 + j\sigma} \frac{\Delta_1 - j\sigma}{\Delta_1 - j\sigma} = \frac{\Delta_1}{\Delta_1^2 + \sigma^2} - j\frac{\sigma}{\Delta_1^2 + \sigma^2} = a - jb$$

$$\frac{1}{p_2} = \frac{1}{\Delta_1 - j\sigma} \frac{\Delta_1 + j\sigma}{\Delta_1 + j\sigma} = \frac{\Delta_1}{\Delta^2_1 + \sigma^2} + j\frac{\sigma}{\Delta_1^2 + \sigma^2} = a + jb$$

în care

$$\Delta_1^2 + \sigma^2 = \frac{(9{,}81\Theta)^2}{4\zeta^4} r^2 + \frac{L\,9{,}81\Theta}{\zeta^2} - \frac{(9{,}81\Theta)^2}{4\zeta^4} r^2 = \frac{L\Theta 9{,}81}{\zeta^2}$$

$$a^2 + b^2 = \frac{1}{\Delta_1^2 + \sigma^2} = \frac{\zeta^2}{L\Theta 9{,}81}.$$

Ca urmare

$$a = \frac{\frac{9{,}81\Theta}{2\zeta^2} r}{\frac{9{,}81\Theta}{2\zeta^2} L} = \frac{r}{2L}; \qquad b = \frac{\sigma}{\frac{9{,}81\Theta}{\zeta^2} L} = \frac{\sigma\zeta^2}{9{,}81\Theta L}.$$

Curentul electric i ia forma

$$i = \frac{u_b}{j2bL} (e^{-t(a - jb)} + e^{-t(a + jb)})$$

sau

$$i = \frac{u_b}{j2bL} e^{-\frac{r}{2L}t} (- e^{jbt} + e^{-jbt}) = - \frac{u_b}{bL} e^{-\frac{r}{2L}t} \sin bt.$$

Pentru determinarea curentului electric maximal, se formează

$$\frac{di}{dt} = 0.$$

Se obține

$$\frac{di}{dt} = - \frac{u_b}{bL} \left(- \frac{r}{2L} e^{-\frac{r}{2L}t_1} \sin bt_1 + e^{-\frac{r}{2L}t_1} b \cos bt_1 \right) = 0$$

Scanned with OKEN Scanner

de unde se deduc

$$\operatorname{tg} bt_1 = \frac{b}{\frac{r}{2L}}$$

$$\sin bt_1 = \frac{\operatorname{tg} bt_1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 bt_1}} = \frac{b}{\sqrt{\left(\frac{r}{2L}\right)^2 + b^2}} = \frac{b}{\sqrt{\frac{\zeta^2}{\Theta 9{,}81\, L}}} = b\sqrt{\frac{L\ \Theta\ 9{,}81}{\zeta^2}}.$$

Din

$$b = \frac{\zeta^2}{L\,\Theta 9{,}81}\,\sigma$$

se obține

$$\sin bt_1 = b\sqrt{\frac{\sigma}{b}} = \sqrt{\sigma b}$$

astfel că

$$i_{max} = -\frac{u_b}{bL}\,e^{-\frac{r}{2L}t_1}\sqrt{\sigma b} = -\frac{u_b}{\sqrt{\frac{b}{\sigma}}\,L}\,e^{-\frac{r}{2L}t_1}$$

34.12 FOLOSIREA INTEGRALEI FOURIER-MELLIN LA DETERMINAREA CURENTULUI ELECTRIC i, CÎND CIRCUITUL E DECONECTAT DE LA TENSIUNEA DE BORNE u_b ȘI E SCURTCIRCUITAT IMEDIAT

Folosirea integralei Fourier-Mellin posedă avantajul că ea reprezintă metoda generală, valabilă și în cazul cînd $F(p) = 0$, are pe $p = 0$ ca rădăcină și pot să existe și rădăcini multiple.

Pentru a se folosi integrala Fourier-Mellin se introduce substituția în integrala Fourier în forma

$$p = \frac{1}{p'}. \tag{1}$$

Se obține

$$\frac{1}{2\pi j}\int_{-j\infty}^{+j\infty}\frac{e^{pt}}{p}\,dp = \frac{1}{2\pi j}\int_{-j\infty}^{+j\infty} -\frac{e^{\frac{t}{p'}}}{p'}\,dp' = 1. \tag{2}$$

Se introduce în integrala Fourier tensiunea de borne u_b care există în momentul cînd circuitul e deconectat și imediat scurtcircuitat.

Se obține

$$\frac{1}{2\pi j}\int_{-j\infty}^{+j\infty}\frac{e^{\overline{p'}}}{-p'}\,u_b\,dp' = u_b. \tag{3}$$

Scanned with OKEN Scanner

În ce privește variația infinitezimală a curentului electric $di(t)$ se formează

$$di(t) = \frac{u_b e^{\frac{t}{p'}}}{-p'F(p')}\,dp' \tag{4}$$

de unde se obține

$$i(t) = \frac{1}{2\pi j}\int_{-j\infty}^{+j\infty} \frac{e^{\frac{t}{p'}} u_b}{-p'F(p')}\,dp'. \tag{5}$$

Pentru verificarea relației (5) se formează

$$\frac{u_b}{p'F(p')} = u_b\left\{A_1 \frac{1}{p'-p_1'} + \ldots + A_n \frac{1}{p'-p_n'}\right\} \tag{6}$$

deoarece lipsește termenul $A_0 = \frac{1}{F(0)} = 0$.

Pentru termenul

$$u_b\, A_k \frac{1}{p'-p_k'} \tag{7}$$

integrala (5) ne dă

$$\frac{1}{2\pi j}\int_{-j\infty}^{+j\infty} \frac{e^{\frac{t}{p'}} u_b A_k}{-(p'-p_k')}\,dp' = u_b A_k\, e^{-\frac{t}{p_k'}} \tag{8}$$

ceea ce înseamnă că nu mai este necesar să se folosească operatorul $\frac{1}{p'} = \frac{d}{dt}$ pentru efectuarea operației

$$\frac{p'}{p'-p_k'} e^{-\frac{t}{p_k'}} = e^{-\frac{t}{p_k'}}\ 1).$$

[1] O serie întreagă de probleme sînt prezentate în broșura intitulată „Aplicarea calculului operațional în studiul circuitelor electrice" de Pl. Andronescu Ed. Tehnică 1957.

ADAUS MATEMATIC LA PARTEA II

I. CÎTEVA NOȚIUNI DESPRE FUNCȚIILE TRIGONOMETRICE ȘI HIPERBOLICE

În figura A.1 se prezintă un punct P care se mișcă pe un cerc în planul complex.

x_t, y_t și α reprezintă măsurile coordonatelor punctului P în planul complex, iar α reprezintă măsura arcului, măsurat cu raza ca unitate, măsurat în radiani.

În planul complex se obține pentru măsurarea lui ρ

$$\frac{\rho}{r} = x_t + \mathrm{j}\, y_t = \mathrm{e}^{\mathrm{j}\alpha} = 1 + \frac{\mathrm{j}\alpha}{1!} + \frac{(\mathrm{j}\alpha)^2}{2!} + \frac{(\mathrm{j}\alpha)^3}{3!} + \cdots$$

$$x_t - \mathrm{j}\, y_t = \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\alpha} = 1 + \frac{(-\mathrm{j}\alpha)}{1!} + \frac{(-\mathrm{j}\alpha)^2}{2!} + \frac{(-\mathrm{j}\alpha)^3}{3!} + \cdots$$

$$x_t = \frac{1}{2}\,(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\alpha} + \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\alpha}) = \cos\alpha$$

$$y_t = \frac{1}{2\mathrm{j}}\,(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\alpha} - \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\alpha}) = \sin\alpha$$

în care $\mathrm{e}^{\mathrm{j}\alpha}$ reprezintă o funcție exponențială, cu argumentul complex.

Se obține

$$\sin\alpha = \frac{\alpha}{1!} - \frac{\alpha^3}{3!} + \frac{\alpha^5}{5!} - \frac{\alpha^7}{7!} + \cdots$$

$$\cos\alpha = 1 - \frac{\alpha^2}{2!} + \frac{\alpha^4}{4!} - \frac{\alpha^6}{6!} + \cdots$$

Figura A.2 reprezintă o hiperbolă echilaterală în planul real.

Exprimîndu-se suprafața cuprinsă de hiperbola echilaterală în forma

$$\int_{x=a}^{x} \sqrt{x^2 - a^2}\,\mathrm{d}x \text{ în care: } \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{a^2} = 1$$

Scanned with OKEN Scanner

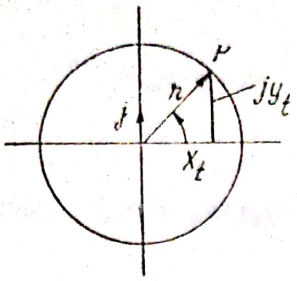


Fig. A.1. Funcții trigonometrice în forma complexă.

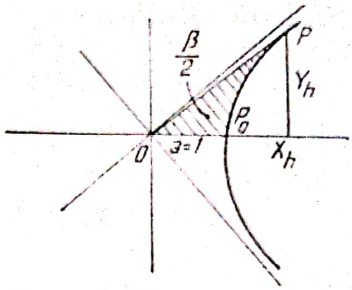


Fig. A.2. Hiperbola echilaterală în planul real.

se obține

$$\int_{x=a}^{x} \sqrt{x^2-a^2}\,dx = \int_{x=a}^{x} \frac{x^2-a^2}{\sqrt{x^2-a^2}}\,dx = (\alpha x+\beta)\sqrt{x^2-a^2} + C\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}}$$

din care se obține pentru determinarea coeficienților α, β

$$\frac{x^2-a^2}{\sqrt{x^2-a^2}} = \alpha\sqrt{x^2-a^2} + (\alpha x+\beta)\frac{x}{\sqrt{x^2-a^2}} + \frac{C}{\sqrt{x^2-a^2}}.$$

Se obține

$$\alpha = \frac{1}{2}; \quad \beta = 0; \quad C = -\frac{a^2}{2}.$$

Ca urmare

$$\int_{x=a}^{x} \sqrt{x^2-a^2}\,dx = \left(\frac{x}{2}\sqrt{x^2-a^2} - \frac{a^2}{2}\ln(x+\sqrt{x^2-a^2})\right)_a^x =$$

$$= \frac{x}{2}\sqrt{x^2-a^2} - \frac{a^2}{2}\ln\frac{x+\sqrt{x^2-a^2}}{a}.$$

Primul termen reprezintă suprafața triunghiului $\frac{xy}{2}$.

Dacă se împarte x și y cu a: $\frac{x}{a} = x_h$; $\frac{y}{a} = y_h$ se obțin măsurile lui x și y măsurate cu a ca unitate; de asemeni prin $\frac{a^2}{a^2} = 1$ se reprezintă măsura suprafeței a^2 care e măsurată cu a^2 luată ca unitate.

În felul acesta se obține

$$\frac{a^2}{2}\ln\frac{x+\sqrt{x^2-a^2}}{a} = \frac{1}{2}\ln(x_h+y_h) = \frac{\beta}{2};$$

$\frac{\beta}{2} = \frac{1}{2}\ln(x_h+y_h)$ reprezintă măsura suprafeței OP_0P.

Ca urmare măsura suprafeței formată de hiperbolă este

$$\int_{x_h=1}^{x_h} \sqrt{(x_h^2-1)}\,dx_h = \frac{x_h y_h}{2} - \frac{\beta}{2}.$$

Ne interesează relaţia

$$\beta = \ln (x_h + y_h) \quad \text{sau} \quad x_h + y_h = e^{\beta}. \tag{1}$$

Din

$$x_h^2 - y_h^2 = 1 = (x_h - y_h)(x_h + y_h)$$

se mai obţine

$$\frac{(x_h - y_h)(x_h + y_h)}{x_h + y_h} = \frac{1}{e^{\beta}} = e^{-\beta}.$$

astfel că

$$x_h - y_h = e^{-\beta}. \tag{2}$$

Din (1) şi (2) se obţine în planul real

$$\begin{aligned} x_h &= \frac{1}{2}(e^{\beta} + e^{-\beta}) = \operatorname{ch}\beta \\ y_h &= \frac{1}{2}(e^{\beta} - e^{-\beta}) = \operatorname{sh}\beta. \end{aligned} \tag{3}$$

Ca urmare x_h şi y_h reprezintă cosinus şi sinus hiperbolic, în care x_h şi y_h mai reprezintă măsurile coordonatelor punctului P de pe hiperbola echilaterală, cînd coordonatele au fost măsurate cu a ca unitate, iar $\frac{\beta}{2}$ reprezintă măsura suprafeţei cuprinsă între segmentele $\overline{OP}$ şi $\overline{OP_0}$ şi porţiunea din hiperbolă de la P_0 la P, care suprafaţă a fost măsurată cu a^2 ca unitate.

e^{β} reprezintă o funcţie hiperbolică cu argument real.

Mai avem

$$\operatorname{sh}\beta = \beta + \frac{\beta^3}{3!} + \frac{\beta^5}{5!} + \frac{\beta^7}{7} + \dots$$

$$\operatorname{ch}\beta = 1 + \frac{\beta^2}{2!} + \frac{\beta^4}{4!} + \frac{\beta^6}{6!} + \dots$$

Se formează funcţia exponenţială în forma

$$e^{\gamma} = e^{j\alpha} \cdot e^{\beta} = e^{\beta + j\alpha}$$

denumită funcţie exponenţială cu argument complex; funcţii hiperbolice cu argument complex.

În figura A.4 se reprezintă spirala logaritmică care exprimă funcţia exponenţială cu argument complex în planul complex, $e^{\gamma} = e^{\beta} \cdot e^{j\alpha}$.

Scanned with OKEN Scanner

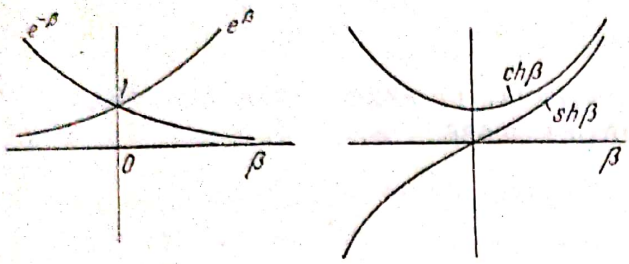


Fig. A.3. e^{β} și $e^{-\beta}$ ca funcție de β. ch β și sh β ca funcție de β.

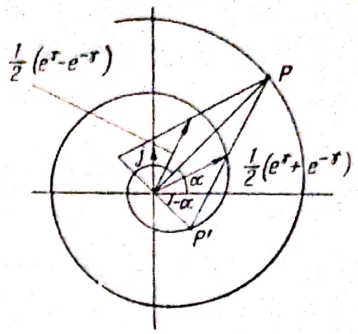


Fig. A.4. $e^{\gamma} = e^{j\alpha} \cdot e^{\beta}$ în planul complex

Se formează

$$\operatorname{sh}\gamma = \frac{1}{2}(e^{\gamma} - e^{-\gamma})$$

$$\operatorname{ch}\gamma = \frac{1}{2}(e^{\gamma} + e^{-\gamma})$$

în care $\operatorname{sh}\gamma$ și $\operatorname{ch}\gamma$ reprezintă sinus hiperbolic și cosinus hiperbolic cu argument complex.

În figura A.4 se prezintă $\operatorname{sh}\gamma$ și $\operatorname{ch}\gamma$ ca mărimi complexe.

Avem

$$\operatorname{sh}\gamma = \frac{1}{2}e^{\beta}(\cos\alpha + j\sin\alpha) - \frac{1}{2}e^{\beta}(\cos\alpha - j\sin\alpha) =$$

$$= \frac{1}{2}\cos\alpha(e^{\beta} - e^{-\beta}) + j\sin\alpha\,\frac{1}{2}(e^{\beta} + e^{-\beta}) = A_s e^{j\theta_s}.$$

Se formează

$$\frac{1}{4}\cos^2\alpha(e^{2\beta} + e^{-2\beta} - 2) + \frac{1}{4}\sin^2\alpha(e^{2\beta} + e^{-2\beta} + 2) =$$

$$= \frac{1}{2}\operatorname{ch}2\beta - \frac{1}{2}(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha) = \frac{1}{2}(\operatorname{ch}2\beta - \cos 2\alpha).$$

Ca urmare

$$A_s = \sqrt{\frac{1}{2}(\operatorname{ch}2\beta - \cos 2\alpha)}; \quad \operatorname{tg}\theta_s = \frac{\sin\alpha \cdot \operatorname{ch}\beta}{\cos\alpha \cdot \operatorname{sh}\beta}.$$

În mod analog se obține

$$\operatorname{ch}\gamma = \sqrt{\frac{1}{2}(\operatorname{ch}2\beta + \cos 2\alpha)} \cdot e^{j\theta_c} = A_c \cdot e^{j\theta_c}$$

în care

$$A_c = \sqrt{\frac{1}{2}(\operatorname{ch}2\beta + \cos 2\alpha)}; \quad \operatorname{tg}\theta_c = \frac{\sin\alpha \operatorname{sh}\beta}{\cos\alpha \operatorname{ch}\beta}.$$

Scanned with OKEN Scanner

2. NOȚIUNI FUNDAMENTALE DESPRE CALCULUL MATRICIAL

2.1 INTRODUCEREA CALCULULUI MATRICIAL LA REZOLVAREA SISTEMULUI DE ECUAȚII LINEARE

Se cere să se rezolve următorul sistem de ecuații lineare

$$\begin{aligned} a_{11}^{*} \quad & a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = y_1 \\ a_{21}^{*} \quad & a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = y_2 \\ a_{31}^{*} \quad & a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = y_3. \end{aligned} \tag{1}$$

Prin rezolvarea sistemului de ecuații lineare (1) cu ajutorul determinanților (metoda Cramer) se formează determinantul cu coeficienții din (1)

$$|\mathbf{a}| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \tag{2}$$

și se determină complementele algebrice (determinanții minori)

$$a_{11}^{*},\ a_{12}^{*},\ a_{13}^{*},\ a_{21}^{*}.....a_{33}^{*}.$$

Spre exemplu

$$a_{11}^{*} = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} (-1)^{1+1}; \quad a_{21}^{*} = \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} (-1)^{2+1}; \quad a_{31}^{*} = \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} (-1)^{3+1}. \tag{3}$$

Exponentul $(1 + 1)$ înseamnă numărul de ordine al liniei și al coloanei.

Pentru determinarea lui x_1 se înmulțesc ecuațiile din (1), prima cu complementul algebric a_{11}^{*}, a doua cu a_{21}^{*} și a treia cu a_{31}^{*} și se formează sume în care x_1, x_2, x_3, apar ca factori comuni.

Se obține

$$\begin{aligned} (a_{11}^{*}a_{11} + a_{21}^{*}a_{21} + a_{31}^{*}a_{31})\, x_1 = |\mathbf{a}|x_1 &= y_1a_{11}^{*} + y_2a_{21}^{*} + y_3a_{31}^{*} \\ (a_{12}a_{11}^{*} + a_{22}a_{21}^{*} + a_{32}a_{31}^{*})\, x_2 &= 0 \\ (a_{13}a_{11}^{*} + a_{23}a_{21}^{*} + a_{33}a_{31}^{*})\, x_3 &= 0. \end{aligned} \tag{4}$$

Ultimele două sume de produse sînt nule, pentru că s-au înlocuit elementele din prima coloană pe rînd cu elementele coloanei a doua respectiv cu elementele coloanei a treia.

Scanned with OKEN Scanner

Se ştie că un determinant cu două coloane identice e nul.
Ca urmare se obţine

$$x_1 = \frac{y_1 a_{11}^{*} + y_2 a_{21}^{*} + y_3 a_{31}^{*}}{|\mathbf{a}|} . \tag{5}$$

La numărător în (5) apare determinantul $|\mathbf{a}|$ în care s-au înlocuit elementele coloanei întîia (unde este x_1) prin y_1, y_2, y_3.

La determinarea lui x_2 respectiv x_3 se înlocuiesc în numărător termenii determinantului $|\mathbf{a}|$ din coloana a doua respectiv din coloana a treia prin y_1, y_2, y_3.

Se obţine

$$\begin{aligned} x_2 &= \frac{y_1 a_{12}^{*} + y_2 a_{22}^{*} + y_3 a_{32}^{*}}{|\mathbf{a}|} \\ x_3 &= \frac{y_1 a_{13}^{*} + y_2 a_{23}^{*} + y_3 a_{33}^{*}}{|\mathbf{a}|} . \end{aligned} \tag{6}$$

Prin introducerea matricelor sistemul de ecuaţii (1) ia o formă matricială

$$\mathbf{ax} = \mathbf{y} \tag{7}$$

în care matricele **a**, **x**, **y** posedă următoarele forme

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 & 0 & 0 \\ x_2 & 0 & 0 \\ x_3 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{y} = \begin{bmatrix} y_1 & 0 & 0 \\ y_2 & 0 & 0 \\ y_3 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \tag{8}$$

Liniile şi coloanele într-o matrice pătrată posedă acelaşi număr de elemente.

Pentru prescurtare matricele **x**, **y** care au coloane cu elemente nule, se reprezintă în formele

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}, \tag{9}$$

Matricea cu ζ linii şi ζ coloane e de ordinul ζ.

În exemplul luat matricea **a** reprezintă o matrice normală cu 9 elemente diferite de zero.

Cu cele 9 elemente se poate forma şi un determinant. Determinantul reprezintă valoarea numerică a matricei. *Matricele se reprezintă prin litere ceva mai groase ca cele obişnuite.*

Scanned with OKEN Scanner

Matricele **x** și **y** în exemplul luat au determinanți nuli, deci nu posedă valori numerice. Astfel de matrice sînt denumite *matrice singulare.*

Se introduc următoarele reguli pentru adunarea, scăderea, înmulțirea și împărțirea matricelor.

Prin adunarea și scăderea matricelor se înțelege adunarea respectiv scăderea elementelor din punctele corespunzătoare ale matricelor.

Se aplică regula comutației și a asociației.

Avem

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{b} + \mathbf{a} \text{ (regula comutației)}$$
$$\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c} = \mathbf{d} + \mathbf{c} \text{ (regula asociației)} \qquad (10)$$

în care

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{d}.$$

Două matrice **a**, **b** sînt egale, atunci cînd elementele corespunzătoare sînt egale.

În figura A.5 se reprezintă elementele matricei prin $a_{\nu\lambda}$ (linia ν și coloana λ).

Matricele **a**, **b** sînt egale cînd $a_{\lambda\nu} = b_{\lambda\nu}$. λ, ν reprezintă numerele de ordine ale liniilor respectiv coloanelor matricei.

În figura A.5 s-a considerat $\lambda < \nu$. Punctul (λk) exprimă intersecția liniei λ cu coloana k, iar $(k\nu)$ intersecția liniei k cu coloana ν.

$a_{\lambda k}$ reprezintă elementul matricei în punctul (λk), iar $a_{k\nu}$ elementul matricei în punctul $(k\nu)$.

La înmulțirea unei matrice cu o scalară, toate elementele matricei se înmulțesc cu acea scalară.

Se știe că la înmulțirea unui determinant cu o scalară, se înmulțește numai o linie sau numai o coloană cu acea scalară.

Iată o deosebire între determinant și matrice.

La înmulțirea a două matrice **a**, **b** care ne dă o nouă matrice în forma **c**:

$$\mathbf{ab} = \mathbf{c} \qquad (11)$$

se obține un element $c_{\lambda\nu}$ al matricei **c** în felul următor

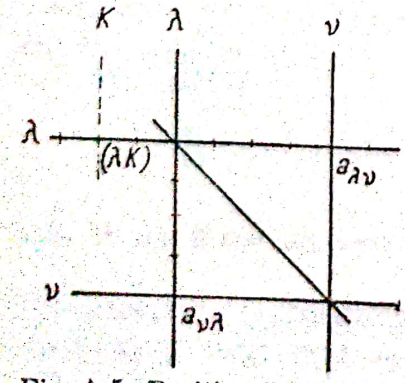


Fig. A.5. Poziția elementelor.

$$(\mathbf{ab})_{\lambda\nu} = c_{\lambda\nu} = \sum_{k=1}^{\zeta} a_{\lambda k} b_{k\nu}. \qquad (12)$$

Expresia (12) ne arată că cele ζ elemente de pe linia λ se înmulțesc cu cele ζ elemente corespunzătoare de pe coloana ν, iar produsele obținute se adună. În felul acesta suma reprezintă elementul $c_{\lambda\nu}$ al matricei c.

La înmulțirea a două matrice, regula comutației nu se aplică întotdeauna, adică

$$\mathbf{ab} \neq \mathbf{ba}. \qquad (13)$$

Spre exemplu

$$\mathbf{ab} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{ba} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_{11}a_{11} + b_{12}a_{21} & b_{11}a_{12} + b_{12}a_{22} \\ b_{21}a_{11} + b_{22}a_{21} & b_{21}a_{12} + b_{22}a_{22} \end{bmatrix}.$$

Se vede că elementele corespunzătoare ale produselor la comutația matricelor nu sînt egale.

Se aplică însă regula asociației și regula distribuției.

Avem

$$\mathbf{abc} = \mathbf{ae} \text{ (regula asociației).}$$

n care

$$\mathbf{e} = \mathbf{bc},$$

respectiv

$$\{\mathbf{a} + \mathbf{b}\}\,\mathbf{c} = \mathbf{ac} + \mathbf{bc} \text{ (regula distribuției)}$$

Matricea unitară

$$\varepsilon = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \tag{14}$$

Matricea unitară e o matrice diagonală, adică posedă numai elemente de forma $a_{\lambda\lambda}$ care sînt egale între ele și egale cu unitatea.

În general o matrice e simetrică cînd $a_{\lambda\nu} = a_{\nu\lambda}$. De aici se vede că matricea diagonală e simetrică.

Cînd se formează produsul a două matrice, dintre care una e diagonală, produsul lor e comutativ dacă matricea diagonală posedă elemente egale între ele.

Se formează produsele **ad** și **da**. Se obține

$$(\mathbf{ad})_{\lambda\nu} = \sum_{k=1}^{\zeta} a_{\lambda k} d_{k\nu}$$

$$(\mathbf{da})_{\lambda\nu} = \sum_{k=1}^{\zeta} d_{\lambda k} a_{k\nu}$$

astfel că

$$(\mathbf{ad})_{\lambda\nu} - (\mathbf{da})_{\lambda\nu} = \sum_{k=1}^{\zeta} \{a_{\lambda k} d_{k\nu} - d_{\lambda k} a_{k\nu}\}.$$

Scanned with OKEN Scanner

Deoarece avem $d_{\lambda k} \neq 0$ numai pentru $k = \lambda$

$$d_{kv} \neq 0 \text{ numai pentru } k = \nu$$

rezultă

$$(\mathbf{ad})_{\lambda\nu} - (\mathbf{da})_{\lambda\nu} = a_{\lambda\nu}\{d_{\nu\nu} - d_{\lambda\lambda}\}. \tag{15}$$

Din (15) se constată că diferența produselor comutate e nulă numai cînd matricea diagonală posedă elemente egale între ele.

Avem

$$d_{\nu\nu} = d_{\lambda\lambda}.$$

După cum se va vedea mai tîrziu vom avea și alte produse de două matrice, la care se aplică regula comutației.

Din (15) se vede că la produsul oricărei matrice cu matricea unitară ε, se aplică regula comutației.

Avem

$$\varepsilon\mathbf{a} = \mathbf{a}\varepsilon.$$

Aplicînd regula înmulțirii la relația matricială din (7) în care matricele se reprezintă prin (8), se obține

$$\begin{bmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 & 0 & 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 & 0 & 0 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}, \tag{16}$$

Din (16) se constată că formînd egalitatea între elementele celor două matrice se obțin relațiile (1).

Înainte de a trece la determinarea matricei x din (7) să urmărim cîteva exemple de produse de cîte două matrice.

Exemple de produse de două matrice

1) Forța $\mathfrak{F}$ care apare ca o mărime vectorială se reprezintă ca un produs de două matrice în forma:

$$\mathfrak{F} = [F_x F_y F_z] \begin{bmatrix} i \\ j \\ k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_x i + F_y j + F_z k & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathfrak{F} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

În acest exemplu apare o matrice cu un singur element (o matrice zero dimensională), care e o matrice singulară.

Acest fapt justifică de-a exprima matricea numai printr-o literă ceva mai groasă, în loc să formăm o expresie de forma [a].

2) Puterea momentană p la un circuit trifazat se exprimă în formă de produs matricial prin

$$p = [i_1, i_2, i_3]\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} i_1u_1 + i_2u_2 + i_3u_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

3) Energia electrică momentană W_e în forma matricială

$$W_e = \frac{1}{2}[Q_1, Q_2, \ldots Q_n]\begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ V_n \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} Q_1V_1 + Q_2V_2 + \ldots + Q_nV_n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} W_m & 0 & 0\ldots0 \\ 0 & & \\ 0 & & \\ \cdot & & \\ 0 & & 0 \end{bmatrix}$$

4) Energia magnetică momentană în forma matricială

$$W_m = \frac{1}{2}[\psi_1, \psi_2 \ldots \psi_n]\begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ i_n \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} \psi_1i_1 + \psi_2i_2 + \ldots + \psi_ni_n & 0\ldots0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \cdot & \cdot \\ 0 & 0 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} W_e & 0 & 0\ldots0 \\ 0 & & \\ 0 & & \\ \cdot & & \\ 0 & & 0 \end{bmatrix}$$

5) $[a_{11}\ a_{12}][b_{11}\ b_{12}] = [a_{11}b_{11}\ \ a_{11}b_{12}] = a_{11}[b_{11}\ b_{12}]$

6) $\begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} b_{11} \\ b_{21} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & b_{11} \\ a_{21} & b_{11} \end{bmatrix} = b_{11}\begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{bmatrix}$

Scanned with OKEN Scanner

7) $\begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{bmatrix} [b_{11} b_{12}] = \begin{bmatrix} a_{11}b_{11} & a_{11}b_{12} \\ a_{21}b_{11} & a_{21}b_{12} \end{bmatrix}$

8) $[a_{11}\ a_{12}] \begin{bmatrix} b_{11} \\ b_{21} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

O matrice e transpusă cînd liniile sînt transpuse în coloane sau viceversa.

Spre exemplu

$$\mathbf{a}_t = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{bmatrix} \tag{17}$$

matricea $\mathbf{a}_t$ e transpusă față de matricea $\mathbf{a}$ din (8).

Matricea transpusă e egală cu matricea inițială dacă matricea inițială e simetrică ($a_{\lambda\nu} = a_{\nu\lambda}$).

O matrice e complexă, cînd elementele ei reprezintă mărimi complexe.

Matricea complexă e conjugată, cînd elementele ei $a_{\lambda\nu}$ și $a_{\nu\lambda}$ sînt conjugate.

Matricea e hermitică cînd elementele diagonalei principale sînt mărimi reale, iar elementele $a_{\lambda\nu}$, $a_{\nu\lambda}$ reprezintă mărimi complexe conjugate.

O matrice e adjunctă cînd elementele unei coloane sînt conjugate cu elementele liniei corespunzătoare a matricei inițiale.

În cazul matricelor transpuse se obțin

$$\begin{aligned} (\mathbf{ab})_t &= \mathbf{b}_t\mathbf{a}_t = \mathbf{c}_t \\ (\mathbf{abc})_t &= \mathbf{c}_t\mathbf{b}_t\mathbf{a}_t = \mathbf{d}_t. \end{aligned} \tag{18}$$

Produsul a două matrice e nul, cînd toate elementele matricei obținute sînt nule.

Exemple de produse de matrice singulare care ne dau o matrice nulă

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ a_{31} & a_{32} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & a_{13} \\ a_{21} & 0 & a_{23} \\ a_{31} & 0 & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & 0 \\ a_{21} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

2.2. REZOLVAREA UNUI SISTEM DE ECUAȚII LINEARE CU AJUTORUL CALCULULUI MATRICIAL

Se introduce matricea reciprocă $\mathbf{a}^{-1}$ definită prin:

$$\mathbf{a}\mathbf{a}^{-1} = \varepsilon \tag{1}$$

Cînd se cunoaște matricea **a** se determină matricea **a*** formată din complementele algebrice ale matricei **a**. După aceea se formează matricea transpusă $\mathbf{a}_t^*$.

Pentru matricea **a** din (8) se obține matricea transpusă în forma

$$\mathbf{a}_t^* = \begin{bmatrix} a_{11}^* & a_{21}^* & a_{31}^* \\ a_{12}^* & a_{22}^* & a_{32}^* \\ a_{13}^* & a_{23}^* & a_{33}^* \end{bmatrix}. \tag{2}$$

Se constată egalitatea

$$\mathbf{a}\mathbf{a}_t^* = \mathbf{a}_t^*\mathbf{a} = |\mathbf{a}|\,\varepsilon \tag{3}$$

în care $|\mathbf{a}|$ reprezintă determinantul matricei **a**.

Din (3) se vede că produsul $\mathbf{a}\mathbf{a}_t^*$ e comutativ.

Ca urmare din

$$\mathbf{a}\mathbf{a}^{-1} = \varepsilon \tag{4}$$

$$\mathbf{a}\mathbf{a}_t^* = |\mathbf{a}|\,\varepsilon$$

se deduce

$$\frac{\mathbf{a}^{-1}}{\mathbf{a}_t^*} = \frac{1}{|\mathbf{a}|}$$

sau

$$\mathbf{a}^{-1} = \frac{1}{|\mathbf{a}|}\,\mathbf{a}_t^* \tag{5}$$

Relațiile (4) ne mai arată că produsul matricial

$$\mathbf{a}\mathbf{a}^{-1} = \mathbf{a}^{-1}\mathbf{a} \tag{6}$$

e comutativ.

Trecem la rezolvarea ecuației matriciale

$$\mathbf{a}\mathbf{x} = \mathbf{y}. \tag{7}$$

Se formează produsul

$$\mathbf{a}^{-1}\mathbf{a}\mathbf{x} = \mathbf{x} = \mathbf{a}^{-1}\mathbf{y} = \frac{1}{|\mathbf{a}|}\,\mathbf{a}_t^*\mathbf{y}. \tag{8}$$

Scanned with OKEN Scanner

Într-adevăr rezultă

$$\mathbf{x} = \frac{1}{|\mathbf{a}|}\begin{bmatrix} a_{11}^* & a_{21}^* & a_{31}^* \\ a_{12}^* & a_{22}^* & a_{32}^* \\ a_{13}^* & a_{23}^* & a_{33}^* \end{bmatrix}\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{1}{|\mathbf{a}|}\begin{bmatrix} a_{11}^* y_1 + a_{21}^* y_2 + a_{31}^* y_3 & 0 & 0 \\ a_{12}^* y_1 + a_{22}^* y_2 + a_{32}^* y_3 & 0 & 0 \\ a_{13}^* y_1 + a_{23}^* y_2 + a_{33}^* y_3 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}. \tag{9}$$

Din egalarea elementelor corespunzătoare se obține același rezultat ca în (5), (6) și (7) prin aplicarea metodei Cramer.

Faptul că un sistem de ecuații lineare se poate exprima într-o formă simplă ca o ecuație matricială, prezintă avantajul de a se putea efectua cu astfel de relații de forma (7) alte operații de adunări, scăderi, înmulțiri exprimate simplu.

Exemple de ecuații matriciale

1) Ecuațiile de capacitate ale lui Maxwell

$$C_{11}V_1 + C_{12}V_2 = C_{13}V_3 = Q_1$$
$$C_{21}V_1 + C_{22}V_2 + C_{23}V_3 = Q_2$$
$$C_{31}V_1 + C_{32}V_2 + C_{33}V_3 = Q_3$$

în care V_1, V_2, V_3 și Q_1, Q_2, Q_3 reprezintă potențialele electrice și sarcinile electrice ale corpurilor metalice electrizate, se mai poate pune în forma

$$\sum_{\nu=1}^{n} C_{\lambda\nu}V_\nu = Q_\lambda.$$

cu $\lambda = 1, 2, 3 \ldots n$.

În forma matricială ecuațiile de capacitate ale lui Maxwell iau forma

$$\mathbf{CV} = \mathbf{Q} \tag{10}$$

în care

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} \end{bmatrix} \quad \mathbf{V} = \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{bmatrix} \quad \mathbf{Q} = \begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ Q_3 \end{bmatrix}.$$

Scanned with OKEN Scanner

Cînd se dau matricele **C** și **Q** se obține matricea **V** în forma

$$\mathbf{C}^{-1}\mathbf{C}\mathbf{V} = \mathbf{V} = \mathbf{C}^{-1}\mathbf{Q} = \frac{1}{|\mathbf{C}|}\mathbf{C}_t^*\mathbf{Q} \tag{11}$$

2) Din cercetarea unui circuit electric în conectare complexă se obține următorul sistem de ecuații lineare cu mărimi complexe

$$\begin{aligned}(\varkappa_1 + \varkappa_2)\mathcal{J}_1 + 0\cdot\mathcal{J}_4 + \varkappa_2\mathcal{J}_5 &= \mathcal{U}_b\\ 0\cdot\mathcal{J}_1 + (\varkappa_3 + \varkappa_4)\mathcal{J}_4 + \varkappa_3\mathcal{J}_5 &= \mathcal{U}_b\\ \varkappa_2\cdot\mathcal{J}_1 - \varkappa_4\mathcal{J}_4 + (\varkappa_2 + \varkappa_5)\mathcal{J}_5 &= 0.\end{aligned} \tag{12}$$

Sistemul de ecuații lineare (12) se reprezintă în forma matricială

$$\mathbf{z}_\alpha\mathbf{y}_\alpha = \mathbf{U}_\alpha \tag{13}$$

în care

$$\mathbf{z}_\alpha = \begin{bmatrix}\varkappa_1 + \varkappa_2 & 0 & \varkappa_2\\ 0 & \varkappa_3 + \varkappa_4 & \varkappa_3\\ \varkappa_2 & -\varkappa_4 & \varkappa_2 + \varkappa_5\end{bmatrix};\quad \mathbf{I}_\alpha = \begin{bmatrix}\mathcal{J}_1\\ \mathcal{J}_4\\ \mathcal{J}_5\end{bmatrix};\quad \mathbf{U}_\alpha = \begin{bmatrix}\mathcal{U}_b\\ \mathcal{U}_b\\ 0\end{bmatrix} \tag{14}$$

Se obține:

$$\mathbf{z}_\alpha^{-1}\mathbf{z}_\alpha\mathbf{I}_\alpha = \mathbf{I}_\alpha = \mathbf{z}_\alpha^{-1}\mathbf{U}_\alpha = \frac{1}{|\mathbf{z}_\alpha|}\mathbf{z}_{\alpha_t}^*\mathbf{U}_\alpha\,. \tag{15}$$

De altfel

$$\mathbf{z}_\alpha^{-1} = \mathbf{y}_\alpha \tag{16}$$

$\mathbf{y}_\alpha$ în (16) reprezintă matricea admitanță.

3) Într-un circuit trifazat în conectare stea, se obțin pentru fiecare fază ecuațiile de tensiune în formele

$$\begin{aligned}\varkappa_1\mathcal{J}_1 &= \mathcal{U}_1\\ \varkappa_2\mathcal{J}_2 &= \mathcal{U}_2\\ \varkappa_3\mathcal{J}_3 &= \mathcal{U}_3.\end{aligned} \tag{17}$$

Sistemul de ecuații (17) se mai poate exprima în forma:

$$\begin{aligned}\varkappa_1\mathcal{J}_1 + 0\cdot\mathcal{J}_2 + 0\cdot\mathcal{J}_3 &= \mathcal{U}_1\\ 0\cdot\mathcal{J}_1 + \varkappa_2\mathcal{J}_2 + 0\cdot\mathcal{J}_3 &= \mathcal{U}_2\\ 0\cdot\mathcal{J}_1 + 0\cdot\mathcal{J}_2 + \varkappa_3\mathcal{J}_3 &= \mathcal{U}_3.\end{aligned} \tag{18}$$

Scanned with OKEN Scanner

Sistemul de ecuații (18) în forma matricială $\mathbf{zI} = \mathbf{U}$ în care

$$\mathbf{z} = \begin{bmatrix} z_1 & 0 & 0 \\ 0 & z_2 & 0 \\ 0 & 0 & z_3 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{I} = \begin{bmatrix} \mathcal{I}_1 \\ \mathcal{I}_2 \\ \mathcal{I}_3 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{U} = \begin{bmatrix} \mathcal{U}_1 \\ \mathcal{U}_2 \\ \mathcal{U}_3 \end{bmatrix} \tag{19}$$

$\mathbf{z}$ apare ca o matrice diagonală.

Matricea reciprocă $\mathbf{z}^{-1}$ devine:

$$\mathbf{z}^{-1} = \frac{1}{|\mathbf{z}|} \begin{bmatrix} z_{11}^* & z_{21}^* & z_{31}^* \\ z_{12}^* & z_{22}^* & z_{32}^* \\ z_{13}^* & z_{23}^* & z_{33}^* \end{bmatrix} = \frac{1}{z_1 z_2 z_3} \begin{bmatrix} z_2 z_3 & 0 & 0 \\ 0 & z_3 z_1 & 0 \\ 0 & 0 & z_1 z_2 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{1}{z_1} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{z_2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{z_3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 & 0 & 0 \\ 0 & y_2 & 0 \\ 0 & 0 & y_3 \end{bmatrix} = \mathbf{y} \tag{20}$$

$\mathbf{y}$ reprezintă matricea admitanță.

Se obține

$$\mathbf{z}^{-1}\mathbf{zI} = \mathbf{I} = \mathbf{z}^{-1}\mathbf{U} = \frac{1}{|\mathbf{z}|} \mathbf{z}_i^* \mathbf{U} = \mathbf{yU}. \tag{21}$$

4) Din cercetarea unui circuit electric, a rezultat următoarea ecuație matricială

$$\begin{bmatrix} z_{11} & z_{12} & z_{13} & z_{14} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ z_{21} & z_{22} & z_{23} & z_{24} \\ z_{31} & z_{32} & z_{33} & z_{34} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ z_{41} & z_{42} & z_{43} & z_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathcal{I}_1 \\ \mathcal{I}_2 \\ \mathcal{I}_3 \\ \mathcal{I}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathcal{U}_1 \\ \cdots \\ 0 \\ 0 \\ \cdots \\ 0 \end{bmatrix} \tag{22}$$

adică

$$\mathbf{zI} = \mathbf{U}.$$

Calculul poate fi ușurat dacă matricea $\mathbf{z}$ se reprezintă spre exemplu în forma

$$\mathbf{z} = \begin{bmatrix} z_a & z_b \\ z_c & z_d \end{bmatrix} \tag{23}$$

în care

$$\mathbf{z}_a = [z_{11}z_{12}z_{13}];\ \mathbf{z}_b = [z_{14}];\ \mathbf{z}_c = \begin{bmatrix} z_{21} & z_{22} & z_{23} \\ z_{31} & z_{32} & z_{33} \\ z_{41} & z_{42} & z_{43} \end{bmatrix};\quad \mathbf{z}_d = \begin{bmatrix} z_{24} \\ z_{34} \\ z_{44} \end{bmatrix}. \tag{24}$$

Pentru descompunerea matricei lui **I** ca să corespundă descompunerii matricei lui **z** se ține seama de forma matricei **I**:

$$\left[\begin{array}{c|ccc} \mathcal{J}_1 & 0 & 0 & 0 \\ \mathcal{J}_2 & 0 & 0 & 0 \\ \mathcal{J}_3 & 0 & 0 & 0 \\ \hline \mathcal{J}_4 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \tag{25}$$

și de primul element al matricei rezultat, deci produsul **zI** ia forma

$$z_{11}\mathcal{J}_1 + z_{12}\mathcal{J}_2 + z_{13}\mathcal{J}_3 + z_{14}\mathcal{J}_4 = \mathcal{U}_1. \tag{26}$$

Deoarece matricea $\mathbf{z}_a$ e cunoscută, se vede că matricea $\mathbf{I}_a$ corespunzătoare va trebui să fie

$$\mathbf{I}_a = \begin{bmatrix} \mathcal{J}_1 \\ \mathcal{J}_2 \\ \mathcal{J}_3 \end{bmatrix} \tag{27}$$

pentru ca produsul $\mathbf{z}_a\mathbf{I}_a$ să dea

$$z_a\mathcal{J}_a = z_{11}\mathcal{J}_1 + z_{12}\mathcal{J}_2 + z_{13}\mathcal{J}_3. \tag{28}$$

Ca urmare linia punctată în (25) va lua forma fixată.
Pentru matricea $\mathbf{U}_1$ apare linia punctată sus.
Se obține

$$\begin{aligned} &\mathbf{I}_b = 0;\quad \mathbf{I}_c = [\mathbf{I}_4];\quad \mathbf{I}_d = 0;\ \mathbf{U}_a = [\mathbf{U}_1] \\ &\mathbf{U}_b = 0;\quad \mathbf{U}_c = 0;\quad \mathbf{U}_d = 0. \end{aligned} \tag{29}$$

Ca urmare relația matricială (22) devine:

$$\begin{bmatrix} z_a & z_b \\ z_c & z_d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \mathcal{J}_a \\ \mathcal{J}_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathcal{U}_a \\ 0 \end{bmatrix}. \tag{30}$$

În relația matricială (30) se vede că termenii matricei **z** sînt matrice cunoscute.

Se formează prdusul

$$\begin{bmatrix} z_a\mathcal{J}_a + z_b\mathcal{J}_c & 0 \\ z_c\mathcal{J}_a + z_d\mathcal{J}_c & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathcal{U}_a \\ 0 \end{bmatrix} \tag{31}$$

de unde rezultă

$$\begin{aligned} \mathbf{z}_a\mathbf{I}_a + \mathbf{z}_b\mathbf{I}_c &= \mathbf{U}_a \\ \mathbf{z}_c\mathbf{I}_a + \mathbf{z}_d\mathbf{I}_c &= 0. \end{aligned} \tag{32}$$

Pentru a elimina, spre exemplu pe $\mathbf{I}_c$ se înmulțește ecuația doua din (32) cu $\mathbf{z}_d^{-1}$.

Se obține

$$-\mathbf{z}_d^{-1}\mathbf{z}_c\mathbf{I}_a = \mathbf{I}_c. \tag{33}$$

Prima ecuație din (32) ia forma

$$(\mathbf{z}_a - \mathbf{z}_b\mathbf{z}_d^{-1}\mathbf{z}_c)\,\mathbf{I}_a = \mathbf{U}_a, \tag{34}$$

de unde se obține matricea $\mathbf{I}_a$.

În mod analog se obține din (33) matricea $\mathbf{I}_c$.

2.3. MATRICEA CARACTERISTICĂ

Prin definiție se formează

$$\mathbf{a} - \lambda_a\varepsilon = \mathbf{c} \tag{1}$$

în care $\mathbf{a}$ reprezintă o matrice normală, iar λ_a o scalară.

Matricea $\mathbf{c}$ e denumită *matricea caracteristică* a matricei $\mathbf{a}$.

Din diferența matricelor din (1)

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda_a & 0 \\ 0 & \lambda_a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} - \lambda_a & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda_2 \end{bmatrix} = \mathbf{c} \tag{2}$$

se obține matricea caracteristică $\mathbf{c}$ din (2).

Determinantul $|\mathbf{c}|$ al matricei $\mathbf{c}$ e denumit *funcția caracteristică* a matricei $\mathbf{a}$.

Făcînd funcția caracteristică a matricei $\mathbf{a}$ în forma $|\mathbf{c}|$ egală cu zero

$$|\mathbf{c}| = 0 \tag{3}$$

se obține ecuația caracteristică.

Avem

$$|\mathbf{c}| = (a_{11} - \lambda_a)(a_{22} - \lambda_a) - a_{12}a_{21} = 0$$

sau

$$\lambda_a^2 - \lambda_a(a_{11} + a_{22}) + a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = 0. \tag{4}$$

Scanned with OKEN Scanner

În felul acesta matricea **c** a devenit o matrice singulară.
Se obține

$$\lambda_{a_1},\ \lambda_{a_2} = \frac{a_{11}+a_{22}}{2} \pm \sqrt{\frac{(a_{11}-a_{22})^2}{4} - (a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21})}$$

λ_{a_1}, λ_{a_2} reprezintă *valorile proprii* ale matricei **a**.
Se mai poate scrie

$$\lambda_{a_1},\ \lambda_{a_2} = \frac{a_{11}+a_{22}}{2} \pm \sqrt{\frac{(a_{11}-a_{22})^2}{4} + a_{12}a_{21}}. \tag{5}$$

Se verifică ușor relația

$$\lambda_{a_1} \cdot \lambda_{a_2} = |\,\mathbf{a}\,|. \tag{6}$$

Avem

$$\lambda_{a_1},\ \lambda_{a_2} = \left(\frac{a_{11}+a_{22}}{2}\right)^2 - \left(\frac{(a_{11}+a_{22})^2}{4} + a_{12}a_{21}\right) = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = |\,\mathbf{a}\,|.$$

Se formează cu valorile proprii ale matricei **a** o matrice diagonală în forma

$$\mathbf{d}_a = \begin{bmatrix} \lambda_{a_1} & 0 \\ 0 & \lambda_{a_2} \end{bmatrix}. \tag{7}$$

Se constată că matricea **a** și matricea diagonală $\mathbf{d}_a$ formată cu valorile proprii ale matricei **a** posedă același determinant.
Aceasta nu înseamnă că matricele **a** și $\mathbf{d}_a$ sînt egale, deoarece nu au elemente egale între ele.

2.4. TEOREMA LUI CAYLEY-HAMILTON

Dacă în ecuația caracteristcă

$$|\,\mathbf{c}\,| = 0 = \lambda^2 - \lambda(a_{11}+a_{22}) + (a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}) \tag{1}$$

se înlocuiește scalara λ prin matricea **a** se obține o ecuație matricială în forma

$$0 = \mathbf{a}^2 - \mathbf{a}(a_{11}+a_{22}) + \varepsilon(a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}) \tag{2}$$

ceea ce se verifică ușor

$$\mathbf{a}^2 = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}^2 + a_{12}a_{21} & a_{11}a_{12} + a_{12}a_{22} \\ a_{21}a_{11} + a_{22}a_{21} & a_{21}a_{12} + a_{22}^2 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{a}(a_{11}+a_{22}) = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}(a_{11}+a_{22}) = \begin{bmatrix} (a_{11}^2 + a_{11}a_{22} & a_{12}a_{11} + a_{12}a_{22} \\ a_{21}a_{11} + a_{21}a_{22} & a_{22}a_{11} + a_{22}^2 \end{bmatrix}$$

$$\varepsilon(a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}) = \begin{bmatrix} a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21} & 0 \\ 0 & a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21} \end{bmatrix}.$$

Scanned with OKEN Scanner

Fiecare element al matricei rezultante din (2) devine nul.
Avem

$$\begin{aligned} a_{11}^2 + a_{12}a_{21} - a_{11}^2 - a_{11}a_{22} + a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} &= 0 \\ a_{11}a_{12} + a_{12}a_{22} - a_{12}a_{11} - a_{12}a_{22} + 0 &= 0 \\ a_{21}a_{11} + a_{22}a_{21} - a_{21}a_{11} - a_{21}a_{22} + 0 &= 0 \\ a_{21}a_{12} + a_{22}^2 - a_{22}a_{11} - a_{22}^2 + a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} &= 0. \end{aligned} \tag{3}$$

2.5. FOLOSIREA MATRICELOR LA CERCETAREA CIRCUITELOR ELECTRICE

În figura A.6, α se reprezintă un circuit electric în care impedanța z reprezintă impedanța de linie iar z_b impedanța de utilizare.
Se introduce în figura A.6, β circuitul cuadripolar cu relațiile

$$\begin{aligned} \mathcal{U}_0 &= 1 \cdot \mathcal{U}_1 + z \cdot \mathcal{I}_1 \\ \mathcal{I}_0 &= 0 \cdot \mathcal{U}_1 + 1 \cdot \mathcal{I}_1 \end{aligned} \tag{1}$$

Ecuațiile (1) ne conduc la ecuația matricială în forma

$$\mathbf{E}_0 = \mathbf{a}\mathbf{E}_1, \tag{2}$$

în care

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} 1 & z_1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{E}_0 = \begin{bmatrix} \mathcal{U}_0 \\ \mathcal{I}_0 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{E}_1 = \begin{bmatrix} \mathcal{U}_1 \\ \mathcal{I}_1 \end{bmatrix}. \tag{3}$$

Deosebim două cazuri:
Se dau $\mathbf{a}$ și $\mathbf{E}_1$ și se obține $\mathbf{E}_0$ sau se dau $\mathbf{a}$ și $\mathbf{E}_0$ și se obține $\mathbf{E}_1$.
Spre exemplu cînd se dau $\mathbf{a}$ și $\mathbf{E}_0$ se formează

$$\mathbf{a}^{-1}\mathbf{E}_0 = \mathbf{a}^{-1}\mathbf{a}\mathbf{E}_1 = \mathbf{E}_1 \tag{4}$$

în care

$$\mathbf{a}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -z \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{5}$$

$$\mathbf{a}^{-1}\mathbf{E}_0 = \begin{bmatrix} 1 & -z \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathcal{U}_0 \\ \mathcal{I}_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathcal{U}_1 \\ \mathcal{I}_1 \end{bmatrix} \tag{6}$$

$$\mathcal{U}_0 - z\mathcal{I}_0 = \mathcal{U}_1 \tag{7}$$

$$\mathcal{I}_0 = \mathcal{I}_1 \tag{8}$$

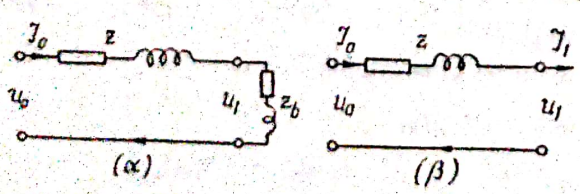


Fig. A.6. Circuite electrice în serie

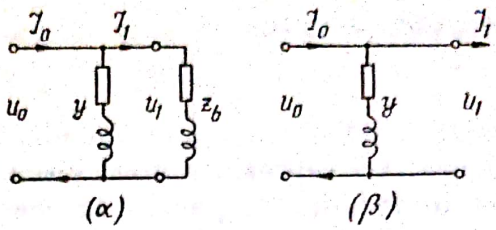


Fig. A.7. Circuite electrice în paralel.

Figura A.7, α reprezintă două circuite electrice în paralel. Se introduce circuitul cuadripolar din figura A.7, β Pentru circuitul cuadripolar se obțin următoarele relații:

$$\begin{aligned} \mathcal{U}_0 &= 1 \cdot \mathcal{U}_1 + 0 \cdot \mathcal{I}_1 \\ \mathcal{I}_0 &= y \cdot \mathcal{U}_1 + 1 \cdot \mathcal{I}_1. \end{aligned} \tag{9}$$

Ecuațiile (9) se reprezintă în forma matricială

$$\mathbf{E}_0 = \mathbf{a}\mathbf{E}_1 \tag{10}$$

în care

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ y & 1 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{E}_0 = \begin{bmatrix} \mathcal{U}_0 \\ \mathcal{I}_0 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{E}_1 = \begin{bmatrix} \mathcal{U}_1 \\ \mathcal{I}_1 \end{bmatrix}. \tag{11}$$

În figura A.8 se prezintă două circuite cuadripolare în lanț care în exemplul luat corespund la două circuite în serie. Pentru fiecare din circuitele cuadripolare se obțin ecuațiile matriciale

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_0 &= \mathbf{a}_0\mathbf{E}_1 \\ \mathbf{E}_1 &= \mathbf{a}_1\mathbf{E}_2. \end{aligned} \tag{12}$$

Pentru cele două circuite cuadripolare în lanț avem

$$\mathbf{E}_0 = \mathbf{a}_0\mathbf{a}_1\mathbf{E}_2 \tag{13}$$

în care

$$\mathbf{a}_0\mathbf{a}_1 = \begin{bmatrix} 1 & z_0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & z_1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & z_1 + z_0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{14}$$

astfel că

$$\begin{bmatrix} \mathcal{U}_0 \\ \mathcal{I}_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & z_0 + z_1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \mathcal{U}_2 \\ \mathcal{I}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathcal{U}_2 + (z_0 + z_1)\mathcal{I}_2 & 0 \\ \mathcal{I}_2 & 0 \end{bmatrix}. \tag{15}$$

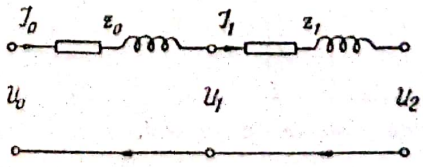


Fig. A.8. Două circuite în serie.

Din (15) se obține

$$\mathcal{U}_0 = \mathcal{U}_2 + (z_0 + z_1)\,\mathcal{I}_2;\quad \mathcal{I}_0 = \mathcal{I}_2. \tag{16}$$

Relațiile (16) corespund la două circuite în serie.

Figura A.9 reprezintă două circuite cuadripolare în lanț care corespund la două impedanțe în paralel la aceeași tensiune $\mathcal{U}_1$.

Pentru fiecare circuit cuadripolar se obțin relațiile matriciale

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_0 &= \mathbf{a}_0\mathbf{E}_1 \\ \mathbf{E}_1 &= \mathbf{a}_1\mathbf{E}_2. \end{aligned} \tag{17}$$

Pentru lanțul format din cele două circuite cuadripolare, se obține

$$\mathbf{E}_0 = \mathbf{a}_0\mathbf{a}_1\mathbf{E}_2 \tag{18}$$

în care

$$\mathbf{a}_0\mathbf{a}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ y_0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ y_1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ y_0 + y_1 & 1 \end{bmatrix}. \tag{19}$$

Relația (18) ia forma:

$$\begin{bmatrix} \mathcal{U}_0 \\ \mathcal{I}_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ y_0 + y_1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \mathcal{U}_2 \\ \mathcal{I}_2 \end{bmatrix} \tag{20}$$

de unde se obține

$$\mathcal{U}_0 = \mathcal{U}_2;\ \mathcal{I}_0 = (y_0 + y_1)\,\mathcal{U}_2 + \mathcal{I}_2. \tag{21}$$

Figura A.10 reprezintă circuitul echivalent al unui transformator. Din punct de vedere maticial apar trei circuite cuadripolare în lanț.

Pentru fiecare circuit cuadripolar avem relațiile matriciale

$$\mathbf{E}_0 = \mathbf{a}_0\mathbf{E}_1;\quad \mathbf{E}_1 = \mathbf{a}_1\mathbf{E}_2;\quad \mathbf{E}_2 = \mathbf{a}_2\mathbf{E}_3 \tag{22}$$

în care

$$\mathbf{a}_0 = \begin{bmatrix} 1 & z_0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix};\quad \mathbf{a}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ y_1 & 1 \end{bmatrix};\quad \mathbf{a}_2 = \begin{bmatrix} 1 & z_2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}. \tag{23}$$

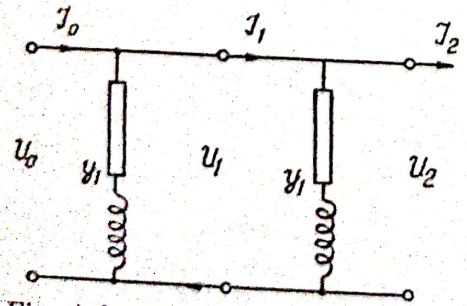


Fig. A.9. Două circuite în paralel.

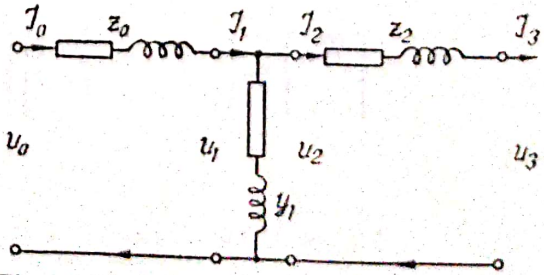


Fig. A.10. Circuitul echivalent al unui transformator.

Scanned with OKEN Scanner

Pentru cele trei circuite cuadripolare în lanț se obține următoarea relație matricială

$$\mathbf{E}_0 = \mathbf{a}_0\mathbf{a}_1\mathbf{a}_2\mathbf{E}_3 \tag{24}$$

în care

$$\mathbf{a}_0\mathbf{a}_1\mathbf{a}_2 = \begin{bmatrix} 1 & z_0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ y_1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & z_2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{a}_0\mathbf{a}_1\mathbf{a}_2 = \begin{bmatrix} 1 + z_0y_1 & (1 + z_0y_1)\, z_2 + z_0 \\ y_1 & y_1z_2 + 1 \end{bmatrix} \tag{25}$$

ca urmare

$$\mathcal{U}_0 = (1 + z_0y_2)\, \mathcal{U}_3 + \{(1 + z_0y_1)\, z_2 + z_0\}\, \mathcal{I}_3 \tag{26}$$

$$\mathcal{I}_0 = y_1\mathcal{U}_3 + \{y_1z_2 + 1\}\, \mathcal{I}_3. \tag{27}$$

Cercetînd circuitul din figura A.10 fără a folosi calculul matricial, se obțin următoarele relații pentru $\mathcal{U}_2$ și $\mathcal{U}_0$.

$$\mathcal{U}_2 = \mathcal{U}_3 + z_2\mathcal{I}_3$$

$$\mathcal{U}_0 = z_0\mathcal{I}_0 + \mathcal{U}_2 = z_0\mathcal{I}_0 + \mathcal{U}_3 + z_2\mathcal{I}_3.$$

Pentru curentul electric $\mathcal{I}_0$ se obține

$$\mathcal{I}_0 = y_1\mathcal{U}_2 + \mathcal{I}_3 = y_1\{\mathcal{U}_3 + z_2\mathcal{I}_3\} + \mathcal{I}_3$$

sau

$$\mathcal{I}_0 = y_1\mathcal{U}_3 + (1 + y_1z_2)\, \mathcal{I}_3 \tag{28}$$

Eliminînd pe $\mathcal{I}_0$ din relația lui $\mathcal{U}_0$ se obține

$$\mathcal{U}_0 = z_0\{y_1\mathcal{U}_3 + (1 + y_1z_2)\, \mathcal{I}_3\} + \mathcal{U}_3 + z_2\mathcal{I}_3$$

sau

$$\mathcal{U}_0 = (z_0y_1 + 1)\, \mathcal{U}_3 + \mathcal{I}_3\{z_0(1 + y_1z_2) + z_2\} \tag{29}$$

în care

$$z_0(1 + y_1z_2) + z_2 = (1 + z_0y_1)\, z_2 + z_0.$$

Se constată că relațiile (26) și (29) sînt identice, de asemenea și relațiile (27) și (28) sînt identice.

Cu acest prilej se face următoarea remarcă importantă:

La cercetarea circuitului din figura A.10 ne-a dat pe $\mathcal{U}_0$ respectiv $\mathcal{I}_0$ în funcție de $\mathcal{U}_3$ și $\mathcal{I}_3$ mult mai rapid decît prin metoda obișnuită. Acest fapt formează un avantaj numai pentru acei care cunosc la perfecție ce înseamnă circuite electrice în conectare serie, paralel, serie-paralel și în conectare complexă, deoarece numai în acest caz se urmărește obținerea unei simplificări a calculului.

Scanned with OKEN Scanner

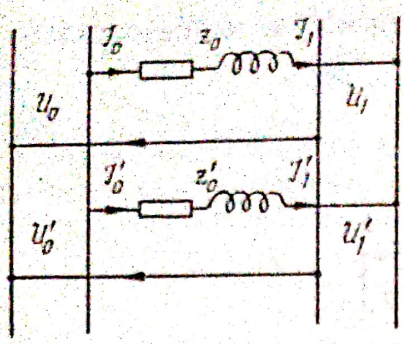


Fig. A.11. Două circuite cuadripolare în paralel.

În figura A.11 se reprezintă două circuite cuadripolare ca acelea din figura A.6 conectate în paralel, în care $\mathcal{U}_0 = \mathcal{U}_0'$ și $\mathcal{U}_1 = \mathcal{U}_1'$.

Cînd cele două circuite cuadripolare din fig. A.6 erau conectate în lanț s-a obținut din

$$\mathcal{U}_0 = 1 \cdot \mathcal{U}_1 + z_0 \cdot \mathcal{I}_1 \tag{30}$$

$$\mathcal{I}_0 = 0 \cdot \mathcal{U}_1 + 1 \cdot \mathcal{I}_1$$

$$\mathbf{E}_0 = \mathbf{a}_0 \mathbf{E}_1 \tag{31}$$

în care

$$\mathbf{E}_0 = \begin{bmatrix} \mathcal{U}_0 \\ \mathcal{I}_0 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{a}_0 = \begin{bmatrix} 1 & z_0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{E}_1 = \begin{bmatrix} \mathcal{U}_1 \\ \mathcal{I}_1 \end{bmatrix}.$$

La conectarea în paralel a două circuite cuadripolare ca în figura A.11 se obține

$$\mathbf{E}_0 = \mathbf{a}_0 \mathbf{E}_1$$

$$\mathbf{E}_0 = \mathbf{a}_0' \mathbf{E}_1$$

cu

$$\mathbf{E}_0 = \mathbf{E}_0' \text{ și } \mathbf{E}_1 = \mathbf{E}_1'.$$

Deoarece în (30) avem $\mathcal{I}_1 = \mathcal{I}_0$ se obține

$$\mathcal{I}_0 = \frac{\mathcal{U}_0}{z_0} - \frac{\mathcal{U}_1}{z_0} \tag{32}$$

$$\mathcal{I}_1 = \frac{\mathcal{U}_0}{z_0} - \frac{\mathcal{U}_1}{z_0}. \tag{33}$$

Relațiile (32) și (33) ne conduc la relațiile matriciale

$$\begin{bmatrix} \mathcal{I}_0 \\ \mathcal{I}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{z_0} & -\frac{1}{z_0} \\ \frac{1}{z_0} & -\frac{1}{z_0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathcal{U}_0 \\ \mathcal{U}_1 \end{bmatrix} \tag{34}$$

sau

$$\mathbf{I} = \mathbf{y}_0 \mathbf{U} \tag{35}$$

în care

$$\mathbf{y}_0 = \begin{bmatrix} \frac{1}{z_0} & -\frac{1}{z_0} \\ \frac{1}{z_0} & -\frac{1}{z^0} \end{bmatrix}; \quad \mathbf{I} = \begin{bmatrix} \mathcal{I}_0 \\ \mathcal{I}_1 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{U} = \begin{bmatrix} \mathcal{U}_0 \\ \mathcal{U}_1 \end{bmatrix}. \tag{36}$$

Scanned with OKEN Scanner

În exemplul luat avem însă $\mathcal{I}_0 = \mathcal{I}_1$.

Pentru cele două circuite cuadripolare în paralel din figura A.11 în care avem

$$\mathcal{I} = y_0 \mathcal{U}$$
$$\mathcal{I}' = y_0' \mathcal{U}'$$

cu

$$\mathcal{U} = \mathcal{U}'$$

se obține

$$\mathcal{I} + \mathcal{I}' = \{y_0 + y_0'\}\,\mathcal{U} \tag{37}$$

în care:

$$y_0 + y_0' = \begin{bmatrix} \left(\frac{1}{z_0} + \frac{1}{z_0'}\right) & -\left(\frac{1}{z_0} + \frac{1}{z_0'}\right) \\ \left(\frac{1}{z_0} + \frac{1}{z_0'}\right) & -\left(\frac{1}{z_0} + \frac{1}{z_0'}\right) \end{bmatrix}$$

astfel că

$$\mathcal{I} + \mathcal{I}' = \begin{bmatrix} \mathcal{I}_0 + \mathcal{I}_0' \\ \mathcal{I}_0 + \mathcal{I}_0' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \left(\frac{1}{z_0} + \frac{1}{z_0'}\right)\mathcal{U}_0 - \left(\frac{1}{z_0} + \frac{1}{z_0'}\right)\mathcal{U}_1 & 0 \\ \left(\frac{1}{z_0} + \frac{1}{z_0'}\right)\mathcal{U}_0 - \left(\frac{1}{z_0} + \frac{1}{z_0'}\right)\mathcal{U}_1 & 0 \end{bmatrix},$$

de unde se obține

$$\mathcal{I}_0 + \mathcal{I}_0' = \left(\frac{1}{z_0} + \frac{1}{z_0'}\right)(\mathcal{U}_0 - \mathcal{U}_1).$$

În figura A.12 se prezintă un circuit cuadripolar complex. Se cere să se stabilească o relație de forma

$$\mathcal{U}_0 = a_{11}\mathcal{U}_1 + a_{12}\mathcal{I}_1$$
$$\mathcal{I}_0 = a_{21}\mathcal{U}_1 + a_{22}\mathcal{I}_1$$

pentru a se putea introduce o relație maticială de forma

$$\mathbf{E}_0 = \mathbf{a}\mathbf{E}_1.$$

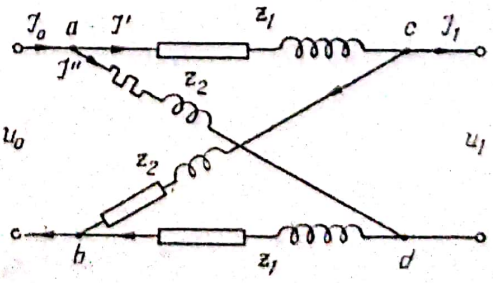


Fig. A.12. Un circuit cuadripolar complex.

Se determină mai întîi relațiile între curenți.
Din figura A.12 se obține

$$\mathcal{J}_0 = \mathcal{J}' + \mathcal{J}''; \quad \mathcal{J}_1 = \mathcal{J}' - \mathcal{J}''$$

astfel că

$$\mathcal{J}' = \frac{\mathcal{J}_0 + \mathcal{J}_1}{2}; \quad \mathcal{J}'' = \frac{\mathcal{J}_0 - \mathcal{J}_1}{2}.$$

Relațiile dintre tensiuni

$$\mathcal{U}_0 = \mathcal{U}_1 + 2\mathcal{J}'z_1 = \mathcal{U}_1 + (\mathcal{J}_0 + \mathcal{J}_1)\, z_1. \tag{38}$$

Se formează

$$\mathcal{U}_0 = \mathcal{J}'z_1 + \mathcal{J}''z_2 = \frac{1}{2}(\mathcal{J}_0 + \mathcal{J}_1)\, z_1 + \frac{1}{2}(\mathcal{J}_0 - \mathcal{J}_1)\, z_2 =$$

$$= \frac{\mathcal{J}_0}{2}(z_1 + z_2) + \frac{\mathcal{J}_1}{2}(z_1 - z_2) \tag{39}$$

Pentru $z_1 = z_2$ se obține $\mathcal{U}_0 = \mathcal{J}_0 z_1$.

Deoarece punctele c și d obțin același potențial, avem $\mathcal{U}_1 = 0$. Circuitele *acb* și *adb* devin conectate în paralel. Se obține $\mathcal{J}_1 = 0$.

Pentru a obține în (38) pe $\mathcal{U}_0$ în funcție de $\mathcal{U}_1$ și $\mathcal{J}_1$ se înlocuiește $\mathcal{J}_0$ în (38) cu expresia lui din (39).

Din (39) se obține

$$\mathcal{J}_0 = \left\{\mathcal{U}_0 - \frac{\mathcal{J}_1}{2}(z_1 - z_2)\right\}\frac{2}{z_1 + z_2}. \tag{40}$$

Relația (38) ia forma

$$\mathcal{U}_0 = \mathcal{U}_1 + \left\{\mathcal{U}_0 - \frac{\mathcal{J}_1}{2}(z_1 - z_2)\right\}\frac{2z_1}{z_1 + z_2} + \mathcal{J}_1 z_1$$

$$\mathcal{U}_0\left(1 + \frac{2z_1}{z_1 + z_2}\right) = \mathcal{U}_1 + \mathcal{J}_1 z_1\left\{1 - \frac{z_1 - z_2}{z_1 + z_2}\right\}$$

$$\mathcal{U}_0 = \mathcal{U}_1\frac{z_1 + z_2}{z_2 - z_1} + \mathcal{J}_1 z_1\frac{2z_2}{z_2 - z_1}. \tag{41}$$

Determinarea curentului $\mathcal{J}_0$ în funcție de $\mathcal{U}_1$ și $\mathcal{J}_1$.
În relația (40) se înlocuiește $\mathcal{U}_0$ prin expresia sa din (41); se obține

$$\mathcal{J}_0 = \left\{\mathcal{U}_1\frac{z_1 + z_2}{z_2 - z_1} + \mathcal{J}_1\frac{2z_1 z_2}{z_2 - z_1}\right\}\frac{2}{z_1 + z_2} - \mathcal{J}_1\frac{z_1 - z_2}{z_1 + z_2}$$

$$\mathcal{J}_0 = \mathcal{U}_1\frac{2}{z_2 - z_1} + \frac{\mathcal{J}_1}{z_1 + z_2}\left\{\frac{4z_1 z_2}{z_2 - z_1} + z_2 - z_1\right\}$$

în care

$$\frac{4z_1z_2}{z_2-z_1}+z_2-z_1=\frac{(z_2+z_1)^2}{z_2-z_1}.$$

Ca urmare

$$\mathcal{I}_0=\mathcal{U}_1\frac{2}{z_2-z_1}+\mathcal{I}_1\frac{z_2+z_1}{z_2-z_1}. \tag{42}$$

Din (41) și (42) se obține ecuația matricială

$$\mathbf{E}_0=\mathbf{a}\mathbf{E}_1 \tag{43}$$

în care

$$\mathbf{a}=\begin{bmatrix}\dfrac{z_1+z_2}{z_2-z_1} & 2\dfrac{z_1z_2}{z_2-z_1}\\[2ex] \dfrac{2}{z_2-z_1} & \dfrac{z_2+z_1}{z_2-z_1}\end{bmatrix};\quad \mathbf{E}_0=\begin{bmatrix}\mathcal{U}_0\\ \mathcal{I}_0\end{bmatrix};\quad \mathbf{E}_1=\begin{bmatrix}\mathcal{U}_1\\ \mathcal{I}_1\end{bmatrix}. \tag{44}$$

2.6. APLICAREA CALCULULUI MATRICIAL LA CIRCUITUL UNEI TRIODE

Apariția curentului electric I_a în circuitul anodic cu tensiunea bateriei de acumulatoare U_{ba} al unei triode, ca în figura A.13, se datorește faptului că electronii care sosesc la anodul pozitiv cu potențialul V_a crează tendința ca potențialul anodului să se micșoreze. Ca urmare de la electrodul a electronii se îndreaptă în sensul în care potențialul crește, deci către borna pozitivă a bateriei și se stabilește potențialul V_a la aceeași valoare constantă.

La catod, prin emisia electronilor din filamentul incandenscent și prin dirijarea lor sub acțiunea unei forțe de forma $q(\mathcal{E}_a+\mathcal{E}_g)$ ei se dirijează către anod.

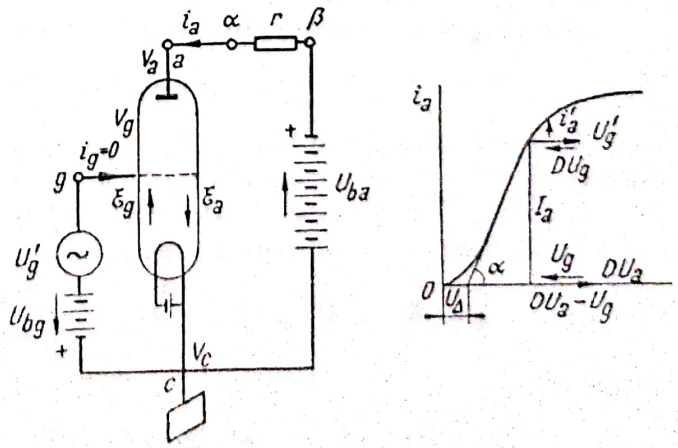


Fig. A.13. Circuitul unei triode cu U_g negativ. Diagrama curentului din circuitul anodic i_a.

Prin îndepărtarea lor de la catod, care e electrizat negativ la potențialul V_c, se crează tendința unei creșteri a potențialului datorită ionilor pozitivi din metal.

Ca urmare electronii de la borna negativă a bateriei anodice se îndreaptă către potențialul mai ridicat deci către catod. În felul acesta potențialul catodului V_c se va menține constant.

Așa se explică apariția curentului I_a în circuitul anodic, circuit care nu e format dintr-o rezistență electrică obișnuită.

Pentru ca borna pozitivă a bateriei de acumulatoare a circuitului grilei să primească electronii de la catod, ar fi trebuit să se creeze posibilitatea ca potențialul catodului să se micșoreze față de potențialul bornei pozitive a bateriei, ceea ce nu se întîmplă. Prin îndepărtarea electronilor de la catod, potențialul catodului are tendința să crească iar nu să se micșoreze.

Ca urmare nu poate să apară o mișcare de electroni de la catod către borna pozitivă a bateriei de acumulatoare din circuitul grilei.

În mod analog, pentru ca electronii de la borna negativă a bateriei de acumulatoare să se deplaseze către placa grilei, ar fi trebuit ca placa grilei să obțină un potențial mai ridicat.

Ori tocmai prin electronii care vin la grilă de la catod, el devine electrizat negativ, deci potențialul grilei nu poate să crească, astfel că electronii nu pot circula de la borna negativă la bateria grilei către un potențial mai ridicat.

Ca urmare curentul electric i_g în circuitul grilei e nul.

Dacă în locul triodei ar fi existat o rezistență electrică obișnuită, la care cele două baterii de acumulatoare ar fi fost conectate ca în cazul triodei, curentul electric i_g în circuitul grilei nu ar fi fost nul.

Punerea catodului la pămînt și deci obținerea potențialului $V_c = 0$ are ca scop ca acest potențial al catodului să nu varieze, după cum variază producerea și îndepărtarea sarcinei electrice negative prin variația încălzirii filamentului și creșterea intensității cîmpului $\mathcal{E}_a$.

Avem $U_g = V_g - V_c$ cu $U_g < 0$ și $i_g = 0$ indiferent dacă V_c este sau nu făcut egal cu zero, prin punerea la pămînt.

Nu trebuie însă legată negativarea grilei, de necesitatea ca U_g să devină negativă și i_g egal cu zero.

Din diagrama curentului anodic i_a din figura A.13 se obține:

$$i_a = k(Du_a + u_g)^{3/2} \text{ cu } D \ll 1 \tag{1}$$

În circuitul grilei e conectată o sursă cu o tensiune electromotoare alternativă în timp exprimată prin u'_g.

Admitem la început cazul cînd u'_g e nulă.

Ca urmare în circuitul grilei avem

$$\int(d\ell\, \mathcal{E}) = V_g - V_c + U_{bg} = U_g + U_{bg} = i_g r_{baterie} = 0 \tag{2}$$

astfel că

$$U_g = -U_{bg} \qquad U_g < 0 \tag{3}$$

În circuitul anodic avem

$$U_{ba} - I_a r_a = U_a = V_a - V_c \tag{4}$$

Din diagrama din figura A.13 se obține I_a în forma

$$I_a = (DU_a + U_g - U_\Delta)\, S \tag{5}$$

în care U_Δ reprezintă segmentul de tensiune de la 0 la intersecția liniei drepte a curentului cu abscisa. Avem: $S = p \operatorname{tg} \alpha$ în care p are dimensiunea de conductanță; S e denumit coeficientul de pantă.

Relațiile (4) și (5) stabilesc curentul electric I_a cînd tensiunile U_{ba}, U_{bg}, r și diagrama curentului anodic i_a din figura A.13 sînt cunoscute.

Din relația (5) se constată că dacă U_a ar crește cu 1 volt, atunci I_a se menține constant, dacă tensiunea negativă U_g crește în sens opus cu U_a, cu 1 D volți.

Cum D e cu mult mai mic ca unitatea, se evidențiază importanța grilei la producerea variației curentului anodic i_a cu o mică variație a tensiunii grilei cu u'_g fără să existe un curent i_g.

D poartă denumirea de factorul de pătrundere.

Cînd apare în circuitul grilei tensiunea u'_g se obține

$$u_g = U_g + u'_g. \tag{6}$$

Spre exemplu pentru $u'_g > 0$ apare o creștere a curentului anodic i_a. Se formează

$$i_a = I_a + i'_a. \tag{7}$$

Prin creșterea curentului anodic apare o creștere a căderii ohmice $i_a r$, astfel că diferența de potențial $V_a - V_c = u_a$ din circuitul anodic se micșorează.

Se obține

$$U_{ba} - (I_a + i'_a)\, r = U_a + u'_a \tag{8}$$

în care

$$U_{ba} - I_a r = U_a \tag{9}$$

cînd u'_g era nulă.

Din (8) și (9) rezultă: $- i'_a r = u'_a$

sau

$$u'_a + i'_a r = 0 \tag{10}$$

relația (10) e valabilă numai cînd $i_g = 0$.

Din diagrama curentului i_a se obține

$$i_a = I_a + i'_a = (DU_a + Du'_a + U_g + u'_g - U_\Delta)\, S \tag{11}$$

Scanned with OKEN Scanner

în care

$$I_a = (DU_a + U_g - U_\Delta)\, S \tag{12}$$

astfel că

$$i'_a = (Du'_a + u'_g)\, S \text{ (v. fig. A.13).} \tag{13}$$

Relaţiile (10) şi (13) reprezintă relaţiile fundamentale care ne dau legătura dintre tensiunea variabilă din circuitul grilei u'_g şi curentul electric variabil din circuitul anodic i'_a.

Din (10) şi (13) se obţine

$$(-Di'_a r + u'_g)\, S = i'_a \tag{14}$$

Se introduce

$$DS = \frac{1}{R_i} \tag{15}$$

pentru a scoate în evidenţă că de data aceasta conductanţa $\frac{1}{R_i}$ ne arată cum se găseşte în legătură u'_g cu i'_g.

Din (15) se vede că

$$DSR_i = 1 \tag{16}$$

Relaţia (14), cu ajutorul expresiei din (15), devine:

$$i'_a \left(1 + \frac{r}{R_i}\right) = u'_g S. \tag{17}$$

Relaţia (17) mai poate lua forma:

$$i'_a = \frac{u'_g S R_i}{R_i + r} = \frac{u'_g}{R_i + r}\left(\frac{1}{D}\right). \tag{18}$$

Relaţia (18) scoate în evidenţă rolul triodei în ce priveşte amplificarea unui curent.

Din (18) se obţine un curent electric în forma

$$\frac{u'_g}{R_i + r},$$

ca şi cum la tensiunea grilei s-ar fi conectat un circuit electric cu rezistenţa $(R_i + r)$, iar curentul $\frac{u'_g}{R_i + r}$ apare amplificat mult prin factorul $\frac{1}{D}$ care e mare, deoarece $D \ll 1$.

Se obţine:

$$D = 1{,}5 \div 25\%.$$

$\frac{1}{D}$ poartă denumirea de coeficient de amplificare.

În $DSR_i = 1$ se exprimă panta S în amperi pe volt, rezistența internă R_i în ohmi și factorul de pătrundere D în forma unui număr zecimal.

Pentru $r = R_i$ se obține

$$i'_a = \frac{u'_g}{2R_i} \cdot \frac{1}{D}. \tag{19}$$

Relația (17) se folosește pentru a exprima legătura între i'_a, u'_a și u'_g în forma

$$i'_a = \frac{u'_a}{R_i} + u'_g S \tag{20}$$

în care $i'_a r = -u'_a$ din (10).

Admitem că între α și β din figura A.13 se găsește o rezistență r în serie cu o inductivitate L.

În cazul acesta între bornele β și a avem

$$V_\beta - V_a = L\frac{di_a}{dt} + ri_a \tag{21}$$

$$V_c - V_\beta + U_{ba} = i_a r_{baterie} \cong 0. \tag{22}$$

Adunînd pe (21) cu (22) se obține

$$V_c - V_a + U_{ba} = L\frac{di_a}{dt} + ri_a$$

sau

$$-u_a + U_{ba} = L\frac{di_a}{dt} + ri_a. \tag{23}$$

Introducînd în (23)

$$u_a = U_a + u'_a; \quad i_a = I_a + i'_a \tag{24}$$

în care

$$U_{ba} = U_a + I_a r; \quad \frac{d}{dt} I_a = 0,$$

deoarece I_a reprezintă curentul constant. Relația (23) devine

$$-u'_a = L\frac{di'_a}{dt} + ri'_a. \tag{25}$$

Admițînd că în (20) u'_g reprezintă o funcție sinusoidală de timp, atunci atît i'_a cît și u'_a devin și ele funcții sinusoidale de timp, deoarece numai o sumă de funcții sinusoidale ne dă tot o funcție sinusoidală de timp.

S-au considerat în (20) R_i și S ca mărimi constante.

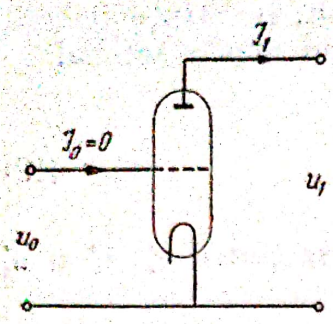


Fig. A.14. Trioda ca un circuit cuadripolar.

Trioada ca un circuit cuadripolar

Pentru trioda ca un circuit cuadripolar din figura A.14 se foloseşte relaţia (20) ţinîndu-se seamă că sensul pozitiv în circuitul anodic s-a schimbat. Se introduce

$$-i'_a = -\frac{u'_a}{R_i} - u'_g S. \tag{26}$$

În regim sinusoidal se reprezintă funcţiile sinusoidale în formă complexă. Se obţine în conformitate cu notaţiile din figura A.14.

$$-\mathcal{I}'_a = \mathcal{I}_1; \quad \mathcal{U}'_a = \mathcal{U}_1; \quad \mathcal{U}'_g = \mathcal{U}_0 \tag{27}$$

Ca urmare (26), cu mărimile electrice în forma complexă, devine

$$\mathcal{I}_1 = -\frac{\mathcal{U}_1}{R_i} - \mathcal{U}_0 S. \tag{28}$$

Ne folosim de relaţiile

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_0 &= 0 \cdot \mathcal{U}_0 + 0 \cdot \mathcal{U}_1 \\ \mathcal{I}_1 &= -S \cdot \mathcal{U}_0 - \frac{1}{R_i}\mathcal{U}_1. \end{aligned} \tag{29}$$

Ecuaţiile (29) se pun în forma matricială

$$\mathbf{I} = \mathbf{y}\mathbf{U} \tag{30}$$

în care

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -S & -\frac{1}{R_i} \end{bmatrix}; \quad \mathbf{I} = \begin{bmatrix} \mathcal{I}_0 \\ \mathcal{I}_1 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{U} = \begin{bmatrix} \mathcal{U}_0 \\ \mathcal{U}_1 \end{bmatrix}. \tag{31}$$

Pentru formarea matricei **a** se introduc relaţiile

$$\begin{aligned} \mathcal{U}_0 &= -\frac{\mathcal{U}_1}{R_i S} - \frac{1}{S}\mathcal{I}_1 \\ \mathcal{I}_0 &= 0 \cdot \mathcal{U}_1 + 0 \cdot \mathcal{I}_1 \end{aligned} \tag{32}$$

de unde se obţine ecuaţia matricială

$$\mathbf{E}_0 = \mathbf{a}\mathbf{E}_1 \tag{33}$$

în care

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{R_i S} & -\frac{1}{S} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{E}_0 = \begin{bmatrix} \mathcal{U}_0 \\ \mathcal{I}_0 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{E}_1 = \begin{bmatrix} \mathcal{U}_1 \\ \mathcal{I}_1 \end{bmatrix} \tag{34}$$

Matricea **a** nu posedă valori proprii pentru că $|\mathbf{a}| = 0$.

Scanned with OKEN Scanner

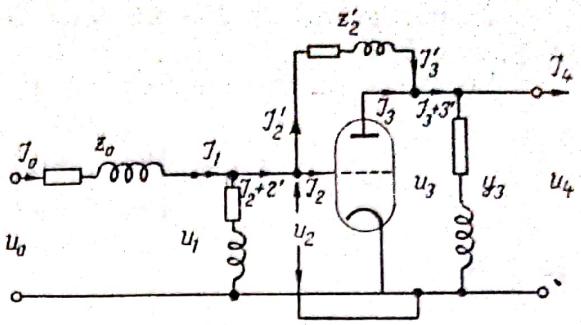


Fig. A.15. Circuit electric compus din mai multe circuite cuadripolare.

În figura A.15 se prezintă un circuit electric în care apare și o triodă. Circuitul e format din mai multe circuite cuadripolare.

Se cere să se determine circuitul cuadripolar echivalent, care să corespundă unei relații matriciale de forma

$$\mathbf{E}_0 = \mathbf{a}\mathbf{E}_4 \tag{35}$$

în care

$$\mathbf{E}_0 = \begin{bmatrix} \mathcal{U}_0 \\ \mathcal{I}_0 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{E}_4 = \begin{bmatrix} \mathcal{U}_4 \\ \mathcal{I}_4 \end{bmatrix} \tag{36}$$

și se cere să se determine matricea **a**.

Urmărim mai întîi circuitul tubului electronic, care e conectat în paralel cu impedanța z_2'. Pentru circuitul cuadripolar echivalent cu cele două circuite cuadripolare în paralel, se formează

$$\begin{bmatrix} \mathcal{I}_2 \\ \mathcal{I}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -S & -\frac{1}{R_i} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathcal{U}_2 \\ \mathcal{U}_3 \end{bmatrix}; \quad \begin{bmatrix} \mathcal{I}_2' \\ \mathcal{I}_3' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{z_2'} & -\frac{1}{z_2'} \\ \frac{1}{z_2'} & -\frac{1}{z_2'} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathcal{U}_2 \\ \mathcal{U}_3 \end{bmatrix}. \tag{37}$$

Se dau ecuațiile

$$\begin{bmatrix} \mathcal{I}_{2+2'} \\ \mathcal{I}_{3+3'} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathcal{I}_2 + \mathcal{I}_2' \\ \mathcal{I}_3 + \mathcal{I}_3' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{z_2'} & -\frac{1}{z_2'} \\ -S + \frac{1}{z_2'} & -\frac{1}{R_i} - \frac{1}{z_2'} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathcal{U}_2 \\ \mathcal{U}_3 \end{bmatrix}. \tag{38}$$

în care

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{z_2'} & -\frac{1}{z_2'} \\ -S + \frac{1}{z_2'} & -\frac{1}{R_i} - \frac{1}{z_2'} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_{2(11)} & y_{2(12)} \\ y_{2(21)} & y_{2(22)} \end{bmatrix} = y_2. \tag{39}$$

Cunoscîndu-se matricea $\mathbf{y}_2$ se poate determina matricea $\mathbf{a}_2$.

În paragraful 28.2 se prezintă legăturile dintre elementele matricelor **a**, **z**, **y**, **a** și **b**.

Legătura dintre matricea **a** și y ia forma

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = \frac{1}{y_{21}} \begin{bmatrix} -y_{22} & 1 \\ -|y| & y_{11} \end{bmatrix}$$

în care

$$a_{11} = -\frac{y_{22}}{y_{21}}; \quad a_{12} = \frac{1}{y_{21}}; \quad a_{21} = \frac{-|y|}{y_{21}}; \quad a_{22} = \frac{y_{11}}{y_{21}}. \tag{40}$$

Cu ajutorul relațiilor (40) se obțin elementele din (39)

$$a_{2(11)} = \frac{z_2' + R_t}{-Sz_2' + 1} \frac{1}{R_t}; \quad a_{2(12)} = \frac{z_2'}{-Sz_2' + 1}; \quad a_{2(22)} = \frac{1}{-Sz_2' + 1}$$

$$|y_2| = \frac{1}{z_2'}\left(\frac{1}{R_t} + S\right); \quad a_{2(21)} = \frac{\frac{1}{R_t} + S}{-Sz_2' + 1}.$$

Matricea $\mathbf{a}_2$ devine

$$\mathbf{a}_2 = \begin{bmatrix} \frac{z_2' + R_t}{R_t} & z_2' \\ \frac{1}{R_t} + S & 1 \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{-Sz_2' + 1} \tag{41}$$

Ecuația matricială pentru circuitul cuadripolar echivalent ia forma

$$\begin{bmatrix} \mathcal{U}_2 \\ \mathcal{I}_{2+2'} \end{bmatrix} = \mathbf{a}_2 \begin{bmatrix} \mathcal{U}_3 \\ \mathcal{I}_{3+3'} \end{bmatrix}. \tag{42}$$

Circuitul echivalent care corespunde relației (42) intră ca al treilea circuit cuadripolar în lanțul format din patru circuite cuadripolare în figura A.15.

Pentru celelalte trei circuite cuadripolare în lanț avem relațiile matriciale

$$\begin{bmatrix} \mathcal{U}_0 \\ \mathcal{I}_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & z_0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathcal{U}_1 \\ \mathcal{I}_1 \end{bmatrix}; \quad \begin{bmatrix} \mathcal{U}_1 \\ \mathcal{I}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ y_1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathcal{U}_2 \\ \mathcal{I}_{2+2'} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \mathcal{U}_3 \\ \mathcal{I}_{3+3'} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ y_3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathcal{U}_4 \\ \mathcal{I}_4 \end{bmatrix}. \tag{43}$$

Scanned with OKEN Scanner

Ca urmare pentru cele patru circuite cuadripolare în lanț exprimate în (43) și (42) se obține relația matricială

$$\begin{bmatrix}\mathcal{U}_0\\ \mathcal{I}_0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & z_0\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0\\ y_1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}z_2'+R_t & z_2'\\ \frac{1}{R_t}+S & 1\end{bmatrix}\frac{1}{-Sz_2'+1}\begin{bmatrix}1 & 0\\ y_2 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathcal{U}_4\\ \mathcal{I}_4\end{bmatrix} \qquad (44)$$

în care produsul celor patru matrice reprezintă matricea **a**.

2.7. APLICAREA CALCULULUI MATRICIAL LA CIRCUITUL CU TRANZISTOARE

Înainte de a reprezenta tranzistorul printr-un circuit cuadripolar, se recapitulează pe scurt cîteva noțiuni fundamentale ale tranzistorului.

În figura A.16 se prezintă o supapă electrică (ventil electric format din Ge-n și Ge-p. Se consideră mai întîi cazul cînd bateria de acumulatoare nu e conectată.

Datorită fenomenului difuziei, prin trecerea electronilor majoritari din Ge-n în Ge-p prin suprafața de tranziție S și ocuparea golurilor majoritare din Ge-p, ionii interstițiali pozitivi de partea Ge-n și ionii interstițiali negativi de partea Ge-p formează la suprafața S un strat de sarcini electrice duble cu un cîmp electric de intensitate $\mathcal{E}_D$ ca în figura A.16.

Prin apariția acestui cîmp, electronii majoritari din Ge-n sub acțiunea unei forțe de forma $q\mathcal{E}_D$ cît și a forței datorită fenomenului difuziei, se găsesc mereu în echilibru, deci nu pot trece prin suprafața S.

S-ar putea spune că electronul minoritar din Ge-p sub acțiunea forței $q\mathcal{E}_D$ ar putea trece din Ge-p în Ge-n.

Aceasta nu e posibil deoarece forța $q\mathcal{E}_D$ care acționează asupra electronului minoritar, e tot atît de mare ca forța opusă datorită fenomenului difuziei care împiedică ca electronul minoritar să intre în spațiul ocupat de electronii majoritari.

Numai în momentul cînd în întregul circuit electric conectat la o baterie de acumulatoare, apare în spațiul ocupat de metal și semiconductoare o intensitate de cîmp electric $\mathcal{E}$, care pune în mișcare electronii, încetează acțiunea fenomenului difuziei după cum se va vedea.

La suprafața de contact S_n între Ge-n și firul metalic de Cu, tot datorită fenomenului difuziei, trec electroni din firul de Cu în Ge-n. Într-un cm³ în firul de Cu sînt mai mulți electroni liberi ca într-un cm³ din Ge-n.

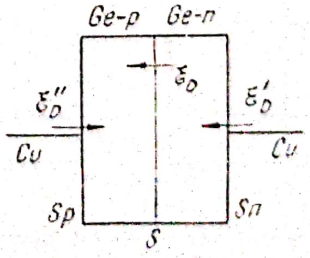


Fig. A.16. Supapă electrică din Ge-n și Ge-p.

Apare la suprafaţa de contact, pe partea firului de Cu o sarcină electrică pozitivă, iar de partea Ge-n apar electroni trecuţi. Apare la acea suprafaţă un cîmp electric cu o intensitate mică $\mathcal{E}'_D$ dirijată ca în figură. Prin apariţia acestui cîmp încetează trecerea electronului din firul de Cu în Ge-n.

La suprafeţele de contact S_p între Ge-p şi firul de Cu, tot datorită fenomenului difuziei, are loc o trecere masivă de electroni liberi din firul de Cu în Ge-n, unde ocupă goluri majoritare.

Într-un cm³ din Cu există mult mai mulţi electroni faţă de electronii minoritari într-un cm³.

De data aceasta, se formează la suprafaţa de contact, de partea firului de Cu, o sarcină electrică pozitivă mare şi de partea Ge-p, prin ocuparea golurilor majoritare cu electroni, apare o sarcină electrică negativă a ionilor interstiţiali negativi, de asemenea mare.

Se formează un cîmp electric cu o intensitate $\mathcal{E}''_D$ mare.

De asemenea, electronii minoritari din Ge-p nu pot trece în firul metalic de Cu sub acţiunea forţei $q\mathcal{E}''_D$ deoarece o astfel de forţă este echilibrată de o altă forţă care apare datorită fenomenului difuziei în spaţiul ocupat de metal, opusă cu prima.

Cum vor începe electronii să se mişte sub acţiunea unei forţe de forma $q\mathcal{E}$ cu $\mathcal{E}$ produs de bateria de acumulatoare, încetează acţiunea fenomenului difuziei.

Se trece la cazul cînd bateria de acumulatoare cu tensiunea u_{b_1} e conectată în circuit.

În figura A.17, α se conectează bateria de acumulatoare cu tensiunea u_b în aşa fel încît intensitatea de cîmp $\mathcal{E}$ care apare în Ge-p să fie opusă lui $\mathcal{E}_D$.

Deoarece sub acţiunea intensităţii cîmpului $\mathcal{E}$ electronii din întregul circuit electric se găsesc în mişcare, în sens opus cu $\mathcal{E}$, încetează acţiunea fenomenului difuziei la locul de contact.

Electronii minoritari sub acţiunea unei forţe mari de forma $q\{\mathcal{E}''_D + \mathcal{E}\}$ la suprafaţa de contact dintre Ge-p şi Cu la e, vor trece în circuitul metalic. Apare în Ge-p la e un surplus de goluri minoritare/cm³ deoarece electronii minoritari din Ge-p sub acţiunea forţei $q\mathcal{E}$ se deplasează prin salturi de la suprafaţa S către suprafaţa S_p. Înseamnă că formaţia surplusului de goluri minoritare/cm³ înaintează de la S_p către S. Locul de contact e unde se formează mereu surplusul de goluri minoritare/cm³, poartă denumirea de emiţător de goluri. La locul c de pe suprafaţa S golurile minoritare sînt ocupate de electronii majoritari din Ge-n, care se deplasează în Ge-n, în sens opus lui $\mathcal{E}$, sub acţiunea unei forţe de forma $q\mathcal{E}$. Bineînţeles electronii majoritari nu se deplasează prin salturi.

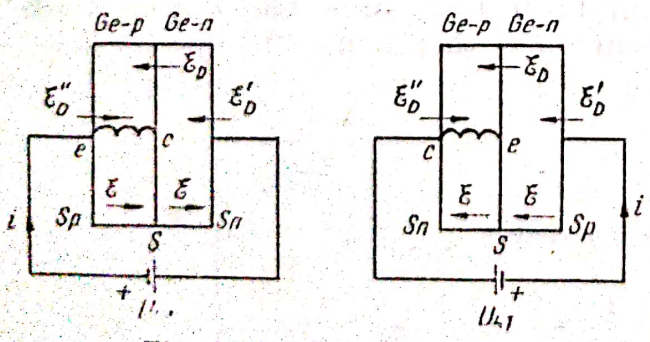


Fig. A.17. Supapa electrică.

Locul c în care golurile sosite sînt mereu ocupate de electroni, este denumit un colector de goluri.

De asemenea electronii din firul metalic din dreapta vor intra tot sub acţiunea forţei de forma $q\mathcal{E}$ în Ge-n.

În circuitul electric apare un curent electric i. Cînd se schimbă polaritatea bateriei de acumulatoare ca în figura A.17, β înseamnă că se schimbă sensul intensității cîmpului electric $\mathcal{E}$ în Ge-n și în Ge-p.

În Ge-p $\mathcal{E}$ obține același sens cu $\mathcal{E}_D$.

Ca urmare, la suprafața S electronii minoritari vor trece sub acțiunea forței $q(\mathcal{E}_D + \mathcal{E})$ din Ge-p în Ge-n și de acolo mai departe ca electroni majoritari vor trece în firul metalic din dreapta.

Ca urmare, în locul e au rămas în Ge-p un surplus de goluri minoritare; apare un emițător de goluri minoritare. Aceste goluri minoritare vor fi ocupate de electroni minoritari care prin salturi se îndreaptă de la S_p către S.

În felul acesta surplusul de goluri minoritare, mereu altele, înaintează către S_p. La locul de contact între firul metalic și Ge-p golurile minoritare vor fi ocupate de electroni care vin din circuitul metalic. Ca urmare un astfel de loc de contact devine de data aceasta un colector de goluri minoritare.

Dat fiindcă forța $q(\mathcal{E}_D + \mathcal{E})$, care face ca electronii minoritari din Ge-p să treacă în Ge-n, este mai mică ca forța $q(\mathcal{E}_D + \mathcal{E})$ cu care electronii minoritari din Ge-p au trecut în firul metalic din stînga, înseamnă că de data aceasta se obține un surplus de goluri minoritare/cm^3 (un emițător de goluri minoritare) mai mic ca în primul caz.

Ca urmare curentul electric ce se formează acum este cu mult mai mic ca în primul caz. În felul acesta se evidențiază caracterul de supapă electrică.

Figura A.18 reprezintă curentul electric la o supapă electrică.

Ca urmare, datorită apariției surplusului de goluri minoritare (emițător de goluri minoritare) la locul de contact între firul de Cu din stînga și Ge-p, diferit de apariția emițătorului de goluri la suprafața de tranziție S, se caracterizează supapa electrică formată din Ge-p și Ge-n.

În figura A.19 se prezintă tranzistorul.

De partea dreaptă a tranzistorului se constată că $\mathcal{E}_D$ are același sens cu $\mathcal{E}_1$, ceea ce înseamnă că emițătorul de surplus de goluri minoritare e_1 se găsește la suprafața S_1, iar pe partea stîngă a tranzistorului, dat fiindcă $\mathcal{E}_D$ e opus lui $\mathcal{E}_2$, rezultă că emițătorul de goluri minoritare e_2 se găsește la locul de contact între firul de Cu și Ge-p.

Pentru ca producerea surplusului de goluri în e_2 să fie egală cu cea din e_1, se consideră $\mathcal{E}_1$ produs de U_{b_1} cu mult mai mare ca $\mathcal{E}_2$ produs de U_{b_2}

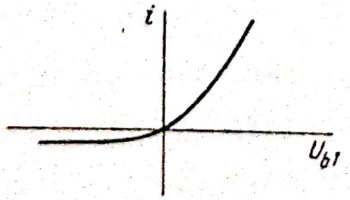


Fig. A.18. Curentul electric la supapa electrică.

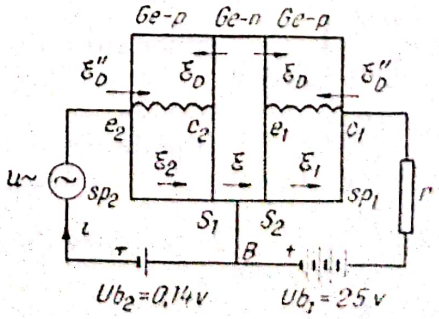


Fig. A.19. Tranzistorul.

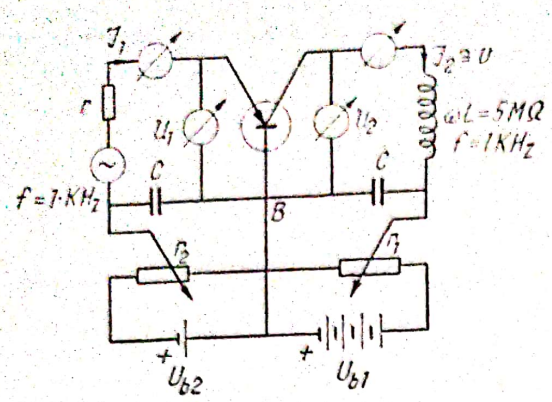


Fig. A.20. Schema pentru determinarea impedanței z_{11} și z_{21}.

În circuitul bateriei e introdusă o sursă de curent alternativ cu o tensiune variabilă în timp, spre exemplu de formă sinusoidală.

Variația lui $\mathcal{E}$ duce la o variație a surplusului de goluri minoritare produse în e_1 și e_2, ceea ce face ca curentul electric i să apară ca un curent electric ondulat de forma

$$i = i_0 + i'. \tag{2}$$

În figura A.19 se vede că $i'r$ apare ca o tensiune alternativă mare dacă r reprezintă o rezistență electrică mare.

În figura A.20 se consideră schema tranzistorului, pentru curent alternativ peste capacitățile C, iar pentru curent continuu cu tensiuni ce pot fi reglabile.

Se formează următoarele relații pentru curentul alternativ:

$$\begin{aligned} \mathcal{U}_1 &= z_{11}\mathcal{I}_1 + z_{12}\mathcal{I}_2 \\ \mathcal{U}_2 &= z_{21}\mathcal{I}_1 + z_{22}\mathcal{I}_2. \end{aligned} \tag{3}$$

Pentru determinarea impedanțelor z_{11} și z_{21} s-a introdus în circuit o reactanță inductivă ωL mare, așa fel ca $\mathcal{I}_2$ să poată fi considerat egal cu zero.

Se obține

$$z_{11} = \left(\frac{\mathcal{U}_1}{\mathcal{I}_1}\right)_{\mathcal{I}_2 = 0}; \quad z_{21} = \left(\frac{\mathcal{U}_2}{\mathcal{I}_1}\right)_{\mathcal{I}_2 = 0}. \tag{4}$$

Pentru determinarea impedanțelor z_{22} și z_{12} se va schimba poziția sursei de curent alternativ și poziția reactanței din stînga în dreapta.

Se introduc notațiile

$$\begin{aligned} z_{11} &= \left(\frac{\mathcal{U}_1}{\mathcal{I}_1}\right)_{\mathcal{I}_2 = 0} \text{ impedanța de intrare în mersul în gol,} \\ z_{12} &= \left(\frac{\mathcal{U}_1}{\mathcal{I}_2}\right)_{\mathcal{I}_1 = 0} \text{ impedanța de reacție,} \\ z_{22} &= \left(\frac{\mathcal{U}_2}{\mathcal{I}_2}\right)_{\mathcal{I}_1 = 0} \text{ impedanța de ieșire pentru } \mathcal{I}_1 = 0, \\ z_{21} &= \left(\frac{\mathcal{U}_2}{\mathcal{I}_1}\right)_{\mathcal{I}_2 = 0} \text{ impedanța de transmisie.} \end{aligned} \tag{5}$$

Scanned with OKEN Scanner

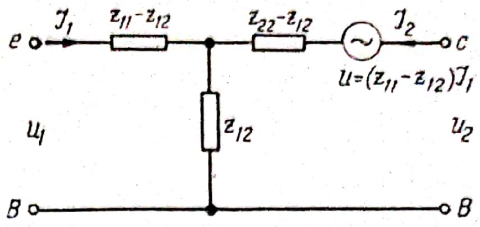


Fig. A.21. Circuit cuadripolar echivalent.

În raport cu relațiile (3) se formează următorul circuit cuadripolar pentru tranzistoare ca în figura A.21.

Se verifică ușor că circuitul cuadripolar din figura A.21 ne conduce la relațiile (3).

Se obține

$$\mathcal{U}_1 = (z_{11} - z_{12})\,\mathcal{I}_1 + (\mathcal{I}_1 + \mathcal{I}_2)\,z_{12} = z_{11}\mathcal{I}_1 + z_{12}\mathcal{I}_2$$

$$\mathcal{V}_c - \mathcal{V}_B = \mathcal{U}_2 = (z_{21} - z_{12})\,\mathcal{I}_1 + (z_{22} - z_{12})\,\mathcal{I}_2 + (\mathcal{I}_1 + \mathcal{I}_2)\,z_{12} =$$

$$= z_{21}\mathcal{I}_1 + z_{22}\mathcal{I}_2.$$

Ca urmare relațiile (3) se pot pune în formă matricială

$$\mathbf{U} = \mathbf{z}\mathbf{I}$$

în care

$$\mathbf{z} = \begin{bmatrix} z_{11} & z_{12} \\ z_{21} & z_{22} \end{bmatrix}; \quad \mathbf{U} = \begin{bmatrix} \mathcal{U}_1 \\ \mathcal{U}_2 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{I} = \begin{bmatrix} \mathcal{I}_1 \\ \mathcal{I}_2 \end{bmatrix}.$$

Circuitul cuadripolar din figura A.21 se mai poate descompune în următoarele două circuite cuadripolare, primul pasiv și al doilea activ ca în figura A.22.

Se obține

$$\begin{bmatrix} \mathcal{U}_1 \\ \mathcal{U}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_{11}\mathcal{I}_1 + z_{12}\mathcal{I}_2 & 0 \\ z_{21}\mathcal{I}_1 + z_{22}\mathcal{I}_2 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ (z_{21} - z_{12})\,\mathcal{I}_1 & 0 \end{bmatrix},$$

ceea ce ne arată că

$$\mathcal{U}_1 = z_{11}\mathcal{I}_1 + z_{12}\mathcal{I}_2$$

$$\mathcal{U}_2 = z_{21}\mathcal{I}_1 + z_{22}\mathcal{I}_2.$$

Se introduc denumirile

$z_e = z_{11} - z_{12}$ impedanța emițătorului,

$z_B = z_{12}$ impedanța bazei (Ge-n),

$z_c = z_{22} - z_{12}$ impedanța colectorului,

$z_m = z_{21} - z_{12}$ impedanța de amplificare.

Scanned with OKEN Scanner

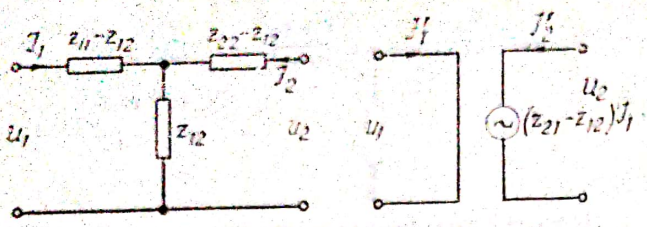


Fig. A.22. Circuite cuadripolare active şi pasive.

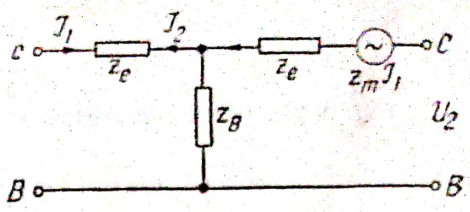


Fig. A.23. Circuit cuadripolar al tranzistorului.

Figura A.23 reprezintă circuitul cuadripolar al tranzistorului.

Din cele dezvoltate mai sus cu privire la aplicarea calculului matricial la studiul circuitelor electrice se desprind următoarele:

Este necesar ca metoda folosită la cercetarea circuitelor electrice să se sprijine mereu pe aspectul lor fenomenologic.

Ca urmare aplicarea calculului matricial la cercetarea circuitelor electrice, trebuie privită ca o metodă prin care se simplifică doar calculele.

3. NOŢIUNI FUNDAMENTALE ALE FUNCŢIEI BESSEL

Se ia ca bază funcţia exponenţială

$$e^{j\xi \cos \alpha} \tag{1}$$

în care ξ, α reprezintă variabile.

Avem

$$e^{\xi} = 1 + \frac{\xi}{1!} + \frac{\xi^2}{2!} + \ldots + \frac{\xi^n}{n!} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\xi^n}{n!} \tag{2}$$

în care

$$0! = 1! = 1.$$

Astfel că

$$e^{j\xi \cos \alpha} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(j\xi)^n}{n!} \cos^n \alpha. \tag{3}$$

De asemenea şi $\cos^n \alpha$ se reprezintă printr-o serie.

Din

$$\cos \alpha = \frac{1}{2}(e^{j\alpha} + e^{-j\alpha}).$$

se obţine

$$2^n \cos^n \alpha = (e^{j\alpha} + e^{-j\alpha})^n. \tag{4}$$

Scanned with OKEN Scanner

Pentru efectuarea operațiilor la exprimarea binomului la puterea n ne folosim de

$$(a+b)^n = 1 \cdot a^0 \cdot b^n + \frac{n}{1!} a^1 \cdot b^{n-1} + \ldots + \frac{n(n-1)\ldots(n-(\nu-1))}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots \nu} a^\nu \cdot b^{n-\nu} + \\ + \ldots + 1 \cdot a^n b^0$$

în care apar $n+1$ termeni.

Avem

$$\frac{n(n-1)\ldots(n-(\nu-1))(n-\nu)\ldots 1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots \nu(n-\nu)\ldots 1} = \frac{n!}{\nu!(n-\nu)!} = \frac{\pi(n)}{\pi(\nu)\,\pi(n-\nu)}$$

în care

$$\pi(n) = 1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots n$$
$$\pi(\nu) = 1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots \nu$$
$$\pi(n-\nu) = 1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots (n-\nu)$$
$$\pi(1) = \pi(0) = 1.$$

În felul acesta binomul la puterea n devine

$$(a+b)^n = \sum_{\nu=0}^{\nu=n} \frac{\pi(n)}{\pi(\nu)\,\pi(n-\nu)} a^\nu b^{n-\nu}. \tag{5}$$

Apare coeficientul C_ν în forma

$$C_\nu = \frac{\pi(n)}{\pi(\nu)\,\pi(n-\nu)} = C_n^\nu \tag{6}$$

C_ν obține valoarea 1 pentru $\nu = 0$ și $\nu = n$.

Se mai remarcă că coeficientul C_ν e maxim pentru: $\nu = \frac{n-1}{2}$ și $\frac{n+1}{2}$ cînd n e impar și C_ν devine maxim pentru $\nu = \frac{n}{2}$ cînd n e par.

În figura A.24 se prezintă coeficientul C_ν pentru cazurile $n = 7$ și $n = 8$. Se vede cum apare $C_{\nu_{max}}$ pentru n impar și n par.

Pentru extremități, $\nu = 0$ și $\nu = n$, coeficientul C_ν obține valoarea 1.

Ca urmare $2^n \cos^n \alpha$ din (4) obține forma

$$2^n \cos^n \alpha = \sum_{\nu=0}^{\nu=n} \frac{\pi(n)}{\pi(\nu)\,\pi(n-\nu)} e^{j\alpha\nu} e^{-j\alpha(n-\nu)} = \sum_{\nu=0}^{\nu=n} \frac{\pi(n)}{\pi(\nu)\,\pi(n-\nu)} e^{j\alpha(2\nu-n)} \tag{7}$$

În (7) se introduce o nouă variabilă

$$m = 2\nu - n \tag{8}$$

Se constată că pentru n impar, m este impar iar pentru n par, m este de asemenea par.

Scanned with OKEN Scanner

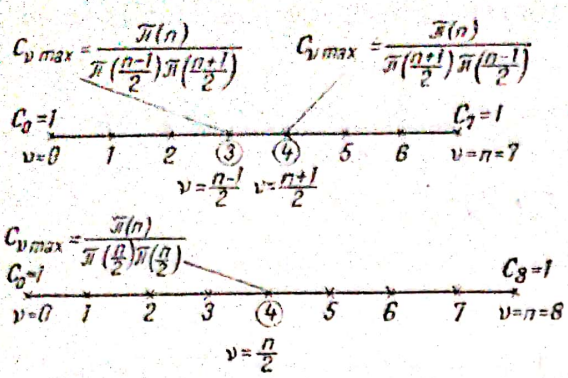


Fig. A.24. Coeficientul $C_{\nu\,max}$ pentru n impar și n par.

Din figura A.25 se vede cum variază m pentru n impar și n par. Ținîndu-se seama de variabila m din figura A.25, astfel că

$$\nu = \frac{n+m}{2}; \quad \pi(\nu) = \pi\left(\frac{n+m}{2}\right); \quad \pi(n-\nu) = \pi\left(\frac{n-m}{2}\right)$$

$2^n \cos^n \alpha$ obține pentru n impar forma

$$2^n \cos^n \alpha = \sum_{m=n}^{m=1} \frac{\pi(n)}{\pi\left(\frac{n+m}{2}\right)\pi\left(\frac{n-m}{2}\right)} (e^{j\alpha m} + e^{-j\alpha m})$$

iar pentru n par:

$$2^n \cos^n \alpha = \sum_{m=n}^{m=2} \frac{\pi(n)}{\pi\left(\frac{n+m}{2}\right)\pi\left(\frac{n-m}{2}\right)} (e^{j\alpha m} + e^{-j\alpha m}) + \frac{\pi(n)}{\pi\left(\frac{n}{2}\right)\pi\left(\frac{n}{2}\right)}$$

în care termenul $\dfrac{\pi(n)}{\pi\left(\frac{n}{2}\right)\pi\left(\frac{n}{2}\right)}$ apare pentru $m = 0$.

Deoarece avem

$$e^{j\alpha m} + e^{-j\alpha m} = 2 \cos m\alpha$$

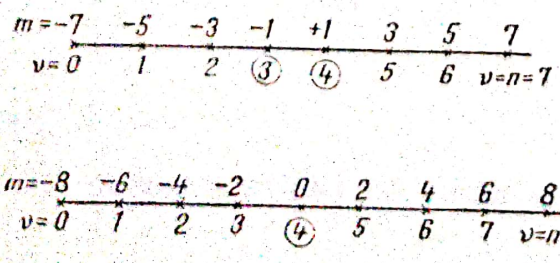


Fig. A.25. $m = 2\nu - n$ în funcție de ν pentru n impar și n par.

Scanned with OKEN Scanner

$2^n \cos^n \alpha$ devine:

$$2^n \cos^n \alpha = \sum_{m=n}^{m=1 \text{ sau } 2} \frac{\pi(n)}{\pi\left(\frac{n+m}{2}\right) \pi\left(\frac{n-m}{2}\right)} 2 \cdot \cos m\alpha.$$

introducîndu-se termenul $\frac{\pi(n)}{\pi\left(\frac{n}{2}\right) \pi\left(\frac{n}{2}\right)}$ pentru $m = 0$, cînd n respectiv m sînt pare.

Ca urmare $\cos^n \alpha$ ia forma, pentru n impar:

$$\cos^n \alpha = \sum_{m=n}^{m=1} \frac{1}{2^{n-}} \frac{\pi(n)}{\pi\left(\frac{n+m}{2}\right) \pi\left(\frac{n-m}{2}\right)} \cos m\alpha$$

iar pentru n par

$$\cos^n \alpha = \sum_{m=n}^{m=2} \frac{1}{2^{n-1}} \frac{\pi(n)}{\pi\left(\frac{n+m}{2}\right) \pi\left(\frac{n-m}{2}\right)} \cos m\alpha + \frac{1}{2^n} \frac{\pi(n)}{\pi\left(\frac{n}{2}\right) \pi\left(\frac{n}{2}\right)}.$$

Introducîndu-se

$$b_m = \frac{1}{2^{n-1}} \frac{\pi(n)}{\pi\left(\frac{n+m}{2}\right) \pi\left(\frac{n-m}{2}\right)} \text{ și } \frac{b_0}{2} = \frac{1}{2^n} \frac{\pi(n)}{\pi\left(\frac{n}{2}\right) \pi\left(\frac{n}{2}\right)}$$

$\cos^n \alpha$ devine

$$\cos^n \alpha = \frac{1}{2} b_0 + b_1 \cos \alpha + b_2 \cos 2\alpha + \ldots + b_m \cos m\alpha + \ldots + b_n \cos n\alpha$$

cînd n e impar termenul b_0 nu există, iar m variază de la n la 1 prin valori impare.

Cînd n e par, m variază de la n la 2 prin numere pare și apare și b_0 pentru $m = 0$.

Cu aceste noțiuni despre $\cos^n \alpha$ se trece la funcția $e^{j\xi \cos \alpha}$.

Avem

$$e^{j\xi \cos \alpha} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{j(\xi)^n}{\pi(n)} \cos^n \alpha.$$

Pentru n impar se formează

$$\sum_{m=n}^{m=1} \frac{(j\xi)^n}{\pi(n)} \frac{1}{2^{n-1}} \frac{\pi(n)}{\pi\left(\frac{n+m}{2}\right) \pi\left(\frac{n-m}{2}\right)} \cos m\alpha = \sum_{m=n}^{m=1} (j\xi)^n \frac{1}{2^{n-1}} \frac{1}{\pi\left(\frac{n+m}{2}\right) \pi\left(\frac{n-m}{2}\right)} \cos m\alpha$$

iar pentru n par avem

$$\sum_{m=n}^{m=2} \frac{(j\xi)^n}{\pi(n)} \frac{1}{2^{n-1}} \frac{\pi(n)}{\pi\left(\frac{n+m}{2}\right)\pi\left(\frac{n-m}{2}\right)} \cos m\alpha + \frac{(j\xi)^n}{\pi(n)} \frac{1}{2^n} \frac{\pi(n)}{\pi\left(\frac{n}{2}\right)\pi\left(\frac{n}{2}\right)} =$$

$$= \sum_{m=n}^{m=2} (j\xi)^n \frac{1}{2^{n-1}} \frac{1}{\pi\left(\frac{n+m}{2}\right)\pi\left(\frac{n-m}{2}\right)} \cos m\alpha + (j\xi)^n \frac{1}{2^n} \frac{1}{\pi\left(\frac{n}{2}\right)\pi\left(\frac{n}{2}\right)}.$$

Spre exemplu
pentru $n = 0$

$$(j\xi)^n \cdot \frac{1}{2^n} \frac{1}{\pi\left(\frac{n}{2}\right)\pi\left(\frac{n}{2}\right)} = 1,$$

pentru $n = 1$

$$\sum_{m=n}^{m=1} (j\xi)^n \frac{1}{2^{n-1}} \frac{\cos m\alpha}{\pi\left(\frac{n+m}{2}\right)\pi\left(\frac{n-m}{2}\right)} = (j\xi)\cos\alpha,$$

pentru $n = 2$

$$\sum_{m=n}^{m=2} (j\xi)^n \frac{1}{2^{n-1}} \frac{\cos m\alpha}{\pi\left(\frac{n+m}{2}\right)\pi\left(\frac{n-m}{2}\right)} + (j\xi)^n \frac{1}{2^n} \frac{1}{\pi\left(\frac{n}{2}\right)\pi\left(\frac{n}{2}\right)} =$$

$$= (j\xi)^2 \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1\cdot 2} \cos 2\alpha + (j\xi)^2 \frac{1}{2^2},$$

pentru $n = 3$

$$\sum_{m=n}^{m=1} (j\xi)^n \frac{1}{2^{n-1}} \frac{\cos m\alpha}{\pi\left(\frac{n+m}{2}\right)\cos\left(\frac{n-m}{2}\right)} = (j\xi)^3 \frac{1}{2^2} \frac{\cos 3\alpha}{1\cdot 2\cdot 3} + (j\xi)^3 \frac{1}{2^2} \frac{\cos\alpha}{1\cdot 2}$$

pentru $n = 4$

$$\sum_{m=n}^{m=2} (j\xi)^2 \frac{1}{2^{n-1}} \frac{\cos m\alpha}{\pi\left(\frac{n+m}{2}\right)\pi\left(\frac{n-m}{2}\right)} + (j\xi)^n \frac{1}{2^n} \frac{1}{\pi\left(\frac{n}{2}\right)\pi\left(\frac{n}{2}\right)} =$$

$$= (j\xi)^4 \frac{1}{2^3} \frac{\cos 4\alpha}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} + (j\xi)^4 \frac{1}{2^3} \frac{\cos 2\alpha}{1\cdot 2\cdot 3} + (j\xi)^4 \frac{1}{2^4} \frac{1}{1\cdot 2\cdot 1\cdot 2}.$$

Scanned with OKEN Scanner

Din cele de mai sus, se constată că $e^{j\xi\cos\alpha}$ ia forma

$$e^{j\xi\cos\alpha}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(j\xi)^n}{\pi(n)}\cos^n\alpha=\frac{1}{2}S_0+S_1\cos\alpha+\ldots+S_m\cos m\alpha+\ldots$$

în care pentru m impar, se va lua n impar

$$S_m=\sum_{n=m}^{\infty}\frac{(j\xi)^n}{2^{n-1}}\frac{1}{\pi\left(\frac{n+m}{2}\right)\pi\left(\frac{n-m}{2}\right)}$$

iar pentru m par se va lua n par

$$S_m=\sum_{n=m}^{\infty}\frac{(j\xi)^n}{2^{n-1}}\frac{1}{\pi\left(\frac{n+m}{2}\right)\pi\left(\frac{n-m}{2}\right)}$$

și se va mai introduce și termenul $\frac{1}{2}S_0$ în forma

$$\frac{1}{2}S_0=\sum_{n-0}^{\infty}\frac{(j\xi)^n}{2^n}\frac{1}{\pi\left(\frac{n}{2}\right)\pi\left(\frac{n}{2}\right)}.$$

Se introduce o nouă variabilă

$$n-m=2\zeta$$

astfel că

$$n+m=2\zeta+2m.$$

Spre exemplu fie $m=5$			fie $m=6$		
pentru	$n=5$	avem $\zeta=0$	pentru $n=6$	avem	$\zeta=0$
	$n=7$	„ $\zeta=1$	pentru $n=8$	„	$\zeta=1$
	$n=9$	„ $\zeta=2$	pentru $n=10$	„	$\zeta=2$
	.....		.....		

Ca urmare S_m atît pentru m par sau impar va obține forma

$$S_m=\sum_{\zeta=0}^{\infty}\frac{(j\xi)^{m+2\zeta}}{2^{m+2\zeta}}\frac{2}{\pi(m+\zeta)\,\pi(\zeta)}$$

sau

$$S_m=2j^m\left(\frac{\xi}{2}\right)^m\sum_{\zeta=0}^{\infty}\left(\frac{j\xi}{2}\right)^{2\zeta}\frac{1}{\pi(m+\zeta)\,\pi(\zeta)}.$$

Scanned with OKEN Scanner

Se introduce funcția $J_m(\xi)$ în forma

$$J_m(\xi) = \left(\frac{\xi}{2}\right)^m \sum_{\zeta=0}^{\infty} \left(\frac{j\xi}{2}\right)^{2\zeta} \frac{1}{\pi(m+\zeta)\,\pi(\zeta)}$$

denumită funcția lui Bessel de categoria întîia, sau speța întîia și de ordinul m. Ea reprezintă o serie convergentă.

Spre exemplu funcția Bessel de categoria întîia și de ordinul zero ia forma

$$J_0(\xi) = \sum_{\zeta=0}^{\infty} \left(\frac{j\xi}{2}\right)^{2\zeta} \frac{1}{\pi(\zeta)\,\pi(\zeta)}.$$

Din definiția funcției Bessel de categoria întîia rezultă

$$J_{m-1}(\xi) + J_{m+1}(\xi) = \frac{2m}{\xi} J_m(\xi)$$

$$J_{m-1}(\xi) - J_{m+1}(\xi) = 2\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\xi} J_m(\xi)$$

de unde se deduce

$$J_{m-1}(\xi) = \frac{m}{\xi} J_m(\xi) + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\xi} J_m(\xi).$$

Relația

$$J_{m-1}(\xi) + J_{m+1}(\xi) = \frac{2m}{\xi} J_m(\xi)$$

se demonstrează în felul următor:

Avem

$$J_{m-1}(\xi) = \sum_{\zeta=0}^{\infty} (-1)^\zeta \left(\frac{\xi}{2}\right)^{m-1+2\zeta} \frac{1}{\pi(m-1+\zeta)\pi(\zeta)} = \left(\frac{\xi}{2}\right)^{m-1} \frac{1}{\pi(m-1)} +$$

$$+ \sum_{\zeta=1}^{\infty} (-1)^\zeta \left(\frac{1}{\xi}\right)^{m-1+2\zeta} \frac{1}{\pi(m-1+\zeta)\,\pi(\zeta)}$$

$$J_{m+1}(\xi) = \sum_{\zeta=0}^{\infty} (-1)^\zeta \left(\frac{\xi}{2}\right)^{m+1+2\zeta} \frac{1}{\pi(m+1+\zeta)\,\pi(\zeta)} =$$

$$= \sum_{p=1}^{\infty} (-1)^{p-1} \left(\frac{\xi}{2}\right)^{m-1+2p} \frac{1}{\pi(m+p)\,\pi(p-1)} =$$

$$= -\sum_{p=1}^{\infty} (-1)^p \left(\frac{\xi}{2}\right)^{m-1+2p} \frac{1}{\pi(m+p)\,\pi(p-1)}$$

în care s-a introdus $\zeta = p - 1$.

Se înlocuiește din nou p prin ζ.

Scanned with OKEN Scanner

Se obține

$$J_{m+1}(\xi) = -\sum_{\zeta=1}^{\infty}(-1)^{\zeta}\left(\frac{\xi}{2}\right)^{m-1+2\zeta}\frac{1}{\pi(m+\zeta)\,\pi(\zeta-1)}$$

astfel că

$$J_{m-1}(\xi) + J_{m+1}(\xi) = \left(\frac{\xi}{2}\right)^{m-1}\frac{1}{\pi(m-1)} +$$

$$+\sum_{\zeta=1}^{\infty}(-1)^{\zeta}\left(\frac{\xi}{2}\right)^{m-1+2\zeta}\left\{\frac{1}{\pi(m-1+\zeta)\,\pi(\zeta)} - \frac{1}{\pi(m+\zeta)\,\pi(\zeta-1)}\right\}.$$

Pe de altă parte avem

$$(\pi(m-1+\zeta))(m+\zeta) = \pi(m+\zeta)$$
$$(\pi(\zeta-1))\zeta = \pi(\zeta).$$

astfel că

$$\frac{1}{\pi(m-1+\zeta)\,\pi(\zeta)} - \frac{1}{\pi(m+\zeta)\,\pi(\zeta-1)} = \frac{m+\zeta}{\pi(m+\zeta)\,\pi(\zeta)} -$$
$$-\frac{\zeta}{\pi(m+\zeta)\,\pi(\zeta)} = \frac{m}{\pi(m+\zeta)\,\pi(\zeta)}.$$

Ca urmare

$$J_{m-1}(\xi) + J_{m+1}(\xi) = \sum_{\zeta=0}^{\infty}(-1)^{\zeta}\left(\frac{\xi}{2}\right)^{m-1+2\zeta}\frac{m}{\pi(m+\zeta)\,\pi(\zeta)} =$$

$$= m\left(\frac{\xi}{2}\right)^{-1}J_m(\xi) = \frac{2m}{\xi}J_m(\xi).$$

De asemenea relația

$$J_{m-1}(\xi) - J_{m+1}(\xi) = 2\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\xi}J_m(\xi)$$

se demonstrează în felul următor:

Avem

$$J_{m-1}(\xi) - J_{m+1}(\xi) = \left(\frac{\xi}{2}\right)^{m-1}\frac{2}{\pi(m-1)} +$$

$$+\sum_{\zeta=1}^{\infty}(-1)^{\zeta}\left(\frac{\xi}{2}\right)^{m-1+2\zeta}\left\{\frac{m+\zeta}{\pi(m+\zeta)\,\pi(\zeta)} + \frac{\zeta}{\pi(m+\zeta)\,\pi(\zeta)}\right\} =$$

$$= \left(\frac{\xi}{2}\right)^{m-1}\frac{1}{\pi(m-1)} + \sum_{\zeta=1}^{\infty}(-1)^{\zeta}\left(\frac{\xi}{2}\right)^{m-1+2\zeta}\frac{m+2\zeta}{\pi(m+\zeta)\,\pi(\zeta)}.$$

Pe de altă parte se obține

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\xi} J_m(\xi) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\xi}\left\{\sum_{\zeta=0}^{\infty}(-1)^{\zeta}\left(\frac{\xi}{2}\right)^{m+2\zeta}\frac{1}{\pi(m+\zeta)\pi(\zeta)}\right\} =$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{\zeta=0}^{\infty}(-1)^{\zeta}(m+2\zeta)\left(\frac{\xi}{2}\right)^{m+2\zeta-1}\frac{1}{\pi(m+\zeta)\pi(\zeta)}$$

$$2\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\xi} J_m(\xi) = \left(\frac{\xi}{2}\right)^{m-1}\frac{1}{\pi(m-1)} + \sum_{\zeta=1}^{\infty}(-1)^{\zeta}\left(\frac{\xi}{2}\right)^{m+2\zeta-1}\frac{m+2\zeta}{\pi(m+\zeta)\pi(\zeta)}$$

adică

$$J_{m-1}(\xi) - J_{m+1}(\xi) = 2\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\xi} J_m(\xi).$$

Se cere să se obțină o relație în care să apară numai funcția $J_m(\xi)$. În acest scop se formează

$$J_{m-2}(\xi) + J_m(\xi) = \frac{2(m-1)}{\xi} J_{m-1}(\xi)$$

$$J_{m-2}(\xi) - J_m(\xi) = 2\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\xi} J_{m-1}(\xi)$$

de unde se obține

$$J_m(\xi) = \frac{m-1}{\xi} J_{m-1}(\xi) - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\xi} J_{m-1}(\xi)$$

astfel că

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\xi} J_{m-1}(\xi) = \frac{m-1}{\xi} J_{m-1}(\xi) - J_m(\xi).$$

Derivăm în raport cu ξ ecuația

$$J_{m-1}(\xi) = \frac{m}{\xi} J_m(\xi) + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\xi} J_m(\xi).$$

Se obține

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\xi} J_{m-1}(\xi) = \frac{m}{\xi}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\xi} J_m(\xi) - \frac{m}{\xi^2} J_m(\xi) + \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}\xi^2} J_m(\xi) =$$

$$= \frac{m-1}{\xi}\left(\frac{m}{\xi} J_m(\xi) + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\xi} J_m(\xi)\right) - J_m(\xi)$$

de unde se deduce

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}\xi^2} J_m(\xi) + \frac{1}{\xi}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\xi} J_m(\xi) + \left(1 - \frac{m^2}{\xi^2}\right) J_m(\xi) = 0.$$

Scanned with OKEN Scanner

Cînd apare numai funcția Bessel de categoria întîia și de ordinul m, atunci se obține o relație în forma unei ecuații diferențiale de ordinul doi a funcției Bessel.

Pentru $m = 0$, ecuația diferențială de mai sus devine

$$\frac{d^2}{d\xi^2} J_0(\xi) + \frac{1}{\xi}\frac{d}{d\xi} J_0(\xi) + J_0(\xi) = 0$$

în care apare funcția Bessel de categoria întîia și de ordinul zero.

Pentru a se obține funcția Bessel de categoria întîia și de ordinul unu, ea se obține în funcție de $J_0(\xi)$ în felul următor:

Pentru $m = 0$ rezultă:

$$J_{-1}(\xi) + J_1(\xi) = 0$$

$$J_{-1}(\xi) - J_1(\xi) = 2\frac{d}{d\xi} J_0(\xi)$$

de unde se deduce

$$J_1(\xi) = -\frac{d}{d\xi} J_0(\xi).$$

3.1. REPREZENTAREA FUNCȚIEI BESSEL ÎN FORMĂ DE INTEGRALĂ DEFINITĂ

S-a obținut

$$\cos^n \alpha = \frac{b_0}{2} + b_1 \cos\alpha + b_2 \cos 2\alpha + \ldots + b_m \cos m\alpha + \ldots + b_n \cos n\alpha$$

în care

$$b_m = \frac{1}{2^{n-1}} \frac{\pi(n)}{\pi\left(\frac{n+m}{2}\right)\pi\left(\frac{n-m}{2}\right)}; \qquad \frac{b_0}{2} = \frac{1}{2^n} \frac{\pi(n)}{\pi\left(\frac{n}{2}\right)\pi\left(\frac{n}{2}\right)}.$$

cînd n e impar și m este impar iar termenul $\frac{b_0}{2}$ nu există. Cînd n este par și m este par iar pentru $m = 0$ apare termenul $\frac{b_0}{2}$.

Privind seria de mai sus ca o serie trigonometrică, se obține amplitudinea b_m prin integrala

$$b_m = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \cos^n \alpha \cos m\alpha \, d\alpha.$$

Integrala e formată de la 0 la π în loc de la 0 la 2π, pentru că seria e simetrică față de π, ținîndu-se seama că dacă n este impar și m este impar și dacă n este par și m este par.

Ca urmare se formează

$$\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \cos^n \alpha \cos m\alpha \, d\alpha = \frac{1}{2^{n-1}} \frac{\pi(n)}{\pi\left(\frac{n+m}{2}\right)\pi\left(\frac{n-m}{2}\right)}.$$

Scanned with OKEN Scanner

Se trece la seria

$$e^{j\xi\cos\alpha} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(j\xi)^n}{\pi(n)} \cos^n\alpha = \frac{1}{2} S_0 + S_1 \cos\alpha + \ldots + S_m \cos m\alpha + \ldots$$

în care

$$S_m = \sum_{n=m}^{n=\infty} \frac{(j\xi)^n}{2^{n-1}} \frac{1}{\pi\left(\frac{n+m}{2}\right) \pi\left(\frac{n-m}{2}\right)}.$$

Se știe că dacă m este par și n este par iar dacă m este impar și n este impar. Se formează

$$\frac{2}{\pi}\int e^{j\xi\cos\alpha} \cos m\alpha \, d\alpha = \sum_{n=m}^{n=\infty} \frac{(j\xi)^n}{2^{n-1}} \frac{1}{\pi\left(\frac{n+m}{2}\right) \pi\left(\frac{n-m}{2}\right)}.$$

Introducîndu-se

$$n - m = 2\zeta$$

se obține

$$\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} e^{j\xi\cos\alpha} \cos m\alpha \, d\alpha = 2j^m \sum_{\zeta=0}^{\infty} (-1)^{\zeta} \left(\frac{\xi}{2}\right)^{m+2\zeta} \frac{1}{\pi(m+\zeta)\,\pi(\zeta)} = 2j^m J_m(\xi).$$

Egalitatea ne arată că funcția Bessel de ordinul m și un argument real ξ, înmulțit cu $2j^m$ reprezintă o integrală definită.

Seria convergentă apare în forma unei integrale definite.

Înlocuind în integrala de mai sus

$$\cos m\alpha = \frac{1}{2}(e^{jm\alpha} + e^{-jm\alpha})$$

se obține

$$\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} e^{j\xi\cos\alpha} \cos m\alpha \, d\alpha = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} e^{j(\xi\cos\alpha + m\alpha)} \, d\alpha + \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} e^{j(\xi\cos\alpha - m\alpha)} \, d\alpha.$$

Se înlocuiește în ultima integrală α prin $-\alpha$

$$\int_0^{\pi} e^{j(\xi\cos\alpha - m\alpha)} d\alpha = \int_0^{-\pi} e^{j(\xi\cos\alpha + m\alpha)} \, d(-\alpha) = \int_{-\pi}^{0} e^{j(\xi m\alpha + m\alpha)} \, d\alpha$$

astfel că

$$\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} e^{j\xi\cos\alpha} \cos m\alpha \, d\alpha = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} e^{j(\xi\cos\alpha + m\alpha)} \, d\alpha = 2j^m J_m(\xi).$$

Fie

$$j^m = e^{j\frac{\pi}{2}m}$$

astfel că

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} e^{j(\xi\cos\alpha + m\alpha)} \cdot e^{-j\frac{\pi}{2}m}\, d\alpha = 2\,J_m(\xi).$$

sau

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} e^{j\left(\xi\cos\alpha - m\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\right)}\, d\alpha = 2\,J_m(\xi).$$

Ținîndu-se seama de

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) = \cos\alpha; \quad \frac{\pi}{2}-\alpha = \theta$$

rezultă

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} e^{j(\xi\sin\theta - m\theta)}\, d(-\theta) = 2\,J_m(\xi).$$

Ținîndu-se seama de

$$e^{j(\xi\sin\theta - m\theta)} = \cos(\xi\sin\theta - m\theta) + j\sin(\xi\sin\theta - m\theta)$$

și cum integrala cu $\sin(\xi\sin\theta - m\theta)$ de la $-\pi$ la $+\pi$ e nulă, rezultă

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} e^{j(\xi\sin\theta - m\theta)}\, d(-\theta) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} \cos(\xi\sin\theta - m\theta)\, d(-\theta)$$

sau $d(+\theta)$ pentru că apare cosinus.

Ca urmare

$$\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} \cos(\xi\sin\theta - m\theta)\, d\theta = 2J_m(\xi)$$

sau

$$\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} \cos(\xi\sin\theta - m\theta)\, d\theta = J_m(\xi).$$

$J_m(\xi)$ se obține într-o formă integrală.

3.2. FUNCȚIILE BESSEL DE CATEGORIA ÎNTÎIA, DE ORDINUL ZERO ȘI DE ORDINUL UNU

Funcțiile Bessel de categoria întiia de ordinul zero și de ordinul întîi sînt acelea care sînt folosite la determinarea cîmpului electric.

Avem

$$J_0(\xi) = 1 - \frac{1}{(1!)^2}\left(\frac{\xi}{2}\right)^2 + \frac{1}{(2!)^2}\left(\frac{\xi}{2}\right)^4 - \frac{1}{(3!)^2}\left(\frac{\xi}{2}\right)^6 + \dots$$

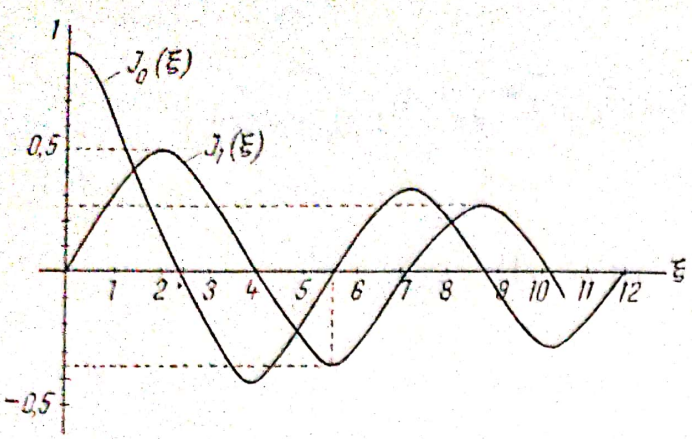


Fig. A.26. Funcţiile Bessel de categoria întîia de ordinul zero şi de ordinul întîi.

în comparaţie cu

$$\cos\alpha = 1 - \frac{\alpha^2}{2!} + \frac{\alpha^4}{4!} - \frac{\alpha^6}{6!} + \ldots$$

$$J_1(\xi) = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\xi} J_0(\xi) = \frac{1}{2}\xi - \frac{\xi^3}{2^4} + \frac{1}{6}\frac{\xi^5}{2^6} \ldots$$

în comparaţie cu

$$\sin\alpha = \frac{\alpha}{1!} - \frac{\alpha^3}{3!} + \frac{\alpha^5}{5!} - \frac{\alpha^7}{7!} + \cdots \qquad \text{(v. fig. A.26).}$$

Ca un exerciţiu se poate controla cum funcţia $J_0(\xi)$ verifică ecuaţia diferenţială

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}\xi^2} J_0(\xi) + \frac{1}{\xi}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\xi} J_0(\xi) + J_0(\xi) = 0.$$

Avem

$$J_0(\xi) = 1 - \frac{\xi^2}{4} + \frac{1}{4}\frac{\xi^4}{2^4} - \frac{1}{6^2}\frac{\xi^6}{2^6} + \ldots .$$

Se formează

$$\frac{\mathrm{d}^2 J_0(\xi)}{\mathrm{d}\xi} = -\frac{\xi}{2} + \frac{\xi^3}{2^4} - \frac{1}{6}\frac{\xi^5}{2^6} + \cdots$$

$$\frac{\mathrm{d}^2 J_0(\xi)}{\mathrm{d}\xi^2} = -\frac{1}{2} + \frac{3}{2^4}\xi^2 - \frac{5}{6}\frac{\xi^4}{2^6} + \ldots$$

$$\frac{1}{\xi}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\xi} J_0(\xi) = -\frac{1}{2} + \frac{\xi^2}{2^4} - \frac{1}{6}\frac{\xi^4}{2^6} + \ldots$$

$$J_0(\xi) = 1 - \frac{\xi^2}{4} + \frac{1}{4}\frac{\xi^4}{2^4} - \frac{1}{6^2}\frac{\xi^6}{2^6} + \ldots .$$

Adunînd ultimele trei ecuaţii se verifică că pentru fiecare termen fără ξ, cu ξ^2 apoi cu ξ^4 etc. se obţin sume egale cu zero.

Scanned with OKEN Scanner

4. NOȚIUNI TEORETICE FUNDAMENTALE NECESARE CALCULULUI OPERAȚIONAL

4.1. DESCOMPUNEREA RAPORTULUI A DOUĂ POLINOAME ÎNTR-O SUMĂ DE FRACȚII SIMPLE

Să luăm ca un exemplu raportul a două polinoame în forma $\frac{F(x)}{f(x)}$ în care spre exemplu $f(x) = (x-a)^{\alpha}(x-b)^{\beta}$.

Se formează identitatea

$$\frac{F(x)}{f(x)} = \frac{F(x)}{(x-a)^{\alpha}(x-b)^{\beta}} = \frac{A}{(x-a)^{\alpha}} + \frac{F(x) - A(x-b)^{\beta}}{(x-a)^{\alpha}(x-b)^{\beta}}, \tag{1}$$

în care se face

$$F(a) - A(a-b)^{\beta} = 0 \tag{2}$$

pentru

$$x = a$$

astfel că

$$A = \frac{F(a)}{(a-b)^{\beta}}. \tag{3}$$

Ca urmare

$F(x) - A(x-b)^{\beta}$ fiind egal cu zero pentru $x = a$, se introduce un nou polinom în forma

$$F(x) - A(x-b)^{\beta} = F_1(x)(x-a) \tag{4}$$

astfel că

$$\frac{F(x)}{(x-a)^{\alpha}(x-b)^{\beta}} = \frac{A}{(x-a)^{\alpha}} + \frac{F_1(x)}{(x-a)^{\alpha-1}(x-b)^{\beta}}. \tag{5}$$

Se obține în continuare

$$\frac{F_1(x)}{(x-a)^{\alpha-1}(x-b)^{\beta}} = \frac{A_1}{(x-a)^{\alpha-1}} + \frac{F_2(x)}{(x-a)^{\alpha-2}(x-b)^{\beta}}$$

$$\frac{F_2(x)}{(x-a)^{\alpha-2}(x-b)^{\beta}} = \frac{A_2}{(x-a)^{\alpha-2}} + \frac{F_3(x)}{(x-a)^{\alpha-3}(x-b)^{\beta}}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{F_{\alpha-1}(x)}{(x-a)(x-b)^{\beta}} = \frac{A_{\alpha-1}}{x-a} + \frac{F_{\alpha}(x)}{(x-b)^{\beta}}$$

Scanned with OKEN Scanner

astfel că:

$$\frac{F(x)}{(x-a)^{\alpha}(x-b)^{\beta}} = \frac{A}{(x-a)^{\alpha}} + \frac{A_1}{(x-a)^{\alpha-1}} + \ldots + \frac{A_{\alpha-1}}{(x-a)} + \frac{F_{\alpha}(x)}{(x-b)^{\beta}}.$$

În mod analog se formează

$$\frac{F_{\alpha}(x)}{(x-b)^{\beta}} = \frac{B}{(x-b)^{\beta}} + \frac{F_{\alpha}(x)-B}{(x-b)^{\beta}} = \frac{B}{(x-b)^{\beta}} + \frac{F_{\alpha-1}(x)}{(x-b)^{\beta-1}}$$

$$\frac{F_{\alpha-1}(x)}{(x-b)^{\beta-1}} = \frac{B_1}{(x-b)^{\beta-1}} + \frac{F_{\alpha-2}(x)}{(x-b)^{\beta-2}}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\frac{F_{\alpha(\beta-1)}(x)}{(x-b)} = \frac{B_{\beta-1}}{x-b} + F_{\alpha\beta}(x).$$

astfel că

$$\frac{F_{\alpha}(x)}{(x-b)^{\beta}} = \frac{B}{(x-b)^{\beta}} + \frac{B_1}{(x-b)^{\beta-1}} + \ldots + \frac{B_{\beta-1}}{(x-b)} + F_{\alpha\beta}(x).$$

Din cele de mai sus, se constată că este recomandabil ca mai întii să se efectueze împărțirea

$$\frac{F(x)}{f(x)} = \frac{\varphi(x)}{f(x)} + F_{\alpha\beta}(x)$$

în care $\varphi(x)$ e de grad inferior lui $f(x)$ și după aceea raportul $\frac{\varphi(x)}{f(x)}$ să fie descompus într-o sumă de fracții simple de forma

$$\frac{\varphi(x)}{f(x)} = \frac{A}{(x-a)^{\alpha}} + \frac{A_1}{(x-a)^{\alpha-1}} + \ldots + \frac{A_{\alpha-1}}{(x-a)} + \frac{B}{(x-b)^{\beta}} + \ldots + \frac{B_{\beta-1}}{x-b}.$$

În cazul cînd $\alpha = 1$, mărimea A se mai poate determina și în felul următor: Se formează

$$\frac{\varphi(x)(x-a)}{f(x)} = A + (x-a)\left\{\frac{B}{(x-b)^{\beta}} + \frac{B_1}{(x-b)^{\beta-1}} + \ldots + \frac{B_{\beta-1}}{(x-b)}\right\}$$

astfel că

$$\lim_{x\to a} \frac{\varphi(x)}{\left(\frac{f(x)}{x-a}\right)} = \frac{\varphi(a)}{f'(a)} = A$$

deoarece avem

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = f'(x)$$

iar pentru $h = x - a$ avem

$$\lim_{x \to a} \frac{f(2x - a) - f(x)}{x - a} = f'(a).$$

Admițind că $F(x)$ și $f(x)$ reprezintă două polinoame de același grad exprimate prin

$$F(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_0$$

$$f(x) = \alpha_n x^n + \alpha_{n-1} x^{n-1} + \ldots + \alpha_0$$

raportul lor poate fi pus în forma

$$\frac{F(x)}{f(x)} = \frac{a_n}{\alpha_n} + \frac{F(x) - \frac{a_n}{\alpha_n} f(x)}{f(x)} = \frac{a_n}{\alpha_n} + \frac{\varphi(x)}{f(x)}$$

în care $\varphi(x)$ apare cel mult de gradul $(n - 1)$.

Exemple

1) Se dă raportul $\frac{x^3}{(x+2)^2}$.

Se formează

$$\frac{x^3}{(x+2)^2} = \frac{A}{(x+2)^2} + \frac{x^3 - A}{(x+2)^2}$$

în care

$$x^3 - A = 0 \quad \text{pentru} \quad x = -2.$$

Se obține

$$A = -8.$$

Fie

$$x^3 + 8 = (ax^2 + bx + c)(x + 2)$$

de unde se obține

$$a = 1; \qquad b = -2; \qquad c = 4.$$

Ca urmare

$$F_1(x) = ax^2 + bx + c = x^2 - 2x + 4.$$

Se formează

$$\frac{x^2 - 2x + 4}{x + 2} = \frac{A_1}{x + 2} + \frac{(x^2 - 2x + 4) - A_1}{x + 2}$$

în care $x^2 - 2x + 4 - A_1 = 0$ pentru $x = -2$.

Se obține

$$A_1 = 12.$$

Fie

$$x^2 - 2x + 4 - 12 = (ax + b)(x + 2).$$

Se obține

$$a = 1; \quad b = -4$$

ca urmare

$$F_2(x) = x - 4.$$

Se obține

$$\frac{x^3}{(x+2)^2} = \frac{-8}{(x+2)^2} + \frac{12}{(x+2)} + x - 4.$$

2) Se dă raportul

$$\frac{x^3}{(x-1)(x+1)(x+2)} = \frac{x^3}{x^3+2x^2-x-2} = \frac{1}{1} + \frac{x^3 - 1(x^3+2x^2-x-2)}{x^3+2x^2-x-2}$$

astfel că

$$\frac{x^3}{(x-1)(x+1)(x+2)} = 1 + \frac{-2x^2+x+2}{(x-1)(x+1)(x+2)}.$$

Se formează

$$\frac{\varphi(x)}{f(x)} = \frac{-2x^2+x+2}{(x-1)(x+1)(x+2)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{x+2}.$$

Se obține

$$A = \frac{1}{6}; \quad B = \frac{1}{2}; \quad C = -\frac{8}{3}.$$

Constantele A, B, C mai pot fi obținute și în felul următor

$$A = \frac{\varphi(1)}{f'(1)}; \quad B = \frac{\varphi(-1)}{f'(-1)}; \quad C = \frac{\varphi(-2)}{f'(-2)}$$

în care

$$f'(x) = (x+1)(x+2) + (x-1)(x+2) + (x-1)(x+1).$$

3) Se dă raportul

$$\frac{\varphi(x)}{f(x)} = \frac{1}{x^3-1} = \frac{1}{(x-1)(x^2+x+1)}.$$

Se formează

$$\frac{1}{x^3-1}=\frac{1}{(x-1)(x^2+x+1)}$$

Rădăcinile ecuației $x^2+x+1=0$ sînt imaginare.
Avem

$$\varepsilon_1=\frac{1}{2}(-1+j\sqrt{3}) \qquad \varepsilon_2=\frac{1}{2}(-1-j\sqrt{3}).$$

Dacă ne referim numai la rădăcina reală a ecuației $x-1=0$, vom scrie

$$\frac{1}{(x-1)(x^2+x+1)}=\frac{\frac{1}{x^2+x+1}}{(x-1)}=\frac{A}{x-1}+\frac{\frac{1}{x^2+x+1}-A}{x-1}$$

în care $\frac{1}{x^2+x+1}-A=0$ pentru $x=1$, astfel că $A=\frac{1}{3}$.

Se introduce

$$\frac{1}{x^2+x+1}-\frac{1}{3}=\frac{3-(x^2+x+1)}{3(x^2+x+1)}=\frac{-x^2-x+2}{3(x^2+x+1)}=\frac{(Px+Q)(x-1)}{3(x^2+x+1)}.$$

Din

$$-x^2-x+2=Px^2-Px+Qx-Q$$

se obține

$$P=-1, \qquad Q=-2$$

astfel că

$$\frac{1}{(x-1)(x^2+x+1)}=\frac{A}{x-1}+\frac{Px+Q}{3(x^2+x+1)}$$

în care

$$A=\frac{1}{3}; \quad P=-1; \quad Q=-2.$$

4) Se dă raportul

$$\frac{\varphi(x)}{f(x)}=\frac{1}{x^3(x^2+1)}=\frac{A}{x^3}+\frac{A_1}{x^2}+\frac{A_2}{x}+\frac{Px+Q}{x^2+1}.$$

Se formează

$$1=A(x^2+1)+A_1x(x^2+1)+A_2x^2(x^2+1)+x^3(Px+Q)$$

de unde se obține

$$A_2+P=0; \qquad A_1+Q=0; \qquad A+A_2=0$$

$$A_1=0; \qquad A=1; \qquad A_2=-1; \qquad P=1; \qquad Q=0$$

Scanned with OKEN Scanner

5) Se dă raportul

$$\frac{\varphi(x)}{f(x)} = \frac{1}{x^3(x-1)^2} = \frac{A}{x^3} + \frac{A_1}{x^2} + \frac{A_2}{x} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{B_1}{x-1}. \qquad (1)$$

Se introduce

$$(x-1)^2 = (1-x)^2$$

iar $(1-x)^{-2}$ se dezvoltă în serie

$$(1-x)^{-2} = 1 + \frac{-2}{1} 1 \cdot (-x) + \frac{(-2)(-3)}{1 \cdot 2} 1 \cdot (-x)^2 +$$

$$+ \frac{(-2)(-3)(-4)}{1 \cdot 2 \cdot 3} 1 \cdot (-x)^3 + \ldots = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + 5x^4 + \ldots$$

Ca urmare raportul $\frac{1}{x^3(x-1)^2}$ ia forma

$$\frac{1}{x^3(x-1)^2} = \frac{1}{x^3} + \frac{2}{x^2} + \frac{3}{x} + 4 + 5x + \ldots . \qquad (2)$$

Pe de altă parte se poate forma

$$x - 1 = h \text{ deci } x = h + 1; \quad x^3 = (h+1)^3; \quad (x-1)^2 = h^2$$

Se dezvoltă din nou seria $(1+h)^{-3}$.
Se obține

$$1 + h)^{-3} = 1 + \frac{-3}{1} 1 \cdot h + \frac{(-3)(-4)}{1 \cdot 2} 1 \cdot h^2 + \ldots = 1 - 3h + 6h^2 \ldots$$

Ca urmare raportul obține o nouă formă

$$\frac{1}{x^3(x-1)^2} = \frac{1}{(1+h)^3 h^2} = \frac{1}{h^2} - \frac{3}{h} + 6 - \ldots = \frac{1}{(x-1)^2} - \frac{3}{x-1} + 6. \qquad (3)$$

Se constată că relația (1) se reproduce prin primii trei termeni din (2) și prin primii doi termeni din (3).
Ca urmare se obține

$$\frac{1}{x^3(x-1)^2} = \frac{1}{x^3} + \frac{2}{x^2} + \frac{3}{x} + \frac{1}{(x-1)^2} - \frac{3}{x-1}.$$

În felul acesta s-au putut determina mai repede constantele

$$A,\ A_1,\ A_2,\ B \text{ și } B_1$$

6) Se dă raportul

$$\frac{\varphi(x)}{f(x)} = \frac{1}{x^4+1} = \frac{1}{(x^2 + x\sqrt{2} + 1)(x^2 - x\sqrt{2} + 1)} = \frac{P_1 x + Q_1}{x^2 + x\sqrt{2} + 1} + \frac{P_2 x + Q_2}{x^2 - x\sqrt{2} + 1}.$$

Se formează

$$1 = (P_1 x + Q_1)(x^2 - x\sqrt{2} + 1) + (P_2 x + Q_2)(x^2 + x\sqrt{2} + 1)$$

de unde se obține

$$P_1 + P_2 = 0;\quad Q_1 + Q_2 - P_1\sqrt{2} + P_2\sqrt{2} = 0;\quad P_1 - Q_1\sqrt{2} + P_2 + Q_2\sqrt{2} = 0.$$

$$Q_1 + Q_2 = 1;\quad Q_1 = Q_2 = \frac{1}{2};\quad P_1 = -P_2;\quad P_1 = \frac{1}{2\sqrt{2}};\quad P_2 = -\frac{1}{2\sqrt{2}}.$$

4.2. FUNCȚIA DE VARIABILĂ COMPLEXĂ

Fie funcția

$$t = f(z) = P(xy) + jQ(xy) \tag{1}$$

ca o funcție de variabilă complexă z, în care variabila complexă z în planul complex z se exprimă prin

$$z = x + jy = z\,e^{j\alpha_z} \tag{2}$$

iar funcția t în planul complex t ia forma

$$t = T\,e^{j\alpha_t} = P(xy) + jQ(xy). \tag{3}$$

Ambele mărimi complexe z și t în planurile complexe din figura A.27 se reprezintă grafic prin cîte un segment de dreaptă care pornește din originea sistemului de coordonate și are o anumită poziție față de axa reală.

Prin fixarea celor două segmente de dreaptă în planurile complexe, se fixează și pozițiile a două puncte corespunzătoare A_z și A_t în aceste planuri

Cîteva exemple de funcții de variabilă complexă

$$t = z^2;\quad t = \frac{1}{z};\quad t = e^z;\quad t = (z-a)^k;\quad t = e^{\frac{1}{z}}. \tag{4}$$

Să considerăm funcția de variabilă complexă

$$t = T\,e^{j\alpha_t} = z^2 = z^2\,e^{j2\alpha_z} = (x + jy)^2 = x^2 - y^2 + j2xy = P(xy) + jQ(xy) \tag{5}$$

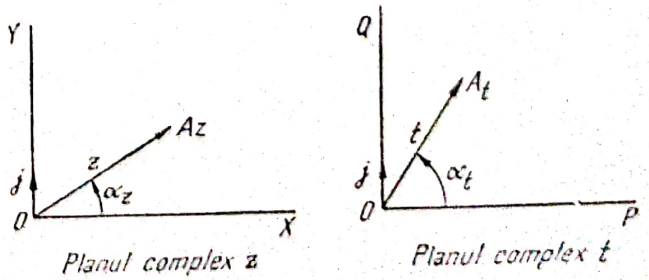


Fig. A.27. Planurile complexe z și t.

în care

$$P(xy) = x^2 - y^2; \quad Q(xy) = 2xy$$

$$T = \sqrt{(x^2 - y^2)^2 + (2xy)^2} = x^2 + y^2 = z^2$$

$$\operatorname{tg} \alpha_t = \frac{2xy}{x^2 - y^2}, \quad \operatorname{tg} \alpha_z = \frac{y}{x}, \quad \alpha_t = 2\alpha_z$$

$$\frac{\sin \alpha_t}{\cos \alpha_t} = \frac{\sin 2\alpha_z}{\cos 2\alpha_z} = \frac{2 \sin \alpha_z \cos \alpha_z}{\cos^2 \alpha_z - \sin^2 \alpha_z} = \frac{2xy}{x^2 - y^2}.$$

4.3. CONTINUITATEA FUNCȚIEI DE VARIABILĂ COMPLEXĂ

Funcția de variabilă complexă $f(z)$ este uniform continuă, în domeniul D, atunci cînd se poate stabili o cîtime pozitivă η, atît de mică, încît pentru $|z_2 - z_1| < \eta$ să existe inegalitatea $|t_2 - t_1| < \varepsilon$ în care cîtimea pozitivă ε poate fi fixată dinainte oricît de mică dorim.

Spre exemplu funcția

$$t = f(z) = z - a$$

este uniform continuă în planul complex t.

Se poate stabili o cîtime η atît de mică încît pentru $|z_2 - a| < \eta$ să existe inegalitatea $|t_2 - t_1| < \varepsilon$, cîtimea pozitivă ε putînd fi luată oricît de mică.

Punctul $z = a$ reprezintă un zero al funcției t. El este un punct izolat. Oricare alt punct afară de $z = a$ reprezintă un punct ordinar.

În schimb funcția de variabilă complexă în forma

$$t = f(z) = \frac{1}{z - a}$$

crește la infinit pentru $z = a$. De data aceasta pentru $|z - a| < \eta$ nu se mai poate realiza $|t_2 - t_1| < \varepsilon$ (vezi fig. A.29).

Punctul a reprezintă un punct singular al funcției t, iar celelalte puncte sînt puncte ordinare.

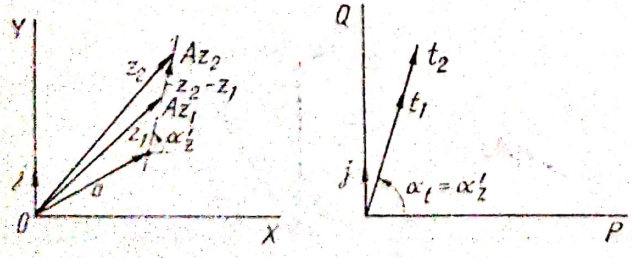


Fig. A.28. $t = z - a$ în planul complex.

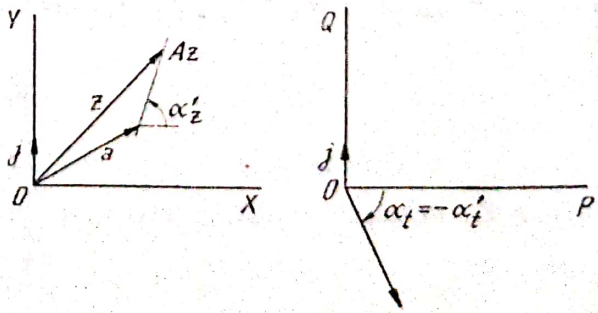


Fig. A.29. $t = \dfrac{1}{z - a}$ în planul complex.

Să considerăm funcția

$$t = e^{\frac{1}{z}} = 1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{2!}\frac{1}{z^2} + \frac{1}{3!}\frac{1}{z^3} + \frac{1}{4!}\cdot\frac{1}{z^4} + \cdots$$

$z = 0$ e considerat ca un punct singular esențial.

4.4. DERIVATA FUNCȚIEI DE VARIABILĂ COMPLEXĂ

Se constată că derivata

$$\frac{dt}{dz} = \frac{\frac{\partial t}{\partial x}dx + \frac{\partial t}{\partial y}dy}{dx + j\,dy} \tag{1}$$

devine independentă de direcția lui dz, numai atunci cînd este îndeplinită condiția

$$\frac{\partial t}{\partial x} = \frac{1}{j}\frac{\partial t}{\partial y} \tag{2}$$

deoarece în acest caz se obține

$$\frac{dt}{dz} = \frac{\frac{\partial t}{\partial x}(dx + j\,dy)}{dx + j\,dy} = \frac{\partial t}{dx} = \frac{1}{j}\frac{\partial t}{\partial y}. \tag{3}$$

Funcția de variabilă complexă posedă așadar într-un punct din planul complex z, o derivată bine determinată, independentă de direcția lui dz, atunci cînd sînt îndeplinite condițiile

$$\frac{dt}{dz} = \frac{\partial t}{\partial x} = -j\frac{\partial t}{\partial y}. \tag{4}$$

Din

$$\frac{\partial t}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial x} + j\frac{\partial Q}{\partial x}$$

$$\frac{\partial t}{\partial y} = \frac{\partial P}{\partial y} + j\frac{\partial Q}{\partial y}$$

se obține

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial Q}{\partial y}; \quad \frac{\partial P}{\partial y} = -\frac{\partial Q}{\partial x}. \tag{5}$$

Condițiile (4) sau (5) poartă denumirea de condițiile lui Cauchy-Riemann.

Cînd funcția de variabilă complexă satisface condițiile lui Cauchy-Riemann, funcția e denumită analitică sau monogenă.

Scanned with OKEN Scanner

Cînd o funcție de variabilă complexă în domeniul D este uniform continuă și analitică zicem că ea, în acel domeniu, e olomorfă.

Spre exemplu funcția

$$t = z^2 = x^2 - y^2 + \mathrm{j}\, 2xy$$

posedă

$$\frac{\partial t}{\partial x} = 2x + \mathrm{j}\, 2y\,; \quad -\mathrm{j}\,\frac{\partial t}{\partial y} = \mathrm{j}\, 2y + 2x$$

adică

$$\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}z} = \frac{\partial t}{\partial x} = -\mathrm{j}\,\frac{\partial t}{\partial y}$$

ceea ce înseamnă că ea este analitică.

Transformări conforme.

În figura A.30 se prezintă în fiecare din cele două planuri complexe, cîte două creșteri infinitezimale pentru z, respectiv t.

Se obține

$$\mathrm{d}z_1 = |\,\mathrm{d}z_1\,|\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\alpha'_{z_1}} \qquad \mathrm{d}z_2 = |\,\mathrm{d}z_2\,|\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\alpha'_{z_2}}$$

$$\mathrm{d}t_1 = |\,\mathrm{d}t_1\,|\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\alpha'_{t_1}} \qquad \mathrm{d}t_2 = |\,\mathrm{d}t_2\,|\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\alpha'_{t_2}}\,.$$

Pentru funcția analitică se obține

$$\frac{\mathrm{d}t_1}{\mathrm{d}z_1} = \frac{\mathrm{d}t_2}{\mathrm{d}z_2}$$

ceea ce înseamnă că avem

$$\frac{|\,\mathrm{d}t_1\,|}{|\,\mathrm{d}z_1\,|} = \frac{|\,\mathrm{d}t_2\,|}{|\,\mathrm{d}z_2\,|}, \quad \alpha'_{t_1} - \alpha'_{z_1} = \alpha'_{t_2} - \alpha'_{z_2}$$

sau

$$\alpha'_{t_2} - \alpha'_{t_1} = \alpha'_{z_2} - \alpha'_{z_1}\,.$$

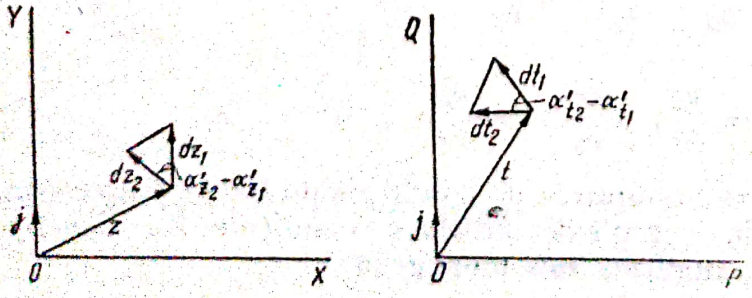


Fig. A.30. Transformări conforme.

Ca urmare, cele două triunghiuri infinitezimale din cele două planuri complexe sînt asemenea, ceea ce înseamnă că figurile obținute în cele două planuri complexe se găsesc într-o *transformare conformă.*

Exemplu de funcție care nu e analitică

În figura A.31 se reprezintă funcția $t = f(z) = x - \mathrm{j}\, y$ care nu e analitică.

Se obține

$$\frac{\partial t}{\partial x} = 1; \quad -\mathrm{j}\frac{\partial t}{\partial y} = -1$$

$$\mathrm{d}z = |\,\mathrm{d}z\,|\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\alpha'_z}; \quad \mathrm{d}t = |\,\mathrm{d}t\,|\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\alpha'_t}$$

astfel că

$$\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}z} = \frac{|\,\mathrm{d}t\,|}{|\,\mathrm{d}z\,|}\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}2\alpha'_t}.$$

Se vede că $\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}z}$ depinde de direcția lui dz. În mod analog se arată că funcția $f(z) = z^2 - x$ nu este analitică.

Caracteristici ale funcțiilor analitice.

Din relațiile Cauchy-Riemann

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial Q}{\partial y}; \quad \frac{\partial P}{\partial y} = -\frac{\partial Q}{\partial x}$$

rezultă

$$\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial y^2} = 0; \quad \frac{\partial^2 Q}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 Q}{\partial y^2} = 0. \tag{6}$$

Ecuațiile diferențiale (6) sînt denumite ecuațiile lui Laplace. Funcțiile P și Q sînt funcții armonice.

În planul real din figura A.32 există puncte pentru care funcțiile $P(xy)$ și $Q(xy)$ posedă valori constante.

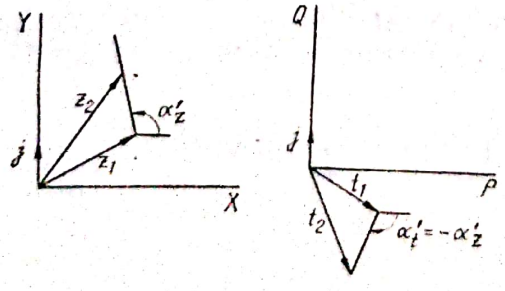


Fig. A.31. Funcția $t = x - jy$ în planul complex.

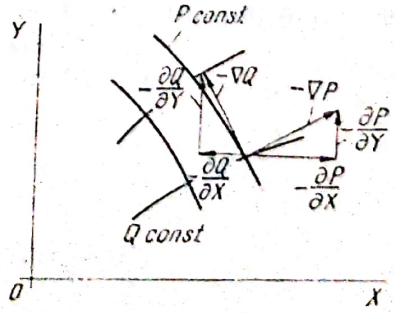


Fig. A.32. Caracteristici ale funcțiilor P și Q în planul real.

Liniile din plan care unesc astfel de puncte, se numesc linii echipotențiale și linii de cîmp.

Liniile $P = \text{const.}$ și $Q = \text{const.}$ sînt ortogonale între ele deoarece gradientul acestor funcții scalare, reprezintă vectori ortogonali.

Din figura A.32 rezultă

$$-\frac{\partial P}{\partial x} = -\frac{\partial Q}{\partial y}; \qquad -\frac{\partial P}{\partial y} = -\left(-\frac{\partial Q}{\partial x}\right)$$

ceea ce ne arată că vectorii $-\Delta P$ și $-\Delta Q$ sînt ortogonali.

O altă caracteristică a funcțiilor P și Q constă în faptul că una din ele, poate fi determinată în funcție de cealaltă.

Spre exemplu din

$$dQ = \frac{\partial Q}{\partial x}\,dx + \frac{\partial Q}{\partial y}\,dy$$

se obține

$$Q = -\int \frac{\partial P}{\partial y}\,dx + \int \frac{\partial P}{\partial x}\,dy + Q_0.$$

4.5. TEOREMA LUI CAUCHY

În planul complex din figura A.33 s-a luat o linie închisă C_1.

Prin fixarea sensului de parcurgere al liniei, se consideră domeniul D cuprins de acea linie închisă, situat de partea stîngă a liniei în sensul indicat.

Cînd linia ar fi parcursă în sens opus, domeniul D care e limitat de linie, se găsește în exteriorul suprafeței cu linia C_1 ca linie periferică.

Se demonstrează că pentru o funcție $f(z)$ olomorfă în domeniul D se obține

$$\int_{C_1} f(z)\,dz = 0. \tag{1}$$

Aceasta formează teorema lui Cauchy și demonstrația ei se sprijină pe formula lui Stockes.

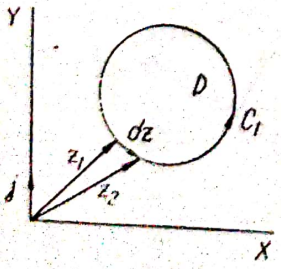


Fig. A.33. Planul complex z.

Pentru suprafața D limitată de linia închisă C_1 se obține următoarea transformare de integrală

$$\int_{C_1} dl\,P = \int_D [d_\perp \nabla]\,P \tag{2}$$

respectiv

$$\int_{C_1} dl\,Q = \int_D [d_\perp \nabla]\,Q. \tag{3}$$

Scanned with OKEN Scanner

Se consideră figura A.33 ca și cum s-ar găsi într-un plan real.
Se introduc elementele $d\ell$ și d_Δ în formele

$$d\ell = dx\,i + dy\,j$$

$$d_\Delta = dx\,dy\,k$$

astfel că

$$[d_\Delta \nabla] = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & 0 & dx\,dy \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \end{vmatrix} = -\,i\,dx\,dy\,\frac{\partial}{\partial y} + j\,dx\,dy\,\frac{\partial}{\partial x}.$$

În planul complex avem

$$\int_{C_1} f(z)\,dz = \int_{C_1} \{P + jQ\}\{dx + jdy\} = \int_{C_1} (P dx - Q\,dy) + j\int_{C_1} (P\,dy + Q dx).$$

În planul real se obține

$$\int_{C_1} d\ell\,P = i\int_{C_1} dx\,P + j\int_{C_1} dy\,P = -\int_D i\,dx\,dy\,\frac{\partial P}{\partial y} + \int_D j\,dx\,dy\,\frac{\partial P}{\partial x}$$

$$\int_{C_1} d\ell Q = i\int_{C_1} dx Q + j\int_{C_1} dy\,Q = -\int_D i\,dx\,dy\,\frac{\partial Q}{\partial y} + \int_D j\,dx dy\,\frac{\partial Q}{\partial x}$$

și ținîndu-se seama de condițiile Cauchy-Riemann, rezultă

$$\int_{C_1} dx P - \int_{C_1} dy Q = -\int dx\,dy\,\frac{\partial P}{\partial y} - \int dx\,dy\,\frac{\partial Q}{\partial x} = 0$$

$$\int_{C_1} dy P + \int_{C_1} dx Q = \int dx\,dy\,\frac{\partial P}{\partial x} - \int dx\,dy\,\frac{\partial Q}{\partial y} = 0$$

ceea ce ne arată că

$$\int_{C_1} f(z)\,dz = 0$$

pentru funcția olomorfă.

Demonstrația se sprijină pe condiția ca derivatele funcției P și Q de-a lungul liniei C_1 sînt considerate continue.

Aplicarea teoremei lui Cauchy

Se consideră cazul cînd în domeniul D apare un pol a.
Fie

$$t = f(z) = \frac{1}{(z-a)^k} \tag{4}$$

în care k e un număr întreg pozitiv.

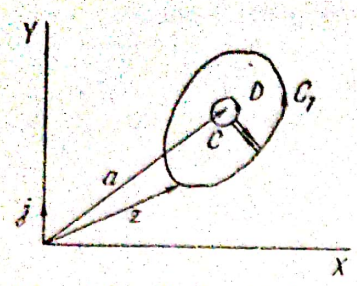


Fig. A.34. Aplicarea teoremei lui Cauchy.

Punctul a în planul complex z apare ca un punct singular deoarece t devine infinit.

În figura A.34 se constată că funcţia olomorfă t posedă un punct singular $z = a$ care reprezintă un pol de ordin de multiplicitate k.

În acest caz se construieşte un cerc cu o rază foarte mică cu centrul în vîrful lui a.

Domeniul D în care funcţia t e olomorfă se găseşte de partea stîngă a liniilor C_1 şi C.

Pentru cele două segmente de dreaptă din figura A.34 care sînt paralele şi parcurse în sens opus, practic suprapuse, integrala

$$\int f(z)\mathrm{d}z = 0.$$

Ca urmare în baza teoremei lui Cauchy se obţine

$$\int_{C_1} f(z)\,\mathrm{d}z - \int_C f(z)\,\mathrm{d}z = 0. \tag{5}$$

Integrala care corespunde liniei C, se consideră efectuată pentru sens opus ca a liniei C_1, domeniul găsindu-se de partea stîngă a liniei parcurse.

În cazul domeniului D în figura A.34 cuprins între liniile închise C_1 şi C, se efectuează integrala pentru linia C parcursă în sens opus faţă de C_1, deci integrala e afectată cu semnul minus.

Din (5) se obţine

$$\int_{C_1} f(z)\,\mathrm{d}z = \int_C f(z)\,\mathrm{d}z \tag{6}$$

deoarece integralele sînt efectuate în sensul pozitiv.

Să considerăm mai întîi funcţia olomorfă în forma

$$t = f(z) = (z - a)^k$$

în care k reprezintă un număr întreg pozitiv sau negativ.

Condiţiile lui Cauchy-Riemann sînt îndeplinite.

Se obţine

$$\frac{\partial t}{\mathrm{d}x} = \frac{\partial t}{\partial z}\,\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} = k(z-a)^{k-1}$$

$$-\mathrm{j}\frac{\partial t}{\mathrm{d}y} = -\mathrm{j}\frac{\partial t}{\mathrm{d}z}\,\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}y} = k(z-a)^{k-1}\,\mathrm{j}(-\mathrm{j}) = k(z-a)^{k-1}$$

ca urmare rezultă

$$\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}z} = \frac{\partial t}{\partial x} = -\mathrm{j}\frac{\partial t}{\partial y}$$

ceea ce înseamnă că t este o funcţie analitică.

Scanned with OKEN Scanner

În figura A.35 se consideră mai întîi cazul $f(z) = (z-a)^k$ cu k pozitiv ($k \neq -1$).

Din figură se obține

$$\int_C (z-a)^k \, dz = \int_C r^k \, e^{jk\alpha'_z} \, r \, d\alpha'_z \, e^{j\alpha'_z} \, j =$$

$$= j \, r^{k+1} \frac{1}{j(k+1)} (e^{j(k+1)\alpha'_z})_{2\pi} =$$

$$= j \, r^{k+1} \frac{1}{j(k+1)} (1-1) = 0 \qquad (7)$$

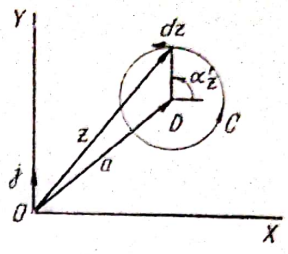


Fig. A.35. $\int_C (z-a)^k \, dz$.

în care

$$z - a = r \, e^{j\alpha'_z}; \quad dz = r \, j e^{j\alpha'_z} \, d\alpha'_z$$

r = constant, α'_z variabilă.

a este un punct izolat, un zero de ordinul de multiplicitate k.

Considerăm cazul $k = -1$

Funcția de variabilă complexă devine

$$t = f(z) = \frac{1}{z-a}.$$

Integrala $\int_C f(z) \, dz$ ia forma

$$\int_C f(z) \, dz = \int_C \frac{dz}{z-a} = \int_0^{2\pi} j d\alpha'_z = 2\pi j$$

astfel că

$$\frac{1}{2\pi j} \int_C f(z) \, dz = 1. \qquad (8)$$

Linia închisă a fost parcursă așa fel ca de partea stîngă a ei să rămînă polul a.

Polul a se găsește în domeniul D.

Dacă în figura A.36 se parcurge linia cercului în sens negativ, integrala de mai sus devine

$$-\int_C f(z) \, dz = -\int_C \frac{dz}{z-a} = \int_0^{-2\pi} j \, d\alpha'_z = -2\pi j \qquad (9)$$

În felul acesta se constată că cele două integrale de mai sus, dacă posedă o valoare diferită de zero, una este pozitivă și cealaltă negativă, datorită sensului pozitiv fixat pentru reprezentarea arcului α'_z.

De asemenea în cîmpul magnetic din figura A.37 se obține pentru integrala de linie

$$\oint_{C_1, C_2} (dl \, \mathcal{H}) = 0$$

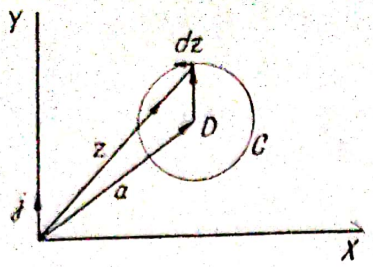


Fig. A.36. Cercul parcurs în sens opus.

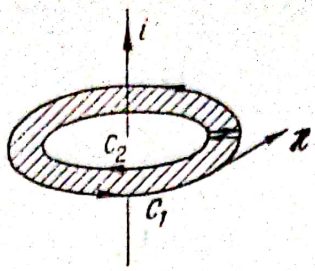


Fig. A.37. Cîmpul magnetic

sensul pozitiv, fiind luat după regula burghiului. i reprezintă curentul electric și $\mathcal{H}$ intensitatea cîmpului magnetic.

Se obține

$$\int_{C_1} (\mathrm{d}l\,\mathcal{H}) = 4\pi i; \quad \int_{C_2} (\mathrm{d}l\,\mathcal{H}) = -4\pi i$$

astfel că

$$\int_{C_1} (\mathrm{d}l\,\mathcal{H}) + \int_{C_2} (\mathrm{d}l\,\mathcal{H}) = \int_{C_1, C_2} (\mathrm{d}l\,\mathcal{H}) = 0.$$

Curentul i din cîmpul magnetic corespunde polului în planul complex, cînd vîrful lui a reprezintă un punct singular.

4.6. FORMULA LUI CAUCHY

Admitem că $f(z)$ este olomorfă în domeniul D limitat de curba C_1. Introducîndu-se mărimea complexă u pentru punctele de pe curba C_1 se cere să se demonstreze că

$$\frac{1}{2\pi \mathrm{j}} \int_{C_1} \frac{f(u)}{u-z}\,\mathrm{d}u = f(z) \tag{1}$$

care relație poartă denumirea de formula lui Cauchy (v. fig. A.38).

Luîndu-se un cerc C cu centrul în vîrful lui z și parcurgîndu-l în sens opus ca linia C_1, se creează pentru ambele linii închise domeniul D cuprins între C_1 și C.

Pentru acest domeniu conform teoremei lui Cauchy se obține

$$\int_{C_1} \frac{f(u)}{u-z}\,\mathrm{d}u - \int_{C} \frac{f(u)}{u-z}\,\mathrm{d}u = 0 \tag{2}$$

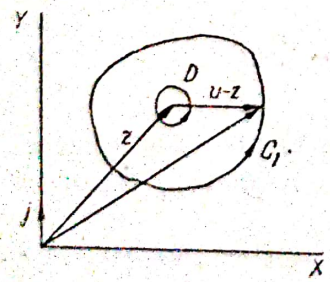


Fig. A.38. Formula lui Cauchy.

integrala a doua e negativă pentru că linia C e parcursă în sens opus ca la linia C_1.

Ca urmare

$$\int_{C_1} \frac{f(u)}{u-z}\,du = \int_{C} \frac{f(z)}{u-z}\,du. \tag{3}$$

Dacă $u - z$ este mic se poate exprima $f(u)$ în funcție de $f(z)$ în forma

$$f(u) = f(z) + \frac{u-z}{1!} f'(z). \tag{4}$$

Ca urmare se formează

$$\int_{C} \frac{f(u)}{u-z}\,du = f(z)\int_{C} \frac{du}{u-z} + f'(z)\int_{C} du \tag{5}$$

deoarece avem

$$\frac{f(u)}{u-z} = \frac{f(u)}{u-z} + f'(z).$$

Se ține seama că

$$u - z = r\,e^{j\alpha'_u}\,; \quad du = r\,je^{j\alpha'_u}\,d\alpha'_u$$

astfel că

$$\int_{C} \frac{f(u)}{u-z} = -2\pi j)\,; \quad \int_{C} du = 0.$$

Ca urmare din (5) se obține

$$\int_{C} \frac{f(u)}{u-z}\,du = f(z)(+2\pi j)$$

iar din (3) rezultă

$$\frac{1}{2\pi j}\int_{C_1} \frac{f(u)}{u-z}\,du = -\frac{1}{2\pi j}\int_{C} \frac{f(u)}{u-z}\,du = f(z). \tag{6}$$

Exprimarea derivatelor funcțiilor olomorfe în forma integrală

În figura A.39 se prezintă z și $z + dz$ și se ia linia închisă C_1 exprimată prin u.

Se formează

$$\Delta f(z) = f(z + \Delta z) - f(z). \tag{7}$$

În baza formulei lui Cauchy se formează

$$\Delta f(z) = f(z + \Delta z) - f(z) =$$

$$= \frac{1}{2\pi j}\int_{C_1} \frac{f(u)}{u - (z + \Delta z)}\,du - \frac{1}{2\pi j}\int_{C_1} \frac{f(u)}{u-z}\,du \tag{8}$$

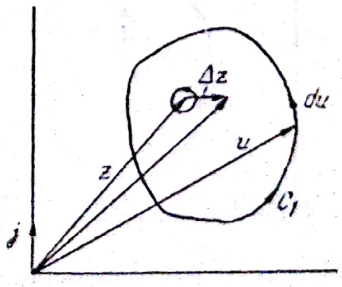


Fig. A.39. Exprimarea derivatei $f'(z)$.

în care

$$\frac{1}{(u-(z+\Delta z))}-\frac{1}{u-z}=\frac{\Delta z}{(u-(z+\Delta z))(u-z)} \tag{9}$$

ca urmare

$$\Delta f(z)=\frac{1}{2\pi j}\Delta z\int_{C_1}\frac{f(u)}{(u-(z+\Delta z))(u-z)}\,du.$$

$$\lim_{\Delta z\to 0}\frac{\Delta f(z)}{\Delta z}=f'(z)=\frac{1}{2\pi j}\int_{C_1}\frac{f(u)}{(u-z)^2}\,du. \tag{10}$$

Relaţia (10) ne arată că derivata $f'(z)$ se exprimă în forma integrală pentru o linie C_1 luată în sens pozitiv, admiţînd că în domeniul D cuprins de C_1, $f(z)$ este olomorfă.

Pentru exprimarea derivatei de ordinul doi, $f''(z)$ în forma integrală se formează

$$\Delta f(z)=f(z+\Delta z)-f(z)$$

$$\Delta^2 f(z)=\Delta f(z+\Delta z)-\Delta f(z)=f(z+2\Delta z)-2f(z+\Delta z)+f(z)$$

în care

$$\Delta f(z+\Delta z)=f(z+2\Delta z)-f(z+\Delta z).$$

Din aplicarea formulei lui Cauchy se obţine

$$\Delta^2 f(z)=\frac{1}{2\pi j}\int_{C_1}f(u)\,du\left\{\frac{1}{u-(z+2\Delta z)}-\frac{2}{u-(z+\Delta z)}+\frac{1}{u-z}\right\}$$

astfel că

$$\Delta^2 f(z)=\frac{1}{2\pi j}\int_{C_1}f(u)\,du\,\frac{2(\Delta z)^2}{(u-(z+2\Delta z))(u-(z+\Delta z))(u-z)}$$

$$\lim_{\Delta z\to 0}\frac{\Delta^2 f(z)}{(\Delta z)^2}=f''(z)=\frac{1}{2\pi j}\cdot 2!\int_{C_1}\frac{f(u)\,du}{(u-z)^3}. \tag{11}$$

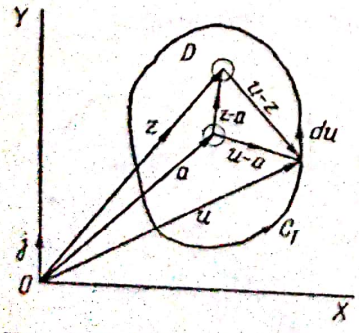


Fig. A.40. Dezvoltarea funcţiei olomorfe $f(z)$ în serie Taylor.

În mod abalog pentru derivata de ordinul n se obţine

$$f^n(z)=\frac{n!}{2\pi j}\int_{C_1}\frac{f(u)}{(u-z)^{n+1}}\,du. \tag{12}$$

Dezvoltarea funcţiei olomorfe $f(z)$ în serie Taylor.

În figura A.40 se introduc pe lîngă z şi un punct fix a.

Admitem că în domeniul D funcţia $f(z)$ nu are nici un punct singular.

În schimb funcția $\frac{f(u)}{u-z}$ are pe z ca un pol. În acest caz formula lui Cauchy ia forma

$$\frac{1}{2\pi j}\int_{C_1}\frac{f(u)}{u-z}\,du = f(z).$$

Prin introducerea în domeniul D al punctului a se formează

$$u-z=(u-a)-(z-a)=(u-a)\left(1-\frac{z-a}{u-a}\right)$$

astfel că

$$\frac{1}{u-z}=\frac{1}{u-a}\left(1-\frac{z-a}{u-a}\right)^{-1}=\frac{1}{u-a}\left(1+\frac{z-a}{u-a}+\right.$$

$$\left.+\frac{(z-a)^2}{(u-a)^2}+\ldots+\frac{(z-a)^k}{(u-a)^k}+\ldots.\right).$$

Ca urmare se obține

$$\frac{1}{2\pi j}\int_{C_1}\frac{f(u)}{u-z}\,du=f(z)=\frac{1}{2\pi j}\int_{C_1}f(u)\left(\frac{1}{u-a}+\frac{z-a}{(u-a)^2}+\frac{(z-a)^2}{(u-a)^3}+\ldots\right)du$$

de unde rezultă

$$f(z)=f(a)+\frac{z-a}{1!}f'(a)+\frac{(z-a)^2}{2!}f''(a)+\ldots. \qquad (13)$$

Relația (13) reprezintă seria Taylor.

Înmulțind în relația (13) termenii cu $\frac{1}{z-a}\,dz$ și formîndu-se o integrală pentru o linie închisă C_1 care trece prin vîrful lui z în sens pozitiv, astfel ca vîrful lui a să se găsească în acea linie închisă, se obține

$$\frac{1}{2\pi j}\int_{C_1}\frac{f(z)}{z-a}\,dz=f(a)\,\frac{1}{2\pi j}\int_{C_1}\frac{dz}{z-a}=f(a)$$

deoarece avem

$$f'(a)\,\frac{1}{2\pi j}\int_{C_1}dz=0;\quad f''(a)\int_{C_1}(z-a)\,dz=0\ldots$$

De asemenea înmulțind termenii seriei cu $\frac{1}{(z-a)^2}\,dz$ și formîndu-se integrala rezultă

$$\frac{1}{2\pi j}\int_{C_1}\frac{f(z)}{(z-a)^2}\,dz=f'(a)\,\frac{1}{2\pi j}\int_{C_1}\frac{1}{z-a}\,dz=f'(a)$$

deoarece avem

$$\frac{1}{2\pi j} f(a) \int_{C_1} \frac{1}{(z-a)^2}\, dz = 0; \quad \frac{1}{2\pi j} f''(a) \int_{C_1} dz = 0;$$

$$\frac{1}{2\pi j} f'''(a) \int_{C_1} (z-a)\, dz = 0...$$

În fine înmulțind termenii seriei cu $\frac{1}{(z-a)^3} dz$ rezultă

$$\frac{1}{2\pi j} \int_{C_1} \frac{f(z)}{(z-a)^3} dz = f''(a) \frac{1}{2\pi j} \int_{C_1} \frac{1}{(z-a)} dz = f''(a)$$

în care

$$\frac{1}{2\pi j} f(a) \int_{C_1} \frac{1}{(z-a)^3} dz = 0; \quad \frac{1}{2\pi j} f'(a) \int_{C_1} \frac{1}{(z-a)^2} dz = 0...$$

ceea ce verifică formula lui Cauchy și reprezentarea derivatelor funcției olomorfe în forme integrale.

Dezvoltarea funcției olomorfe $f(z)$ în serie Laurent

În cazul cînd punctul a în figura A.41 devine un pol al funcției $f(z)$ atunci domeniul funcției $\frac{f(u)}{u-z}$ e cuprins între linia C_1 luată în sens pozitiv și liniile închise (cercuri) C și C' luate în sens negativ. Conform teoremei lui Cauchy se obține

$$\frac{1}{2\pi j} \int_{C_1} \frac{f(u)}{u-z} du - \frac{1}{2\pi j} \int_{C} \frac{f(u)}{u-z} du - \frac{1}{2\pi j} \int_{C'} \frac{f(u)}{u-z} du = 0 \qquad (14)$$

în care

$$\frac{1}{2\pi j} \int_{C} \frac{f(u)}{u-z} du = f(z) \qquad (15)$$

conform formulei lui Cauchy.

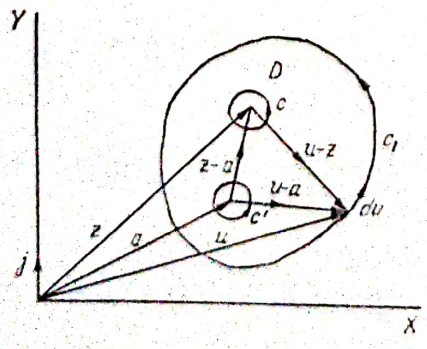


Fig. A.41. Dezvoltarea funcției $f(z)$ în serie Laurent.

Ca urmare rezultă:

$$\frac{1}{2\pi j}\int_{C_1}\frac{f(u)}{u-z}\,du-\frac{1}{2\pi j}\int_{C'}\frac{f(u)}{u-z}\,du=f(z). \tag{16}$$

Efectuind așa dar integrala pentru C' în sensul pozitiv pentru α'_a, ținîndu-se seama că $(u-z)$ posedă explicit semnul minus $\frac{1}{2\pi j}\int_{C_1}\frac{f(u)}{-(u-z)}\,du$ se ține seama de următoarele:

Cînd s-a format integrala

$$\frac{1}{2\pi j}\int_{C_1}\frac{f(u)}{u-z}\,du$$

introducindu-se

$$\frac{1}{u-z}=\frac{1}{u-a}+\frac{z-a}{(u-a)^2}+\frac{(z-a)^2}{(u-a)^3}+\dots$$

s-a obținut

$$\frac{1}{2\pi j}\int_{C_1}\frac{f(u)}{u-z}\,du=\frac{1}{2\pi j}\int_{C_1}f(u)\left(\frac{1}{u-a}+\frac{z-a}{(u-a)^2}+\frac{(z-a)^2}{(u-a)^3}+\dots\right)du=$$

$$=f(a)+\frac{(z-a)}{1!}f'(a)+\frac{(z-a)^2}{1\cdot 2}f''(a)+\dots=$$

$$=a_0+(z-a)\,a_1+(z-a)^2\,a_2+\dots. \tag{17}$$

De data aceasta se introduce

$$-(u-z)=(z-a)-(u-a)=(z-a)\left(1-\frac{u-a}{z-a}\right)$$

astfel că

$$\frac{1}{-(u-z)}=\frac{1}{z-a}\left(1+\frac{u-a}{z-a}+\frac{(u-a)^2}{(z-a)^2}+\dots+\frac{(u-a)^k}{(z-a)^k}+\dots\right).$$

Ca urmare integrala ia forma

$$\frac{1}{2\pi j}\int_{C'}\frac{f(u)}{-(u-z)}\,du=\frac{1}{2\pi j}\int_{C'}f(u)\left(\frac{1}{z-a}+\frac{u-a}{(z-a)^2}+\frac{(u-a)^2}{(z-a)^3}+\dots\right)du$$

ceea ce ne conduce la

$$\frac{1}{2\pi j}\int_{C'}\frac{f(u)}{-(u-z)}\,du=\frac{1}{z-a}\,a_{-1}+\frac{1}{(z-a)^2}\,a_{-2}+\dots+$$

$$+\frac{1}{(z-a)^k}\,a_{-k}+\dots. \tag{18}$$

Ţinîndu-se seama şi de relaţia (17) care împreună cu (18) formează pe (16) se obţine

$$f(z) = \frac{a_{-k}}{(z-a)^k} + \ldots + \frac{a_{-1}}{(z-a)} + a_0 + (z-a)\, a_1 + \ldots +$$

$$+ (z-a)^k a_k + \ldots = \sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} a_k (z-a)^k. \qquad (19)$$

Seria (19) reprezintă seria Laurent.

Suma $\frac{a_{-k}}{(z-a)^k} + \ldots + \frac{a_{-1}}{z-a}$ formează partea prinicipală a seriei. a devine un pol de ordinul k dacă coeficientul a_{-k} e diferit de zero.

Coeficientul a_{-1} poartă denumirea de reziduul funcţiei, deoarece ne dă

$$\frac{1}{2\pi j} \int_C \frac{a_{-1}}{z-a}\, dz = a_{-1}.$$

Cînd a este un zero de ordinul k al funcţiei $f(z)$ înseamnă că avem

$$f(a) = 0; \quad f'(a) = 0; \quad \ldots f^{k-1}(a) = 0.$$

O funcţie olomorfă este meromorfă cînd nu posedă alte singularităţi decît poli.

Dacă a este un zero de ordinul k al funcţiei $f(z)$ atunci a este un pol de acelaşi ordin al funcţiei $\frac{1}{f(z)}$.

Să luăm în condiderare funcţia olomorfă $f(z) = \frac{e^{jz}}{z}$.

În acest caz se obţine

$$\frac{e^{jz}}{z} = \frac{1}{z} + \frac{j}{1!} + \frac{j^2}{2!} z + \frac{j^3}{3!} z^2 + \ldots \qquad (20)$$

În (20) originea sistemului este un pol de ordinul 1 iar reziduul funcţiei $a_{-1} = 1$.

Seria (20) reprezintă o serie Laurent cu un singur termen principal.

Mai poate să existe puncte singulare esenţiale, atunci cînd partea principală a seriei Laurent conţine un număr infinit de termeni.

Spre exemplu

$$e^{\frac{1}{z}} = 1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{2!z^2} + \ldots + \frac{1}{k!z^k} + \ldots$$

reprezintă o serie Laurent cu partea principală formată dintr-un număr infinit de termeni.

Punctul $z = 0$ reprezintă un punct singular esenţial.

Scanned with OKEN Scanner

4.7. APLICAȚII

Problema I.

Să se efectueze integrala $\int \frac{e^{jz}}{z}\,dz = 0$, pe linia închisă din figura A.42.

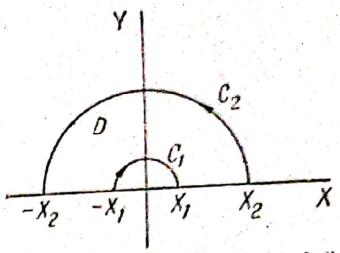


Fig. A.42. Linia periferică a domeniului D.

În domeniul D din figură funcția de sub semnul integralei este olomorfă.

Se formează

$$\int_{-x_2}^{-x_1} \frac{e^{jx}}{x}\,dx + \int_{x_1}^{x_2} \frac{e^{jx}}{x}\,dx + \int_{C_1} \frac{e^{jz}}{z}\,dz + \int_{C_2} \frac{e^{jz}}{z}\,dz = 0.$$

Se ține seama de faptul că pe linia C_1 integrala e efectuată în sensul lui α negativ, iar pe linia C_2 în sensul lui α pozitiv.

Avem

$$\int_{-x_2}^{-x_1} \frac{e^{jx}}{x}\,dx = -\int_{-x_1}^{-x_2} \frac{e^{jx}}{x}\,dx = \int_{x_1}^{x_2} \frac{e^{-jx}}{-x}\,dx$$

Ca urmare se obține

$$\int_{-x_2}^{-x_1} \frac{e^{jx}}{x}\,dx + \int_{x_1}^{x_2} \frac{e^{jx}}{x}\,dx = \int_{x_2}^{x_2} \frac{e^{+jx} - e^{-jx}}{x}\,dx = \int_{x_1}^{x_2} \frac{2j \sin x}{x}\,dx = 2j \int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx$$

când $x_1 \to 0$ și $x_2 \to \infty$.

Integrala de-a lungul semicercului C_1 efectuată în sensul indicat în figura A.42 obține valoarea

$$\int_{C_1} \frac{e^{jz}}{z}\,dz = \int_{C_1} \frac{1}{re^{j\alpha_z}}\, rje^{j\alpha_z}\,d\alpha_z = -j\pi$$

în care s-a admis cazul când raza cercului tinde către zero.

Avem

$$z = r\cos\alpha_z + j\,r\sin\alpha_z;\quad jz = j\,r\cos\alpha_z - r\sin\alpha_z;$$

$$e^{jz} = e^{-r\sin\alpha_z}\, e^{j\,r\cos\alpha_z}$$

Se constată că dacă $r \to \infty$ atunci $e^{jz} \to 0$ deoarece $r\cos\alpha_z$ reprezintă un arc.

Ca urmare

$$\int_{C_2} \frac{e^{jz}}{z}\,dz = 0 \text{ pentru } r \to \infty.$$

Ca urmare pentru linia închisă din fig. A.42 integrala devine

$$2j \int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx - j\pi = 0$$

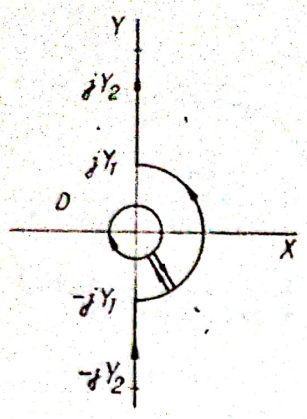


Fig. A.43. Linia periferică a domeniului D.

de unde se obține

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx = \frac{\pi}{2}.$$

Integrala de mai sus e cunoscută sub denumirea de integrala lui Poisson.

Problema II.

Axa imaginară se consideră ca o linie care se închide la infinit, cu micul semicerc din origine, ca în figura A.43.

Se cere să se efectueze integrala $\int_{-j\infty}^{+j\infty} \frac{e^{pt}}{p}\,dp$ pentru cazurile cînd $t > 0$ și $t < 0$ în care: $p = x + j\,y$.

Integrala poartă denumirea de integrala Fourier.

Se formează mai întîi suma integralelor

$$\int_{-jy_2}^{-jy_1} \frac{e^{jyt}}{y}\,dy + \int_{jy_1}^{jy_2} \frac{e^{jyt}}{y}\,dy + \int_C \frac{e^{pt}}{p}\,dp$$

în care

$$\int_{-jy_2}^{-jy_1} \frac{e^{jyt}}{y}\,dy = -\int_{-jy_1}^{-jy_2} \frac{e^{jyt}}{y}\,dy = \int_{jy_1}^{jy_2} \frac{e^{-jyt}}{-y}\,dy$$

astfel că

$$\int_{-jy_2}^{-jy_1} \frac{e^{jyt}}{y}\,dy + \int_{jy_1}^{jy_2} \frac{e^{jyt}}{y}\,dy = \int_{jy_1}^{jy_2} \frac{e^{jyt} - e^{-jyt}}{y}\,dy =$$

$$= \int_{jy_1}^{jy_2} \frac{2j \sin yt}{y}\,dy = \int_{j\psi_1}^{j\psi_2} 2j \frac{\sin \psi}{\psi}\,d\psi$$

în care

$$yt = \psi; \quad dy = \frac{d\psi}{t}.$$

Ca urmare

$$\int_{j0}^{j\infty} 2j \frac{\sin \psi}{\psi}\,d\psi = j\pi.$$

La efectuarea integralei $\int_C \frac{e^{pt}}{p}\,dp$ pentru semicerc, cînd raza cercului tinde către zero, se obține.

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \frac{e^{pt}}{p}\,dp = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \frac{1}{re^{j\alpha_p}}\, r\,je^{j\alpha_p}\,d\alpha_p = j\left(\frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right)\right) = j\pi.$$

Ca urmare pentru $t > 0$ se obține

$$\int_{-j\infty}^{+j\infty} \frac{e^{\rho t}}{\rho} d\rho = j\pi + j\pi = j\,2\pi$$

de unde se deduce integrala Fourier în forma

$$\frac{1}{2\pi j}\int_{-j\infty}^{+j\infty} \frac{e^{\rho t}}{\rho} d\rho = 1 \qquad \text{pentru } t > 0.$$

Pentru cazul $t < 0$ se obține

$$\int_{-jy_2}^{-jy_1} \frac{e^{-jyt}}{y} dy + \int_{jy_1}^{jy_2} \frac{e^{-jyt}}{y} dy = \int_{jy_1}^{jy_2} \frac{e^{jyt}}{-y} dy + \int_{jy_1}^{jy_2} \frac{e^{-jyt}}{y} dy =$$

$$= -\int_{jy_1}^{jy_2} \frac{e^{jyt} - e^{-jyt}}{y} dy = -\int_{jy_1}^{jy_2} 2j \frac{\sin yt}{y} dy$$

astfel că

$$-2j\int_0^{\infty} \frac{\sin yt}{y} dy = -j\pi.$$

Integrala de-a lungul semicercului C posedă aceeași valoare, deoarece pentru cazul cînd $\rho \to 0$, se obține din nou

$$\int_C \frac{d\rho}{\rho} = j\pi.$$

Ca urmare pentru $t < 0$ integrala Fourier devine

$$\int_{-j\infty}^{+j\infty} \frac{e^{\rho t}}{\rho} d\rho = 0.$$

Integrala s-a efectuat pentru o linie închisă prin intermediul arcului de cerc C_2 de la infinit ca în cazul integralei Poisson.
Integrala de-a lungul arcului de cerc C_2 este nulă.

Problema III.

Cele trei forme ale integralei Fourier.
Se ia ca bază seria Fourier în forma

$$f(t) = \frac{b_0}{2} + \sum_{\nu=1}^{\infty} (a_\nu \sin \nu\omega t + b_\nu \cos \nu\omega t)$$

în care

$$\frac{b_0}{2} T = \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} f(t)\, dt; \quad a_\nu \frac{T}{2} = \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} f(t) \sin \nu\omega t\, dt; \quad b_\nu \frac{T}{2} = \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} f(t) \cos \nu\omega t\, dt.$$

Scanned with OKEN Scanner

Pentru ca integralele de mai sus să poată fi introduse în locul lui a_ν respectiv b_ν din seria Fourier, se înlocuieşte în integrale variabila t prin τ.

Seria Fourier obţine forma

$$f(t) = \frac{1}{\frac{T}{2}}\left[\frac{1}{2}\int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} f(\tau)\,\mathrm{d}\tau + \sum_{\nu=1}^{\infty}\int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} f(\tau)\cos\nu\omega\,(\tau - t)\,\mathrm{d}\tau\right]. \tag{21}$$

În cazul cînd funcţia $f(t)$ nu este periodică, se consideră durata unei perioade infinit de mare $T = \infty$.

Pe de altă parte, din relaţia $\nu\omega = \nu\,\frac{2\pi}{T} = \lambda\nu$ se obţine pentru $\nu = 1$: $\frac{\pi}{\frac{T}{2}} = \lambda_1$.

În cazul funcţiei neperiodice cu $T \to \infty$ rezultă $\frac{\pi}{\frac{T}{2}} = \mathrm{d}\lambda$.

Suma se transformă în integrală. Primul termen din sumă cu factorul $\frac{1}{\frac{T}{2}}$ devine egal cu zero.

Deoarece acest termen dispare, se ia în considerare ca limite pentru integrală, variaţia lui λ de la zero la infinit.

Ca urmare pentru $T \to \infty$ seria Fourier devine

$$f(t) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}\mathrm{d}\lambda\int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)\cos\lambda\,(\tau - t)\,\mathrm{d}\tau \tag{22}$$

cunoscută sub denumirea de integrala Fourier.

Se presupune că funcţia $f(t)$ satisface condiţiile lui Dirichlet, este continuă în orice interval finit şi este integrabilă în intervalul de la $-\infty$ la $+\infty$.

Exprimarea seriei Fourier sub formă complexă.

Se introduce

$$a_\nu \sin\nu\omega t + b_\nu\cos\nu\omega t = \mathcal{D}_\nu\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\nu\omega t} + \mathcal{D}_{-\nu}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\nu\omega t} \tag{23}$$

în care

$$\mathcal{D}_\nu = \frac{1}{2}\,(b_\nu - \mathrm{j}a_\nu);\quad \mathcal{D}_{-\nu} = \frac{1}{2}\,(b_\nu + \mathrm{j}a_\nu). \tag{24}$$

Ca urmare seria Fourier în forma complexă devine

$$f(t) = \sum_{\nu=-\infty}^{\nu=+\infty}\mathcal{D}_\nu\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\nu\omega t} \tag{25}$$

Scanned with OKEN Scanner

în care

$$\mathcal{D}_\nu = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} f(t)\, e^{-j\nu\omega t} = \frac{1}{2}(b_\nu - j\, a_\nu). \tag{26}$$

Introducîndu-se integrala pentru $\mathcal{D}_\nu$ în expresia seriei Fourier se înlocuiește în integrală variabila t prin τ.

Se obține

$$f(t) = \sum_{\nu=-\infty}^{\nu=+\infty} \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} f(\tau)\, e^{-j\nu\omega\tau}\, e^{j\nu\omega t}$$

sau

$$f(t) = \sum_{\nu=-\infty}^{\nu=+\infty} \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} f(\tau)\, e^{j\nu\omega(t-\tau)}\, d\tau. \tag{27}$$

Prin reprezentarea lui $f(t)$ în formă compiexă, apar două posibilități de a exprima integrala Fourier, pentru cazul cînd funcția $f(t)$ nu e periodică.

Ținîndu-se seama de

$$\frac{1}{T} = \frac{d\lambda}{2\pi} \quad \text{pentru } T \to \infty$$

seria Fourier devine

$$f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} d\lambda \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)\, e^{j\lambda(t-\tau)}\, d\tau \tag{28}$$

ea exprimă integrala Fourier în formă complexă.

Tot din seria Fourier în forma complexă, se mai obține o nouă formă a integralei Fourier.

Fie

$$j\lambda = \rho; \qquad \frac{d\lambda}{2\pi}\,\frac{j}{j} = \frac{d\rho}{2\pi j}.$$

Ca urmare $f(t)$ ia forma

$$f(t) = \frac{1}{2\pi j}\int_{-j\infty}^{+j\infty} d\rho\, e^{\rho t} \int_0^{\infty} f(\tau)\, e^{-\rho\tau}\, d\tau.$$

Se introduce

$$\varphi(\rho) = \int_0^{\infty} f(\tau)\, e^{-\rho\tau}\, d\tau$$

astfel că

$$f(t) = \frac{1}{2\pi j}\int_{-j\infty}^{+j\infty} e^{\rho t}\, \varphi(\rho)\, d\rho. \tag{29}$$

Scanned with OKEN Scanner

Expresia (29) reprezintă a doua formă a integralei Fourier sub forma complexă. În ultima formă a integralei Fourier se consideră $\varphi(\rho) = 0$ pentru intervalul de timp de la $-\infty$ la 0.

5. CALCULUL DIFERENȚIAL SIMBOLIC

Pentru a ne familiariza cu aplicarea calculului diferențial simbolic, la stabilirea formulei lui Heaviside care se încadrează în calculul operațional, se prezintă în cele ce urmează cîteva noțiuni fundamentale din calculul diferențial simbolic.

Calculul diferențial simbolic nu se limitează numai la introducerea simbolurilor p și $\frac{1}{p}$ pentru operatorii $\frac{d}{dx}$ respectiv $\int_0^x dx$, ci prin introducerea lor se creează anumite criterii care să ușurează rezolvarea ecuațiilor diferențiale.

Spre exemplu, să urmărim operația

$$(p - p_1)(p - p_2)\ f(x) = (p - p_1)[f'(x) - p_2 f(x)] =$$

$$= f''(x) - (p_1 + p_2) f'(x) + p_1 p_2 f(x) = [p^2 - (p_1 + p_2)\ p + p_1 p_2]\ f(x)$$

în care

$$p^2 = \frac{d^2}{dx^2}.$$

Calculul efectuat ne arată că prin introducerea simbolurilor p și $\frac{1}{p}$ se obține același rezultat, fie că se efectuează mai întîi operația de diferențiere, fie că se efectuează mai întîi, operația algebrică de înmulțire a celor doi factori și după aceea se trece la calculul diferențial.

Tot ca exemple de aplicare a metodei simbolice se iau în considerare cazurile

$$p^n f(x) = \frac{d^n}{dx^n} f(x); \quad p^0 f(x) = f(x)$$

$$p^{-1} f(x) = \int_0^x dx\, f(x); \quad p^{-2} f(x) = \int_0^x dx \int_0^x dx\ f(x)$$

$$\frac{1}{p} pf(x) = \int_0^x dx\, \frac{df(x)}{dx} = f(x) - f(0)$$

$$\frac{1}{p^2} p^2 f(x) = \int_0^x dx \int_0^x dx\, \frac{d^2 f(x)}{dx^2} = \int_0^x dx\, [f'(x) - f'(0)] =$$

$$= f(x) - f(0) - xf'(0) = f(x) - [f(0) + xf'(0)].$$

Se dă relația

$$\frac{1}{p - p_1} f(x) = \varphi(x)$$

se cere să se determine $\varphi(x)$.

Scanned with OKEN Scanner

Putem scrie

$$(p - p_1)\,\varphi(x) = f(x)$$

de unde se obține ecuația diferențială

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\,\varphi(x) - p_1\varphi(x) = f(x) \tag{1}$$

a cărei soluție se obține ușor din

$$\mathrm{d}\varphi(x) - p_1 f(x)\,\mathrm{d}x = f(x)\,\mathrm{d}x$$

în care se introduce

$$\varphi(x) = \varphi^*(x)\;\varepsilon(x)$$

astfel că

$$\varepsilon(x)\,[\mathrm{d}\varphi^*(x) - p_1\varphi^*(x)\,\mathrm{d}x] + \varphi^*(x)\,\mathrm{d}\varepsilon(x) = f(x)\,\mathrm{d}x \tag{2}$$

se face

$$\mathrm{d}\varphi^*(x) - p_1\varphi^*(x)\,\mathrm{d}x = 0 \tag{3}$$

ceea ce corespunde la ecuația diferențială (1) cu membrul al doilea egal cu zero.

Din (3) se obține

$$\frac{\mathrm{d}\varphi^*(x)}{\varphi^*(x)} = p_1\,\mathrm{d}x; \quad \ln\frac{\varphi^*(x)}{\varphi^*(0)} = \int_0^x p_1\mathrm{d}x = p_1 x$$

$$\varphi^*(x) = \varphi^*(0)\,\mathrm{e}^{p_1 x}.$$

În fine ecuația diferențială $\varphi^*(x)\,\mathrm{d}\varepsilon(x) = f(x)\,\mathrm{d}x$ ne dă

$$\varepsilon(x) = \frac{1}{\varphi^*(x)}\int_0^x \mathrm{e}^{-p_1 x}\,f(x)\,\mathrm{d}x$$

ca urmare $\varphi(x)$ ia forma

$$\varphi(x) = \mathrm{e}^{p_1 x}\int_0^x \mathrm{e}^{-p_1 x} f(x)\,\mathrm{d}x. \tag{4}$$

Prin exprimarea lui $\varphi(x)$ ca o integrală definită nu mai apare constanta aditivă.

Ca un ultim exemplu se dă

$$\varphi(x) = \frac{1}{p - p_1}\,(p - p_1)\,f(x).$$

Se formează

$$\varphi(x) = (p - p_1)\,\frac{1}{p - p_1}\,f(x) = (p - p_1)\,\mathrm{e}^{p_1 x}\int_0^x \mathrm{e}^{p_1 x} f(x)\,\mathrm{d}x =$$

$$= p_1\,\mathrm{e}^{p_1 x}\int_0^x \mathrm{e}^{-p_1 x}\,f(x)\,\mathrm{d}x + \mathrm{e}^{p_1 x}\Big[\,\mathrm{e}^{-p_1 x}\,f(x)\Big]_0^x - p_1\,\mathrm{e}^{p_1 x}\int_0^x \mathrm{e}^{-p_1 x}\,f(x)\,\mathrm{d}x =$$

$$= f(x) - f(0)\,\mathrm{e}^{p_1 x}.$$

Scanned with OKEN Scanner

Ecuația diferențială lineară în forma simbolică

Cu ajutorul calculului diferențial simbolic se reprezintă soluția ecuației diferențiale lineare de ordinul n, cu coeficienți constanți, într-o formă unitară, cu constantele stabilite în funcție de condițiile inițiale.

Avem

$$F(p)\,f(x) = F(x) \tag{5}$$

în care

$$F(p) = a_n p^n + a_{n-1}p^{n-1} + \ldots + a_1 p + a_0 \tag{6}$$

Relația (5) reprezintă ecuația diferențială lineară de ordinul n în forma simbolică.

Soluția ecuației diferențiale (5) este

$$f(x) = \sum_1^n \frac{1}{F'(p_m)}\, e^{p_m x}\left\{F_{p0} + \int_0^x e^{-p_m x}\, F(x)\, dx\right\} \tag{7}$$

în care

F_{p0} reprezintă o sumă de derivate ale funcției $f(x)$ și ale funcției $f(x)$ pentru $x = 0$;

p_m reprezintă rădăcinile ecuației $F(p) = 0$.

Spre exemplu, se dă ecuația diferențială

$$f'''(x) - 2f''(x) - f'(x) + 2f(x) = F(x)^*. \tag{8}$$

Ecuația diferențială (8) în forma simbolică devine

$$(p^3 - 2p^2 - p + 2)\; f(x) = F(p)\; f(x) = F(x). \tag{9}$$

Se formează

$$F(p) = p^3 - 2p^2 - p + 2 = (p-1)(p+1)(p-2) = 0 \tag{10}$$

în care soluțiile ei sînt

$$p_1 = 1;\; p_2 = -1;\; p_3 = 2. \tag{11}$$

Din derivata lui $F(p)$ în forma

$$F'(p) = 3p^2 - 4p - 1 \tag{12}$$

$$F'(p_1) = -2;\; F'(p_2) = 6;\; F'(p_3) = 3. \tag{13}$$

Exprimîndu-se derivatele lui $F(p)$ prin termenii care se obțin din (10) în formele

$$F_1 = (p+1)(p-2) = p^2 - p - 2$$

$$F_2 = (p-1)(p-2) = p^2 - 3p + 2$$

$$F_3 = (p-1)(p+1) = p^2 - 1$$

---

* W. Gauster: Über die Lösung von Schwingungsaufgaben mittels Symbolischer Differentialrechnung. Archiv für Elektrotechnik XXIV Bd. 3, 1930. S. 374.

Scanned with OKEN Scanner

Se introduc

$$F_{10} = F_1 f(0) = f''(0) - f'(0) - 2f(0)$$
$$F_{20} = F_2 f(0) = f''(0) - 3f'(0) + 2f(0)$$
$$F_{30} = F_3 f(0) = f''(0) - f(0).$$

Ca urmare soluția ecuației diferențiale (8) în forma (7) devine

$$f(x) = -\frac{e^x}{2}\left[\int_0^x e^{-x} F(x)\,dx + f''(0) - f'(0) - 2f(0)\right] +$$
$$+\frac{e^{-x}}{6}\left[\int_0^x e^x F(x)\,dx + f''(0) - 3f'(0) + 2f(0)\right] +$$
$$+\frac{e^{2x}}{3}\left[\int_0^x e^{-2x} F(x)\,dx + f''(0) - f(0)\right].$$

Reprezentarea soluției într-o formă atît de unitară se datorește aplicării calculului diferențial simbolic care simplifică calculele.

Relevăm că și în calculul analizei vectoriale introducerea operatorului nabla ∇ contribuie la o simplificare a exprimării operațiilor din analiza matematică.

6. REZOLVAREA ECUAȚIEI CARACTERISTICE DE GRADUL 4

La rezolvarea unei ecuații diferențiale de ordinul n cu coeficienți constanți cu membrul al doilea egal cu zero, apare rezolvarea ecuației caracteristice de gradul n în forma:

$$F(p) = a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \ldots + a_1 p + a_0 = 0. \tag{1}$$

Dat fiind că în cercetarea circuitelor electrice apar deobicei ecuații caracteristice de gradul 4 în cele ce urmează se prezintă metoda de rezolvare a unei astfel de ecuații.

Fie

$$F(p) = p^4 + ap^3 + bp^2 + cp + d = 0. \tag{2}$$

Se face substituția

$$p = \lambda - \frac{a}{4}. \tag{3}$$

În felul acesta se obține o ecuație de gradul 4 pentru λ fără termenul cu λ^3.

Ecuația (2) ia forma

$$p^4 + ap^3 + bp^2 + cp + d = \lambda^4 + k_1\lambda^2 - k_2\lambda + k_3 =$$
$$= (\lambda^2 + \alpha_1\lambda + \beta_1)(\lambda^2 + \alpha_2\lambda + \beta_2) = 0. \tag{4}$$

Scanned with OKEN Scanner

În care

$$k_1 = -\frac{3}{8}a^2 + b; \quad k_2 = \frac{a^3}{8} - \frac{ab}{2} + c$$

$$k_3 = \frac{3a^4}{4^4} + \frac{ba^2}{16} - \frac{ac}{4} + d.$$

Ecuația de gradul 4 s-a descompus într-un produs de două ecuații de gradul doi cari au soluțiile

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{2}(-\alpha_1 \pm \sqrt{\alpha_1^2 - 4\beta_1})$$
$$\lambda_{3,4} = \frac{1}{2}(-\alpha_2 \pm \sqrt{\alpha_2^2 - 4\beta_2}). \tag{5}$$

Din (3) se obține p în formele

$$p_1 = \lambda_1 - \frac{a}{4}; \quad p_2 = \lambda_2 - \frac{a}{4}; \quad p_3 = \lambda_3 - \frac{a}{4}; \quad p_4 = \lambda_4 - \frac{a}{4}.$$

În cazul cînd $\alpha_1^2 - 4\beta_1 \geqslant 0$; $\alpha_2^2 - 4\beta_2 \geqslant 0$, $p_{1,2}$ și $p_{3,4}$ sînt reale.

Pentru $\alpha_1^2 - 4\beta_1 < 0$, $\alpha_2^2 - 4\beta_2 < 0$, $p_{1,2}$ și $p_{3,4}$ reprezintă mărimi complexe.

Pentru $\alpha_1^2 - 4\beta_1 < 0$; $\alpha_2^2 - 4\beta_2 > 0$, $p_{1,2}$ devin numere complexe iar $p_{3,4}$ reale.

Pentru a utiliza cele două ecuații de gradul 2 trebuie determinați coeficienții α_1, α_2, β_1, β_2.

În acest scop se formează 4 relații

$$\alpha_1 + \alpha_2 = 0; \quad \alpha_1\alpha_2 + \beta_1 + \beta_2 = k_1;$$
$$\alpha_1\beta_2 + \alpha_2\beta_1 = k_2; \quad \beta_1\beta_2 = k_3. \tag{6}$$

Din (6) se obține

$$\alpha_2 = -\alpha_1; \quad \beta_1 = \frac{1}{2}\left(k_1 + \alpha_1^2 - \frac{k_2}{\alpha_1}\right); \quad \beta_2 = \frac{1}{2}\left(k_1 + \alpha_1^2 + \frac{k_2}{\alpha_1}\right). \tag{7}$$

Pentru determinarea lui α_1 se ține seama că din relația

$$\beta_1\beta_2 = k_3$$

se obține o ecuație de gradul 6 în α_1.

Avem

$$\alpha_1^6 + 2k_1\alpha_1^4 + (k_1^2 - 4k_3)\,\alpha_1^2 - k_2^2 = 0. \tag{8}$$

Se reduce (8) la o ecuație de gradul 3, făcînd substituția $\alpha_1^2 = W$. Se obține

$$W^3 + 2k_1W^2 + (k_1^2 - 4k_3)\,W - k_2^2 = 0 \tag{9}$$

Pentru rezolvarea acestei ecuații facem să dispară termenul cu W^2.

Scanned with OKEN Scanner

Se face substituția

$$W = q - \frac{2k_1}{3}. \tag{10}$$

Se obține

$$q^3 - 3Pq + 2Q = 0 \tag{11}$$

în care

$$3P = \frac{1}{3}k_1^2 + 4k_3;\ 2Q = -\frac{2}{27}k_1^3 + \frac{8}{3}k_1k_3 - k_2^2. \tag{12}$$

Pentru rezolvarea ecuației de gradul 3 din (11) se mai face o substituție; se introduce

$$q = x + y$$

de unde rezultă

$$x^3 + y^3 + 3(x + y)(xy - P) + 2Q = 0. \tag{13}$$

Ecuația (13) este satisfăcută pentru

$$x^3 + y^3 = -2Q;\quad xy = P. \tag{14}$$

Fie

$$x^3 = \delta_1 \text{ și } y^3 = \delta_2$$

astfel că

$$\delta_1 + \delta_2 = -2Q;\ \delta_1\delta_2 = P^3. \tag{15}$$

Se obține cîte o ecuație de gradul 2 în δ_1 și δ_2

$$\delta_1^2 + 2Q\delta_1 + P^3 = 0;\ \delta_2^2 + 2Q\delta_2 + P^3 = 0 \tag{16}$$

cu rădăcinile

$$\delta_1 = -Q_1 + \sqrt{Q^2 - P^3};\ \delta_2 = -Q - \sqrt{Q^2 - P^3} \tag{17}$$

astfel că

$$x_1 = \sqrt[3]{-Q + \sqrt{Q^2 - P^3}};\quad y_1 = \sqrt[3]{-Q - \sqrt{Q^2 - P^3}}. \tag{18}$$

Pentru găsirea soluțiilor ecuației

$$q^3 - 3Pq + 2Q = 0$$

ne folosim de formula lui Cardan pentru rezolvarea ecuațiilor de gradul 3.

Se formează

$$q_1 = x_1 + y_1. \tag{19}$$

Scanned with OKEN Scanner

Se constată din $x^3 + \delta_1$ în care δ_1 este cunoscut, că se obțin trei valori pentru x

$$x_1 = \sqrt[3]{\delta_1}; \quad x_2 = x_1\varepsilon; \quad x_3 = x_1\varepsilon^2 \tag{20}$$

în care

$$\varepsilon = \frac{1}{2}(-1 + j\sqrt{3}); \quad \varepsilon^2 = \frac{1}{2}(-1 - j\sqrt{3}); \quad \varepsilon\varepsilon^2 = 1.$$

Ca urmare

$$x_1^3 = x_2^3 = x_3^3 = \delta_1.$$

În mod analog se obțin

$$y_1 = \sqrt[3]{\delta_2}; \quad y_2 = y_1\varepsilon; \quad y_3 = y_1\varepsilon^2; \quad y_1^3 = y_2^3 = y_3^3 = \delta_2. \tag{21}$$

Deoarece există 6 rădăcini x_1, x_2, x și y_1, y_2, y, și ținîndu-se seama de q din (19) se formează 9 combinații

$$\begin{array}{lll} x_1 + y_1 & x_2 + y_1 & x_3 + y_1 \\ x_1 + y_2 & x_2 + y_2 & x_3 + y_2 \\ x_1 + y_3 & x_2 + y_3 & x_3 + y_3. \end{array}$$

Ținîndu-se seama de relația $xy = P$ în care P este real, rezultă că numai cazurile

$$x_1y_1 = P; \quad x_2y_3 = P; \quad x_3y_2 = P$$

sînt valabile, astfel că q poate obține numai trei valori,

$$q_1 = x_1 + y_1; \quad q_2 = x_2 + y_3; \quad q_3 = x_3 + y_2 \tag{22}$$

sau

$$q_1 = x_1 + y_1$$

$$q_2 = -\frac{1}{2}(x_1 + y_1) + \frac{1}{2}(x_1 - y_1)\, j\sqrt{3}$$

$$q_3 = -\frac{1}{2}(x_1 + y_2) - \frac{1}{2}(x_1 - y_1)\, j\sqrt{3}.$$

Pentru

$$Q^2 - P^3 > 0$$

numai q_1 este o rădăcină reală, q_2, q_3 reprezintă două rădăcini complexe conjugate.

Pentru

$$Q^2 - P^3 = 0$$

cele trei rădăcini q_1, q_2, q_3 sînt reale, în care $q_2 = q_3 = -\frac{q_1}{2}$.

Scanned with OKEN Scanner

Pentru $Q^2 - P^3 < 0$ ecuația este ireductibilă.

Pentru soluția reală q_1 din relația $\alpha_1^2 = W = q_1 - \frac{2k_1}{3}$ se obține

$$\alpha_1 = \sqrt{q_1 - \frac{2k_1}{3}}, \quad \alpha_2 = -\sqrt{q_1 - \frac{2k_1}{3}}.$$

Ca urmare β_1 și β_2 devin cunoscute în funcție de α_1 și în consecință pot fi determinate rădăcinile p_1, p_2, p_3 și p_4 ale ecuației de gradul 4.

7. CONSIDERAȚII GENERALE CU PRIVIRE LA REZOLVAREA ECUAȚIILOR DIFERENȚIALE LINEARE DE ORDINUL ÎNTÎI ȘI DE ORDINUL DOI ÎN ELECTROTEHNICĂ

Spre exemplu cînd se dă o ecuație diferențială liniară de ordinul întîi al unui curent electric i în forma

$$L\frac{di}{dt} + ri = u_b \tag{1}$$

în care parametrii L, r și tensiunea de borne u_b reprezintă funcții de timp cunoscute.

Se recomandă ca ecuația diferențială (1) să fie pusă în forma

$$\frac{di}{dt} + \frac{r}{L}i = \frac{u_b}{L}. \tag{2}$$

Metoda de rezolvare a ecuației diferențiale (2) adică metoda de determinare a curentului electric i ca funcție de timp, constă în a înlocui ecuația diferențială (2) prin două ecuații diferențiale mai simple care pot fi ușor integrate.

Cele două ecuații diferențiale mai simple au formele

$$\frac{di_t}{dt} + \frac{r}{L}i_t = 0 \tag{3}$$

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = \frac{u_b}{Li_t} \tag{4}$$

care se obțin prin introducerea substituției lui i dată de Lagrange în forma

$$i = i_t \cdot \varepsilon, \tag{5}$$

Introducînd pe i din (5) în ecuația diferențială (2) se obține

$$\varepsilon\left(\frac{di_t}{dt} + \frac{r}{L}i_t\right) + i_t\frac{d\varepsilon}{dt} = \frac{u_b}{L}. \tag{6}$$

Funcția ε e astfel introdusă, încît să avem ecuațiile diferențiale (3) și (4).

Din (3) se obține

$$\frac{di_t}{i_t} = -\frac{r}{L}dt;\ \ln\frac{i_t}{i_{t0}} = -\int\frac{r}{L}dt;\quad i_t = i_{t0}\,e^{-\int\frac{r}{L}dt}. \tag{7}$$

Din (4) se obține

$$\varepsilon = \int\frac{1}{i_t}\,\frac{u_b}{L}dt + \varepsilon_0. \tag{8}$$

Curentul electric i devine

$$i = i_t\,\varepsilon = e^{-\int\frac{r}{L}dt}\int e^{\int\frac{r}{L}dt}\,\frac{u_b}{L}dt + i_0\,e^{-\int\frac{r}{L}dt} \tag{9}$$

în care

$$i_{t_0}\,\varepsilon_0 = i_0.$$

Primul termen reprezintă curentul staționar i_s și al doilea termen reprezintă curentul tranzitoriu i_t.

În relațiile (3) și (4) se remarcă posibilitatea de a efectua simplu integrarea, prin aceea că în (3) în care apare atît $\frac{di_t}{dt}$ cît și i_t ecuația diferențială e făcută egală cu zero.

În schimb în (4) apre numai $\frac{d\varepsilon}{dt}$ și nu apare ε ceea ce ecuația diferențială permite să aibă al doilea termen pe $\frac{u_b}{Li_t}$.

Ca o variantă la metoda de rezolvare a ecuației diferențiale de mai sus, se consideră funcția ε, care nu are o dimensiune, înmulțită cu toți termenii din ecuația (2).

Se obține

$$\varepsilon\frac{di}{dt} + \varepsilon\frac{r}{L}i = \varepsilon\frac{u_b}{L}. \tag{10}$$

Funcția ε trebuie să satisfacă egalitatea

$$\varepsilon\frac{r}{L}i = i\frac{d\varepsilon}{dt}. \tag{11}$$

Ca urmare ecuația diferențială (10) ia forma

$$\frac{d}{dt}(i\varepsilon) = \varepsilon\frac{u_b}{L}. \tag{12}$$

Din (11) se obține ε.

Scanned with OKEN Scanner

Avem:

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = \frac{r}{L}\,dt; \quad \varepsilon = \varepsilon_0 e^{\int \frac{r}{L} dt}. \tag{13}$$

Din (12) se obține $(i\varepsilon)$.
Avem

$$i\varepsilon = \int \varepsilon \frac{u_b}{L}\,dt + (i\varepsilon)_0. \tag{14}$$

Din (14) și (13) se deduce i în forma

$$i = e^{-\int \frac{r}{L} dt} \int e^{\int \frac{r}{L} dt} \frac{u_b}{L}\,dt + i_0 e^{-\int \frac{r}{L} dt}$$

în care:

$$\frac{(i\varepsilon)_0}{\varepsilon_0} = i_0.$$

Se mai poate rezolva ecuația diferențială (2) și în felul următor:
Ținîndu-se seama de ecuația diferențială (3) care reprezintă ecuația diferențială (2) cu membrul al doilea făcut egal cu zero, s-a văzut că ea posedă ca soluție pe i_t în forma (7).

Din cele ce urmează, se va vedea că se poate considera curentul electric i în (2) în forma

$$i = e^{-\int \frac{r}{L} dt} y. \tag{15}$$

în care y are aceeași dimensiune ca i.
Introducîndu-se i în forma (15) în ecuația diferențială (2) se obține

$$e^{-\int \frac{r}{L} dt} y\left(-\frac{r}{L} + \frac{r}{L}\right) + e^{-\int \frac{r}{L} dt} \frac{dy}{dt} = \frac{u_b}{L} \tag{16}$$

de unde se vede că primul termen este nul.
Se obține

$$\frac{dy}{dt} = e^{\int \frac{r}{L} dt} \frac{u_b}{L}$$

astfel că

$$y = \int e^{\int \frac{r}{L} dt} \frac{u_b}{L}\,dt + y_0. \tag{17}$$

Scanned with OKEN Scanner

Se introduce y din (17) în (15) astfel că i devine

$$i = e^{-\int \frac{r}{L} dt} \int \frac{u_b}{L} e^{\int \frac{r}{L} dt} dt + i_0 e^{-\int \frac{r}{L} dt}$$

în care

$$i_0 = y_0.$$

Ecuația (16) justifică introducerea lui i în forma (15) pentru că se creează posibilitatea determinării funcției y.

Se ia ca exemplu ecuația diferențială

$$\frac{di}{dt} + \frac{r}{L} i = \frac{u_b}{L} = \frac{u_m}{L} \sin \omega t \tag{18}$$

cu parametrii r, L ca mărimi constante și tensiunea de borne u_b ca o funcție sinusoidală de timp.

Se determină i din expresia (9) care pentru r, L ca mărimi constante ia forma

$$i = e^{-\frac{r}{L}t} \int \frac{u_b}{L} e^{\frac{r}{L}t} dt + i_0 e^{-\frac{r}{L}t} \tag{19}$$

în care

$$\int \frac{u_b}{L} e^{\frac{r}{L}t} dt = \frac{u_m}{L} \int \sin \omega t \, e^{\frac{r}{L}t} dt = \frac{u_m}{L} \int \frac{1}{2j} (e^{j\omega t} - e^{-j\omega t}) \, e^{\frac{r}{L}t} dt =$$

$$= \frac{u_m e^{\frac{r}{L}t}}{L 2j \left(\left(\frac{r}{L}\right)^2 + \omega^2\right)} \left[\left(\frac{r}{L} - j\omega\right) e^{j\omega t} - \left(\frac{r}{L} + j\omega\right) e^{-j\omega t}\right] =$$

$$= \frac{u_m e^{\frac{r}{L}t}}{r^2 + (\omega L)^2} \frac{\omega L}{} \left[\frac{r}{\omega L} \sin \omega t - \cos \omega t\right].$$

Se introduce $\frac{\omega L}{r} = \operatorname{tg} \varphi$ deci $\sin \varphi = \frac{\operatorname{tg} \varphi}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \varphi}} = \frac{\omega L}{\sqrt{r^2 + (\omega L)^2}}$.

Se obține

$$\int \frac{u_b}{L} e^{\frac{r}{L}t} dt = \frac{u_m e^{\frac{r}{L}t}}{\sqrt{r^2 + (\omega L)^2}} \sin (\omega t - \varphi)$$

$$i = \frac{u_m}{\sqrt{r^2 + (\omega L)^2}} \sin (\omega t - \varphi) + i_0 e^{-\frac{r}{L}t} \tag{20}$$

În cazul obișnuit în care se consideră parametrii r și L ca mărimi constante, se creează posibilitatea de a rezolva ecuația diferențială (18) mai simplu.

Scanned with OKEN Scanner

Ecuația diferențială (18) se descompune în două ecuații diferențiale de forma

$$\frac{di_t}{dt} + \frac{r}{L} i_t = 0 \tag{21}$$

$$\frac{di_{st}}{dt} + \frac{r}{L} i_{st} = \frac{u_b}{L} = \frac{u_m}{L} \sin \omega t. \tag{22}$$

Prin însumarea ecuațiilor diferențiale (21) și (22), ceea ce este posibil cînd r, L reprezintă mărimi constante, se obține ecuația diferențială (18) cu soluția

$$i = i_t + i_{st} \tag{23}$$

în care i_t reprezintă curentul tranzitoriu și i_{st} curentul staționar.

Pentru rezolvarea ecuației diferențiale (21) se introduce

$$i_t = I e^{pt}$$

care ne conduce la ecuația caracteristică $p + \frac{r}{L} = 0$ de unde se obține $p = -\frac{r}{L}$ iar i_{st} care satisface ecuația diferențială (22) poate fi luat în forma

$$i_{st} = i_m \sin (\omega t - \varphi) \tag{24}$$

în care i_m și φ trebuie determinați, pentru că prin introducerea lui i în forma (24), în ecuația diferențială (23) se obține o sumă de două funcții sinusoidale care va exprima pe $\frac{u_m}{L} \sin \omega t$ tot ca o funcție sinusoidală.

Pentru anumite valori date lui t în cei doi termeni din sumă, se crează posibilitatea de a se obține i_m și tg φ.

Rezolvarea ecuației diferențiale lineare de ordinul 2.

Spre exemplu se dă următoarea ecuația diferențială

$$\frac{d}{dt}(iL) + ri + \frac{1}{C}\int i \, dt + \frac{Q_0}{C} = u_b \tag{25}$$

cu parametrii r, L ca funcții de timp. Capacitatea C e considerată ca o mărime constantă, tensiunea de borne u_b ca o funcție oarecare de timp.

Se introduce în general

$$\psi = iL \tag{26}$$

în care ψ exprimă înlănțuirea magnetică de care depinde tensiunea electromotoare.

Se formează ecuația diferențială pentru înlănțuirea magnetică ψ.

Se obține

$$\frac{d\psi}{dt} + \frac{r}{L}\psi + \frac{1}{C}\int \frac{\psi}{L} dt + \frac{Q_0}{C} = u_b. \tag{27}$$

Prin derivare se obține

$$\frac{d^2\psi}{dt^2} + \frac{r}{L}\frac{d\psi}{dt} + \psi\frac{d}{dt}\left(\frac{r}{L}\right) + \frac{\psi}{LC} = \frac{du_b}{dt}$$

sau

$$\frac{d^2\psi}{dt^2} + \frac{r}{L}\frac{d\psi}{dt} + \left(\frac{1}{LC} + \frac{d}{dt}\left(\frac{r}{L}\right)\right)\psi = \frac{du_b}{dt} \tag{28}$$

Se cere să se determine înlănțuirea magnetică ψ ca funcție de timp, cînd se cunosc $\frac{r}{L}$, $\frac{1}{LC}$ și $\frac{du_b}{dt}$ ca funcții de timp.

Se folosește aceeași metodă ca la rezolvarea ecuației diferențiale lineare de ordinul întîi.

Se introduce substituirea

$$\psi = \psi_t \varepsilon \tag{29}$$

în care ψ_t are aceeași dimensiune ca ψ iar ε reprezintă o mărime fără dimensiune.

Se formează

$$\frac{d\psi}{dt} = \varepsilon\frac{d\psi_t}{dt} + \psi_t\frac{d\varepsilon}{dt}$$

$$\frac{d^2\psi}{dt^2} = \varepsilon\frac{d^2\psi_t}{dt^2} + \psi_t\frac{d^2\varepsilon}{dt^2} + 2\frac{d\psi_t}{dt}\frac{d\varepsilon}{dt}.$$

Prin introducerea relațiilor de mai sus în ecuația diferențială (28) se formează următoarele două ecuații diferențiale

$$\frac{d^2\psi_t}{dt^2} + \frac{r}{L}\frac{d\psi_t}{dt} + \left(\frac{1}{LC} + \frac{d}{dt}\left(\frac{r}{L}\right)\right)\psi_t = 0 \tag{30}$$

$$\frac{d^2\varepsilon}{dt^2} + \left(\frac{r}{L} + \frac{2}{\psi_t}\frac{d\psi_t}{dt}\right)\frac{d\varepsilon}{dt} = \frac{1}{\psi_t}\frac{du_b}{dt}. \tag{31}$$

Se remarcă că în (30) apar $\frac{d^2\psi_t}{dt^2}$, $\frac{d\psi_t}{dt}$ și ψ_t, pe cînd în (31) nu apare ε.

Tocmai pentru că în (31) ε nu apare explicit, există posibilitatea de a se obține funcția ε.

Se introduce

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = \theta \tag{32}$$

Ca urmare ecuația diferențială (31) se transformă într-o ecuație diferențială lineară de ordinul întîi în forma

$$\frac{d\theta}{dt} + f(t)\,\theta = F(t) \tag{33}$$

Scanned with OKEN Scanner

în care

$$f(t) = \frac{r}{L} + \frac{2}{\psi_t}\frac{d\psi_t}{dt}; \quad F(t) = \frac{1}{\psi_t}\frac{du_b}{dt}.$$

Rezolvarea ecuației diferențiale (33) este cunoscută.
Se introduce

$$\theta = \theta_t \eta \tag{34}$$

și se obține

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = \theta = e^{-\int f(t)\,dt} \int e^{\int f(t)\,dt} F(t)\,dt + \theta_0 e^{-\int f(t)\,dt}. \tag{35}$$

Din (35) se obține

$$\varepsilon = \int \theta\,dt + \varepsilon_0 \tag{36}$$

iar din (29) rezultă

$$\psi = \psi_t \left\{ \int \theta\,dt + \varepsilon_0 \right\}. \tag{37}$$

Rămîne să se determine ψ_t din (30).
Se introduce substituirea

$$\psi_t = e^{-\int \Delta_1\,dt} y_t \tag{38}$$

în care

$$\frac{r}{2L} = \Delta_1.$$

y posedă aceeași dimensiune ca ψ_t.
Se introduce ψ_t din (38) în ecuația diferențială (30).
Se obține

$$\frac{d\psi_t}{dt} = -\Delta_1 e^{-\int \Delta_1\,dt} y_t + e^{-\int \Delta_1\,dt}\frac{dy_t}{dt}$$

$$\frac{d^2\psi_t}{dt^2} = \Delta_1^2 e^{-\int \Delta_1\,dt} y_t - \Delta_1 e^{-\int \Delta_1\,dt}\frac{dy_1}{dt} - \Delta_1 e^{-\int \Delta_1\,dt}\frac{dy_t}{dt} +$$

$$+ e^{-\int \Delta_1\,dt}\frac{d^2y_t}{dt^2} - \frac{d\Delta_1}{dt} e^{-\int \Delta_1\,dt} y_t$$

și se formează

$$2\Delta_1 \frac{d\psi_t}{dt} = -2\Delta_1^2 e^{-\int \Delta_1 dt} + 2\Delta_1 e^{-\int \Delta_1 dt} \frac{dy_t}{dt}$$

$$\left(\frac{1}{LC} + \frac{d}{dt} 2\Delta_1\right) e^{-\int \Delta_1 dt} y_t = \left(\frac{1}{LC} + \frac{d}{dt} 2\Delta_1\right) \psi_t.$$

Ca urmare ecuația diferențială (30) devine:

$$e^{-\int \Delta_1 dt}\left[-\Delta_1^2 y_t + \frac{d^2 y_t}{dt^2} - \frac{d\Delta_1}{dt} y_t + \left(\frac{1}{LC} + \frac{d}{dt} 2\Delta_1\right) y_t\right] = 0$$

sau

$$e^{-\int \Delta_1 dt}\left[\frac{d^2 y_t}{dt^2} + \left(\frac{1}{LC} - \Delta_1^2 + \frac{d}{dt}\Delta_1\right) y_t\right] = 0.$$

Se introduce

$$\sigma^2 = \frac{1}{LC} - \Delta_1^2 + \frac{d}{dt}\Delta_1. \tag{39}$$

Formula (39) e cunoscută în literatură sub denumirea de formula lui Thomson.

Ecuația diferențială (30) se transpune în ecuația diferențială

$$\frac{d^2 y_t}{dt^2} + \sigma^2 y_t = 0 \tag{40}$$

care ne dă pe y_t respectiv ψ_t ca funcție de timp.

Se relevă că ecuația diferențială (28) se mai poate rezolva fără să se introducă substituirea (29).

Se introduce direct

$$\psi = e^{-\int \Delta_1 dt} y \tag{41}$$

și se obține o ecuație diferențială în forma

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + \sigma^2 y^2 = \frac{du_b}{dt} \frac{1}{\zeta(t)} \tag{42}$$

în care

$$\Delta_1 = \frac{r}{2L}; \quad \zeta(t) = e^{-\int \Delta_1 dt}.$$

Pentru rezolvarea ecuației diferențiale (42) se introduce substituirea

$$y = y_t \eta \tag{43}$$

și se obțin următoarele două ecuații diferențiale

$$\frac{d^2 y_t}{dt^2} + \sigma^2 y_t = 0 \tag{44}$$

$$\frac{d^2 \eta}{dt^2} + f(t) \frac{d\eta}{dt} = F(t) \tag{45}$$

în care

$$f(t) = \frac{2}{y_t} \frac{dy_t}{dt}; \quad F(t) = \frac{du_b}{dt} \frac{1}{\zeta(t)} \frac{1}{y_t}. \tag{46}$$

La rezolvarea ecuației diferențiale (45) se procedează la fel ca la rezolvarea ecuației diferențiale (31).

Rămîne de rezolvat ecuația diferențială (44). În cazul cînd r și L reprezintă mărimi constante, se obține

$$\sigma^2 = \frac{1}{LC} - \Delta_1^2 \tag{47}$$

deoarece

$$\frac{d}{dt} \Delta_1 = 0.$$

Deosebim două cazuri după cum σ^2 e pozitiv sau negativ.

În cazul cînd avem

$$\sigma^2 > 0 \tag{48}$$

se constată că y_t în (44) ia forma

$$y_t = y_{m_1} \sin \sigma t + y_{m_2} \cos \sigma t \tag{49}$$

deoarece în felul acesta ecuația diferențială (44) este satisfăcută.

În cazul cînd avem

$$\sigma^2 < 0 \tag{50}$$

se constată că y_t în (44) ia forma exponențială:

$$y_t = y_{01} e^{p_2 t} + y_{02} e^{-p_2 t} \tag{51}$$

în care

$$-\sigma^2 = \left(\frac{r}{2L}\right)^2 - \frac{1}{LC} = (\pm p_2)^2. \tag{52}$$

Cînd σ nu e o mărime constantă, spre exemplu reprezintă o funcție periodică de α iar α variază cu timpul proporțional, atunci și y_t reprezintă o funcție periodică de α, iar α e o funcție de timp.

Scanned with OKEN Scanner

Se formează

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy(\alpha)}{d\alpha} \cdot \frac{d\alpha}{dt} = y'(\alpha)\, p$$

în care $p = \frac{d\alpha}{dt} = \text{constant}.$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = \frac{d^2y(\alpha)}{d\alpha^2} \left(\frac{d\alpha}{dt}\right)^2 = y''(\alpha)\, p^2.$$

Ca urmare ecuaţia diferenţială (44) ia forma

$$y''(\alpha) + \frac{\sigma^2}{p^2}\, y(\alpha) = 0. \tag{53}$$

Fie

$$\frac{\sigma^2}{p^2} = \lambda + \gamma f(\alpha). \tag{54}$$

Cînd $f(\alpha)$ reprezintă o funcţie periodică simetrică de α se obţine:

$$\int_0^{2\pi} f(\alpha)\, d\alpha = 0; \quad \int_0^{2\pi} \frac{\sigma^2}{p^2}\, d\alpha = 2\pi\lambda \tag{55}$$

din (55) se obţine λ, atunci cînd funcţia $\frac{\sigma^2}{p^2}$ este cunoscută.

Din

$$\frac{\sigma^2}{p^2} - \lambda = \gamma f(\alpha)$$

pentru $f(\alpha)_{max} = 1$ se obţine γ.

Ecuaţia diferenţială (53) devine

$$y''(\alpha) + (\lambda + \gamma f(\alpha))\; y(\alpha) = 0. \tag{56}$$

Ecuaţia diferenţială (56) poartă denumirea de ecuaţia diferenţială a lui Holl cu soluţia în forma

$$y(\alpha) = e^{\mu\alpha}\varphi_1(\alpha) + e^{-\mu\alpha}\varphi_2(\alpha) \tag{57}$$

în care $\varphi_1(\alpha)$ şi $\varphi_2(\alpha)$ reprezintă funcţii periodice de α.

Rezolvarea ecuaţiei diferenţiale (56) e dată de teorema lui Floquet *.

Spre exemplu, fie

$$\frac{\sigma^2}{p^2} = \sin^2\alpha = \frac{1}{2}(1 - \cos 2\alpha).$$

* G. Floquet. Sur les equations differentielle linéaires à coefficients periodiques. An. Ecole norm. 1883 p. 47.

Scanned with OKEN Scanner

Se obține

$$\frac{\sigma^2}{p^2} = \lambda + \gamma f(\alpha)$$

în care

$$\lambda = \frac{1}{2}; \quad \gamma = -\frac{1}{2}; \quad f(\alpha) = +\cos 2\alpha.$$

Din

$$\int_0^{2\pi} \frac{\sigma^2}{p^2} d\alpha = \frac{1}{2} 2\pi = \lambda \cdot 2\pi$$

se obține λ, iar din

$$\left(\frac{\sigma^2}{p^2} - \lambda\right) = \gamma f(\alpha) = \gamma = -\frac{1}{2}.$$

Cid se cunoaște $y(\alpha)$ se obține y_t.

Avem

$$\frac{dy_t}{dt} = \frac{dy(\alpha)}{d\alpha} \cdot \frac{d\alpha}{dt} = \frac{dy(\alpha)}{d\alpha} \cdot p$$

astfel că

$$y_t = \int \frac{dy(\alpha)}{d\alpha} p \, dt + y_{t0}. \tag{58}$$

Se mai consideră cazul cînd ecuația diferențială lineară de ordinul doi se reprezintă în forma

$$\frac{d^2i}{dt^2} + f_1(t) \frac{di}{dt} + f_2(t) \, i = f_3(t). \tag{59}$$

Introducîndu-se substituirea

$$i = i_t \, \varepsilon \tag{60}$$

și formîndu-se

$$\frac{di}{dt} = \frac{di_t}{dt} \varepsilon + i_t \frac{d\varepsilon}{dt}$$

$$\frac{d^2i}{dt^2} = \varepsilon \frac{d^2i_t}{dt^2} + i_t \frac{d^2\varepsilon}{dt^2} + 2 \frac{di_t}{dt} \cdot \frac{d\varepsilon}{dt}$$

ecuația diferențială (59) ia forma

$$\varepsilon \left(\frac{d^2i_t}{dt^2} + f(t) \frac{di_t}{dt} + f_2(t) \, i_t\right) + i_t \frac{d^2\varepsilon}{dt^2} + \frac{d\varepsilon}{dt} \left(2 \frac{di_t}{dt} + f_1(t) \, i_t\right) = f_3(t) \tag{61}$$

de unde se deduc următoarele două ecuații diferențiale

$$\frac{d^2 i_t}{dt^2} + f_1(t)\,\frac{di_t}{dt} + f_2(t)\,i_t = 0 \tag{62}$$

$$\frac{d^2\varepsilon}{dt^2} + \frac{d\varepsilon}{dt}\left(\frac{2}{i_t}\frac{di_t}{dt} + f_1(t)\right) = f_3(t)\,\frac{1}{i_t}. \tag{63}$$

Pentru rezolvarea ecuației diferențiale (62) se introduce

$$i_t = e^{-\int \Delta_1 dt}\, y_t \tag{64}$$

în care

$$\Delta_1 = \frac{1}{2} f_1(t) \tag{65}$$

iar pentru rezolvarea ecuației diferențiale (63) se introduce

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = \theta. \tag{66}$$

În cadrul cercetării circuitului electric se consideră în general r și L ca mărimi constante iar cînd apare L ca funcție de i se introduce

$$\frac{d}{dt}(iL) = \left(i\frac{dL}{di} + L\right)\frac{di}{dt} = L_D\frac{di}{dt}$$

în care L_D reprezintă inductivitatea dinamică.

În § 4.17 al capitolului despre fenomenul electromagnetic partea I s-a relevat o metodă grafică de rezolvare a unei ecuații diferențiale de forma

$$L_D\frac{di}{dt} + ir = u_b$$

în care derivata

$$\frac{di}{dt} = \frac{u_b - ir}{L_D}$$

e obținută pe cale grafică, cînd se cunosc u_b ca funcție de timp, L_D ca funcție de i și r este constant.

În cele ce urmează se prezintă o altă metodă grafică de integrare a unei ecuații diferențiale de forma

$$L_D\frac{di}{dt} + ri = u_b \tag{67}$$

în care se consideră de data aceasta u_b ca o tensiune de borne constantă în timp. Inductivitatea dinamică L_D apare ca o funcție de curent electric i iar rezistența electrică r e constantă.

Scanned with OKEN Scanner

În figura A.44 se prezintă u_b constant, în funcție de i și L_D ca funcție de i. Prin dreapta din figură se evidențiază atît ir cît și $u_b - ir$ ca funcție de i.

Se formează din (67)

$$\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} = \frac{u_b - ir}{L_D}$$

de unde se deduce

$$\mathrm{d}t = \frac{L}{u_b - ir}\,\mathrm{d}i \tag{68}$$

în care mărimea $\frac{L_D}{u_b - ir}$ e cunoscută ca funcție de i.

Prin integrarea

$$t - t_0 = \int_{i=0}^{i} \frac{L_D}{u_b - ir}\,\mathrm{d}i \tag{69}$$

exprimată în figură prin suprafața haşurată şi apoi prin curba punctată se obține $t - t_0$ ca funcție de i, respectiv $i = f(t)$ ceea ce era de determinat. Se consideră $t_0 = 0$.

Ca o variantă la integrarea grafică de mai sus, se poate lua în considerare înlănțuirea magnetică ψ în forma $\psi = iL$.

Ca urmare se obține

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(iL) = \frac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}i}\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} = L_D\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}.$$

În exemplul precedent s-a luati n considerare inductivitatea dinamică L_D ca funcție de i.

De data aceasta se ia în considerare ecuația diferențială în forma

$$\frac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}t} + ir = u_b \tag{70}$$

în care se cunoaşte înlănțuirea magnetică ψ ca funcție de i.

În figura A.45 se prezintă u_b ca constant în funcție de i rezistența r fiind constantă se obține în figură ir respectiv $u_b - ir$ ca funcție de i.

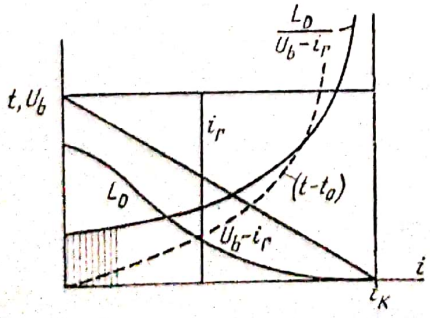


Fig. A.44. Integrarea grafică.

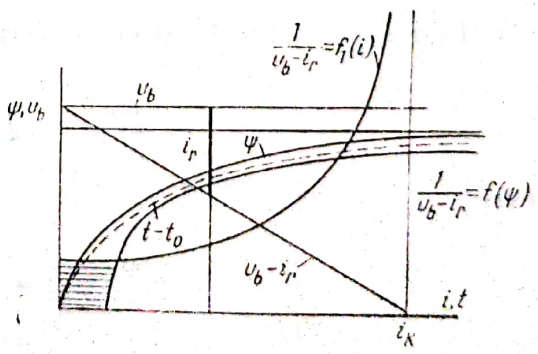


Fig. A.45. Integrarea grafică.

De asemenea în figura A. 45 este trasată caracteristica ψ ca funcție de i.

Se formează din (70)

$$dt = \frac{1}{u_b - ir} d\psi. \tag{71}$$

În figura A.45 se cunoaşte curba $\frac{1}{u_b - ir}$ ca funcție de i.

Pentru ca să se poată efectua integrala

$$t - t_0 = \int_{\psi_0}^{\psi} \frac{1}{u_b - ir} d\psi$$

va trebui să se cunoască mărimea $\frac{1}{u_b - ir}$ ca funcție de ψ.

În figură sînt cunoscute atît ψ cît şi $\frac{1}{u_b - ir}$ ca funcții de i. Ca urmare se poate construi curba care reprezintă $\frac{1}{u_b - ir} = f(\psi)$.

Integrala de mai sus se reprezintă prin suprafața haşurată respectiv linia punctată.

Se consideră $t_0 = 0$. Se obține în diagramă t în funcție de ψ sau ψ în funcție de t, exprimată prin linia punctată, ceea ce era de determinat.

Să se determine curentul staționar care corespunde unei ecuații diferențiale lineare cu parametrii r, L, C ca funcții periodice generale de timp.

Tensiunea de borne se consideră de asemenea ca o funcție periodică generală de timp

Se foloseşte seria Fourier în forma complexă.

Seria Fourier în forma obişnuită este

$$f(t) = \frac{b_0}{2} + \sum_{\nu=1}^{\infty} (b_\nu \cos \nu\omega t + a_\nu \sin \nu\omega t).$$

Se introduce seria Fourier în forma complexă

$$f(t) = \sum_{\nu=-\infty}^{\nu=+\infty} \mathcal{D}_\nu \, e^{j\nu\omega t}$$

în care

$$\mathcal{D}_{+\nu} = \frac{1}{2} (b_\nu - j a_\nu)$$

$$\mathcal{D}_{-\nu} = \frac{1}{2} (b_\nu + j a_\nu).$$

Ca urmare se formează suma

$$\mathcal{D}_{-\nu}\, e^{-j\nu\omega t} + \mathcal{D}_{+\nu}\, e^{j\nu\omega t} = \frac{1}{2}(b_\nu + ja_\nu)\, e^{-j\nu\omega t} + \frac{1}{2}(b_\nu - ja_\nu)\, e^{j\nu\omega t} =$$

$$= \frac{b_\nu}{2}(e^{j\nu\omega t} + e^{-j\nu\omega t}) - j\frac{a_\nu}{2}(e^{j\nu\omega t} - e^{-j\nu\omega t}) = b_\nu \cos \nu\omega t + a_\nu \sin \nu\omega t.$$

Pentru $\nu = 0$ avem $a_0 = 0$; $\mathcal{D}_0 = \frac{1}{2} b_0$; $\mathcal{D}_0\, e^{j0} = \mathcal{D}_0 = \frac{1}{2} b_0$.

Să luăm ca exemplu ecuația diferențială

$$\frac{d}{dt}(iL) + ir = u_b \tag{1}$$

în care avem

$$u_b(t) = \sum_{\varkappa=-\infty}^{\varkappa=+\infty} \mathcal{U}_\varkappa\, e^{j\varkappa\omega t}; \quad L(t) = \sum_{\mu=-\infty}^{\mu=+\infty} \mathcal{L}_\mu\, e^{j\mu\omega t}$$

$$r(t) = \sum_{\mu=-\infty}^{\mu=+\infty} \mathcal{R}_\mu\, e^{j\mu\omega t}; \quad i(t) = \sum_{\rho=-\infty}^{\rho=+\infty} \mathcal{I}_\rho\, e^{j\rho\omega t}. \tag{2}$$

Se cere să se determine curentul electric staționar $i_{st}(t)$.

Se înlocuiește numărul de ordine μ al armonicilor parametrilor prin $\varkappa - \rho$ deoarece în termenii ecuației apare $\varkappa = \mu + \rho$.

Efectuîndu-se derivata în ecuația diferențială și înlocuindu-se mărimile din ecuație prin (2) se obține ecuația în forma

$$\sum_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{L}_{\varkappa-\rho}\, e^{j(\varkappa-\rho)\omega t} \sum_{-\infty}^{+\infty} (j\rho\omega)\, \mathcal{I}_\rho\, e^{j\rho\omega t} + \sum_{-\infty}^{+\infty} j(\varkappa-\rho)\,\omega\, \mathcal{L}_{\varkappa-\rho}\, e^{j(\varkappa-\rho)\omega t} \sum_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{I}_\rho\, e^{j\rho\omega t} +$$

$$+ \sum_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{R}_{\varkappa-\rho}\, e^{j(\varkappa-\rho)\omega t} \sum_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{I}_\rho\, e^{j\rho\omega t} = \sum_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{U}_\varkappa\, e^{j\varkappa t}. \tag{3}$$

Pentru a se obține o relație între modulurile mărimilor complexe, se înmulțesc termenii din (3) cu $e^{-j\varkappa_1\omega t}\, d(\varkappa_1\, \omega t)$ și se integrează de la 0 la 2π.

Se remarcă că

$$\int_0^{2\pi} \Sigma \mathcal{L}_{\varkappa-\rho}\, e^{j(\varkappa-\rho)\omega t}\, e^{-j\varkappa_1\omega t}\, d(\varkappa_1\, \omega t) = 2\pi \mathcal{L}_{\varkappa_1-\rho}\, e^{-j\rho\omega t} \tag{4}$$

Ca urmare din relația (3) se deduce

$$2\pi \mathcal{L}_{\varkappa_1-\rho}(j\rho\omega)\, \mathcal{I}_\rho + 2\pi j(\varkappa_1 - \rho)\,\omega \mathcal{L}_{\varkappa_1-\rho}\mathcal{I}_\rho + 2\pi \mathcal{R}_{\varkappa_1-\rho}\, \mathcal{I}_\rho = 2\pi \mathcal{U}_{\varkappa_1}$$

sau

$$j\varkappa_1\omega \mathcal{L}_{\varkappa_1-\rho}\mathcal{I}_\rho + \mathcal{R}_{\varkappa_1-\rho}\mathcal{I}_\rho = \mathcal{U}_{\varkappa_1} \tag{5}$$

în care avem

$$\varkappa_1 = 0; \quad \varkappa_1 = \pm 1; \quad = \pm 2; \quad = \pm 3 \ldots$$

Pentru $x_1 = 1$ se formează

$$\begin{aligned} x_1 - \rho &= 0, & \rho &= 1 \\ x_1 - \rho &= \pm 1, & \rho &= 0;\ 2 \\ x_1 - \rho &= \pm 2, & \rho &= -1;\ 3 \\ x_1 - \rho &= \pm 3, & \rho &= -2;\ 4 \end{aligned} \tag{6}$$

În mod analog se obține pentru $x_1 = -1$

$$\begin{aligned} x_1 - \rho &= 0, & \rho &= -1 \\ x_1 - \rho &= \pm 1, & \rho &= -2;\ 0 \\ x_1 - \rho &= \pm 2, & \rho &= -3;\ 1 \\ x_1 - \rho &= \pm 3, & \rho &= -4;\ 2 \end{aligned} \tag{7}$$

Ca urmare pentru $x_1 = 1$ și admițind că ne oprim la $x_1 - \rho = \pm 3$ se obține relația:

$$\begin{aligned} j\omega\mathcal{L}_1\mathcal{I}_1 + \mathcal{R}_0\mathcal{I}_1 + j\omega\mathcal{L}_1\mathcal{I}_0 + \mathcal{R}_1\mathcal{I}_0 + j\omega\mathcal{L}_{-1}\mathcal{I}_2 + \mathcal{R}_{-1}\mathcal{I}_2 + \\ + j\omega\mathcal{L}_2\mathcal{I}_{-1} + \mathcal{R}_2\mathcal{I}_{-1} + j\omega\mathcal{L}_{-2}\mathcal{I}_3 + \mathcal{R}_{-2}\mathcal{I}_3 + j\omega\mathcal{L}_3\mathcal{I}_{-2} + \\ + \mathcal{R}_3\mathcal{I}_{-2} + j\omega\mathcal{L}_{-3}\mathcal{I}_4 + \mathcal{R}_{-3}\mathcal{I}_4 = \mathcal{U}_1. \end{aligned} \tag{8}$$

În mod analog se obține o relație și pentru $\mathcal{U}_{-1}$ apoi pentru $\mathcal{U}_2$ și $\mathcal{U}_{-2}$, $\mathcal{U}_3$ și $\mathcal{U}_{-3}$ ș.a.m.d.

Ca urmare pentru determinarea armonicilor $\mathcal{I}_0$, $\mathcal{I}_1$, $\mathcal{I}_{-1}$, $\mathcal{I}_2$, $\mathcal{I}_{-2}$, $\mathcal{I}_3$, $\mathcal{I}_{-3}$, $\mathcal{I}_4$, $\mathcal{I}_{-4}$ se vor forma 9 ecuații.

Dacă tensiunea de borne e sinusoidală ne oprim la tensiunile $\mathcal{U}_1$ și $\mathcal{U}_{-1}$.

Pentru cele 9 ecuații vom avea

$\mathcal{U}_2 = 0$; $\mathcal{U}_{-2} = 0$, $\mathcal{U}_3 = 0$, $\mathcal{U}_{-3} = 0$ ș.a.m.d.

Deobicei numărul de ordine al armonicei x la tensiunea de borne este impar, deoarece tensiunea este simetrică în raport cu o jumătate de perioadă, adică

$$u(t) = -u\left(t + \frac{T}{2}\right).$$

Din cele reprezentate mai sus se obține prin calcul numai curentul electric staționar.

Scanned with OKEN Scanner